**MP** **Devoir surveillé n°6 – Physique** **le 21/02/25**

ENS

Durée 4h

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la **clarté**, à la **précision** et à la **concision** de la **rédaction**. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

*RAPPEL DES CONSIGNES*

- *Utiliser uniquement un **stylo noir ou bleu foncé non effaçable** pour la rédaction de votre composition ; **d'autres couleurs, excepté le vert**, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les **schémas** et la **mise en évidence des résultats**.*
- ***Ne pas utiliser de correcteur**.*
- ***Numéroter** les copies : ''i/nombre total''.*
- ***Respecter les notations** de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la **numérotation de la question posée**.*
- *Écrire le mot **FIN à la fin de votre composition**.*

**L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.**

**Les résultats numériques seront donnés avec un chiffre significatif.**

**Notations, formulaire et données numériques.**

- La grandeur complexe $\underline{X}(t)$, associée à la grandeur réelle $X(t) = \mathfrak{Re}(\underline{X}(t))$, harmonique de pulsation $\omega$, est notée :

$$\underline{X}(t) = \underline{X} \exp(-\mathrm{i}\omega t) \ , \tag{1}$$

où $\underline{X}$ pourra dépendre de la pulsation.
On notera la fonction exponentielle indifféremment : $\exp(x)$ ou $\mathrm{e}^x$.
Pour un champ $\vec{X}(\vec{r},t)$ de l'espace et du temps, la représentation complexe est notée :

$$\underline{\vec{X}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{X}}(\vec{r}) \exp(-\mathrm{i}\omega t) \ , \tag{2}$$

où $\underline{\vec{X}}(\vec{r})$ pourra dépendre de la pulsation. Nous ne ferons pas de distinction dans l'appellation d'une fonction entre $\underline{\vec{X}}(\vec{r},t)$ et $\underline{\vec{X}}(\vec{r})$ pour alléger les notations. Les arguments de la représentation complexe d'un champ permettront de préciser les dépendances dans les variables en fonction de la situation considérée.
Pour une onde plane progressive monochromatique, on écrira $\underline{\vec{X}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{X}}_0 \exp\left[\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right]$, où $\vec{k}$ est le vecteur de l'onde et $\vec{r}$ le vecteur position.

- **Définition** : Dans le contexte du problème, on admettra qu'une fonction $F(x,z)$ pourra toujours se décomposer de la manière suivante :

$$F(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{F}(\alpha,z) \exp(\mathrm{i}\alpha x) \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi} \quad \text{et} \quad \widetilde{F}(\alpha,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,z) \exp(-\mathrm{i}\alpha x)\mathrm{d}x \ , \quad \alpha \in \mathbb{R} \ . \tag{3}$$

**Remarque 1 : les fonctions $F(x,z)$ et $\widetilde{F}(\alpha,z)$ seront toujours définies dans des conditions qui permettent la convergence de l'intégrale. On ne se préoccupera aucunement de la convergence des intégrales dans le problème**.
**Remarque 2 : Il sera toujours permis de permuter les opérations de dérivée par rapport à $x$ ou $z$ et les opérations d'intégration. Par exemple, on pourra écrire :**

$$\frac{\partial}{\partial z} F(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} \widetilde{F}(\alpha,z) \exp(\mathrm{i}\alpha x) \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi} \ .$$

- **Propriété 1** : On a la propriété suivante :

$$\forall x, \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{F}(\alpha,z) \exp(\mathrm{i}\alpha x) \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi} = 0 \Leftrightarrow \forall \alpha, \widetilde{F}(\alpha,z) = 0 \ . \tag{4}$$

- **Propriété 2** : Pour une fonction gaussienne $F(x) = F_0 \exp\left[\dfrac{-x^2}{W_0^2}\right]$, on a :

$$\widetilde{F}(\alpha) = F_0 W_0 \sqrt{\pi} \exp\left(\frac{-W_0^2\alpha^2}{4}\right) \ . \tag{5}$$

- Constante de Planck : $h = 6{,}6 \times 10^{-34}$ J · s $= 4{,}1 \times 10^{-15}$ eV·s
- Constante de Boltzmann : $k_\mathrm{B} = 1{,}4 \times 10^{-23}$ J · K$^{-1}$
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}0 \times 10^8$ m · s$^{-1}$
- Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}9 \times 10^{-12}$ F · m$^{-1}$
- Charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C
- Masse de l'électron : $m_\mathrm{e} = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg

**Faisceaux gaussiens et pinces optiques**

Dans ce sujet nous nous intéressons à l'utilisation de la lumière pour piéger de petits objets (une nanobille dans l'exemple développé à la fin du problème). Il s'agit du principe de la pince optique (en anglais *optical tweezers*), pour lequel Arthur Ashkin a reçu le prix Nobel de Physique en 2018. Le piégeage ne peut se faire que dans des conditions particulières, qui peuvent être réunies en utilisant un faisceau laser. Le sujet propose d'abord une description formelle de la propagation de la lumière, puis la description du mode gaussien fondamental d'un faisceau laser. Dans les parties suivantes, nous nous concentrons sur l'interaction de la lumière avec une nano-bille diélectrique. C'est de cette description que vont apparaître les forces optiques mises en jeu dans le piégeage de la nano-bille par le faisceau laser. Les pinces optiques sont aujourd'hui largement utilisées dans le domaine de la biologie, pour manipuler de manière non-invasive des bactéries ou des virus.

## I Propagation et décomposition en ondes planes d'un champ électrique

Dans une zone de l'espace, vide de charges et de courants, on considère un champ électromagnétique quelconque, décrit de manière générale par un champ électrique $\vec{E}(\mathrm{M},t) = \vec{E}(\vec{r},t)$ et un champ magnétique $\vec{B}(\mathrm{M},t) = \vec{B}(\vec{r},t)$, où $\vec{r}$ désigne le vecteur position du point M par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. À ce référentiel est associé un repère cartésien $(\mathrm{O}xyz)$, où $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ sont les vecteurs unitaires de la base orthonormale du repère.

On rappelle que les champs électrique et magnétique, $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$, sont couplés par les équations de Maxwell dans le vide :

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0 \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0 \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\ . \tag{6}$$

La propagation du champ électrique (et du champ magnétique) est gouvernée par l'équation de d'Alembert :

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}\ , \tag{7}$$

où $c$ désigne la célérité de la lumière.

Pour un champ harmonique (ou monochromatique) de pulsation $\omega$, on écrit le champ électrique dans sa représentation complexe $\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{E}}(\vec{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)$. L'équation de d'Alembert pour $\underline{\vec{E}}(\vec{r},t)$ se réduit à l'équation dite de Helmholtz portant sur la grandeur $\underline{\vec{E}}(\vec{r})$ :

$$\Delta\underline{\vec{E}}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \vec{0}\ . \tag{8}$$

Dans la suite et afin de simplifier les calculs, on se limitera à l'étude d'une composante cartésienne du vecteur champ électrique, que l'on représentera par la grandeur scalaire $E(\vec{r},t)$ selon la direction $(\mathrm{O}y)$ du repère cartésien $(\mathrm{O}xyz)$. Lorsque la direction de polarisation du champ électrique sera différente de $(\mathrm{O}y)$, il sera fait explicitement mention de ce changement dans l'énoncé.

On considérera également un champ électrique dont la dépendance spatiale est uniquement selon les coordonnées $x$ et $z$, comme indiqué par l'expression suivante : $\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underline{E}(x,z,t)\vec{e}_y = \underline{E}(x,z)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\vec{e}_y$.

**1.** En reprenant l'équation de HELMHOLTZ portant sur $\underline{E}(x,z)$, et en utilisant les formules (3) et (4), montrer que la fonction $\widetilde{\underline{E}}(\alpha,z)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\widetilde{\underline{E}}(\alpha,z) + \underline{\gamma}^2\widetilde{\underline{E}}(\alpha,z) = 0 \ , \tag{9}$$

avec $\underline{\gamma}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2$, $\underline{\gamma}$ pouvant être complexe.

**2.** À quelle condition sur $\alpha$, $\underline{\gamma}$ est-il réel ? On écrit alors $\underline{\gamma} = \gamma$ avec $\gamma > 0$. Donner l'expression générale de $\widetilde{\underline{E}}(\alpha,z)$. Dans quel cas, $\underline{\gamma}$ est-il imaginaire pur ? On pose alors $\underline{\gamma} = \mathrm{i}\delta$ avec $\delta > 0$. Donner l'expression générale de $\widetilde{\underline{E}}(\alpha,z)$ dans ce cas.

**On admet dans toute la suite du problème que les conditions aux limites des différentes situations physiques rencontrées permettront d'écrire** : $\widetilde{\underline{E}}(\alpha,z) = \underline{A}(\alpha)\exp(\mathrm{i}\underline{\gamma}z)$. **Nous supposerons également que toutes les intégrales de fonctions sont convergentes**.

**3.** On suppose dans cette question que pour $|\alpha| \geqslant \omega/c$, $\underline{A}(\alpha) = 0$. Le champ électrique $\underline{E}(x,z,t)$ s'écrit alors sous la forme intégrale suivante :

$$\underline{E}(x,z,t) = \exp(-\mathrm{i}\omega t)\int_{-\omega/c}^{+\omega/c}\underline{A}(\alpha)\exp[\mathrm{i}(\alpha x + \gamma z)]\frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi} \ . \tag{10}$$

Interpréter physiquement la décomposition du champ électrique $\underline{E}(x,z,t)$. On s'attachera en particulier à donner un sens physique au vecteur $\alpha\vec{e}_x + \gamma\vec{e}_z$ et à la grandeur $\underline{A}(\alpha)$.

**4.** Proposer une interprétation dans le cas où $\underline{\gamma}$ est imaginaire pur.

**5.** Dans le cas où $\underline{\gamma}$ est réel, montrer que :

$$\underline{A}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty}\underline{E}(x,z=0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}x \ . \tag{11}$$

**Dans la suite du problème, on considérera $\underline{\gamma}$ réel et les bornes de l'intégrale intervenant dans l'expression (10) pourront être prolongées en $-\infty$ et $+\infty$.**

# II Étude de la limitation transversale d'un faisceau lumineux

Le formalisme présenté et étudié dans la partie précédente est parfaitement adapté à l'étude d'un faisceau lumineux ou d'une onde électromagnétique dont l'extension spatiale transversale à la propagation est limitée. Ce formalisme permet également de décrire les modifications de la structure d'un faisceau ou les phénomènes physiques apparaissant lorsqu'une onde électromagnétique rencontre un obstacle au cours de sa propagation.

On considère, dans cette partie, un écran opaque placé dans le plan $z = 0$ dans lequel une ouverture rectangulaire $(\mathcal{O})$ a été réalisée. Cette ouverture $(\mathcal{O})$ est de grande dimension dans la direction $(\mathrm{O}y)$, centrée en $x = 0$ et de largeur $W_0$ dans la direction $(\mathrm{O}x)$. On pourra considérer dans la suite que cette ouverture est assimilable à une fente infinie selon $(\mathrm{O}y)$ et de largeur $W_0$ selon $(\mathrm{O}x)$. L'ouverture $(\mathcal{O})$ est éclairée en totalité par une onde incidente plane progressive monochromatique d'amplitude $E_0$, provenant de la région de l'espace située dans le demi-espace $z < 0$ (Figure 1) :

$$\vec{\underline{E}}(z,t) = \underline{E}(z,t)\vec{e}_y = E_0\exp[\mathrm{i}(k_i z - \omega t)]\vec{e}_y \ , \tag{12}$$

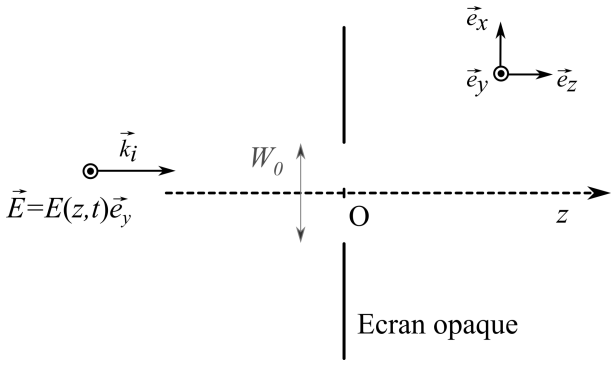


Figure 1 – Onde incidente sur l'ouverture ($\mathcal{O}$).

avec $\vec{k}_i = (\omega/c)\vec{e}_z = (2\pi/\lambda)\vec{e}_z$ le vecteur d'onde de l'onde incidente. La longueur d'onde utilisée pour l'onde incidente est $\lambda = 600\,\text{nm}$. La largeur $W_0$ de l'ouverture est de quelques micromètres.

**6.** Rappeler quel critère quantitatif permet de se placer dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique. En raisonnant sur des grandeurs caractéristiques, cette approximation est-elle applicable dans la situation physique énoncée ci-dessus ? Quel phénomène physique pourrait être mis en évidence par le dispositif schématisé sur la Figure 1 ?

Dans le demi-espace $z > 0$, situé en aval de l'ouverture ($\mathcal{O}$), le champ électrique en un point M de coordonnées ($x$,0,$z$), noté $E(x,z,t)$, est de même pulsation $\omega$ que l'onde incidente. La représentation complexe de ce champ $\underline{E}(x,z,t)$ peut s'écrire comme une superposition d'ondes planes progressives harmoniques d'amplitude $\underline{A}(\alpha)$, conformément à l'expression (10). On limite notre étude au plan $y = 0$ au regard de l'invariance de l'ouverture ($\mathcal{O}$) par rapport à l'axe (O$y$).

**7.** Déterminer l'expression de $\underline{A}(\alpha)$ en fonction de $E_0$, $\alpha$ et $W_0$. Représenter graphiquement $\underline{A}(\alpha)$ en fonction de $\alpha$.

**8.** À partir de l'expression du vecteur d'onde $\vec{k}$ d'une onde élémentaire dans le repère (O$xyz$) et de la représentation graphique de $\underline{A}(\alpha)$, identifier les directions dans lesquelles on observe un extremum de $\underline{A}(\alpha)$ et des annulations de $\underline{A}(\alpha)$. On pourra introduire l'angle $\theta$ défini par $\tan\theta = \alpha/\gamma$. Établir la relation entre $\sin\theta$, $\lambda$ et $W_0$ pour la première annulation. Par souci de simplicité, on supposera par la suite que $|\theta|$ est suffisamment petit pour avoir $\tan\theta \approx \sin\theta \approx \theta$.

**9.** En considérant des rayons lumineux parallèles à l'axe (O$z$) et des rayons parallèles entre eux, inclinés d'un angle quelconque par rapport à ce même axe, préciser comment une lentille mince convergente transforme une onde plane incidente dans son plan focal image. En déduire ce que l'on observe avec un capteur optique dans le plan focal image d'une lentille mince convergente ($\mathcal{L}$) de distance focale image $f'$, placée après l'ouverture ($\mathcal{O}$).

**10.** Dans la configuration de la question précédente, déterminer la distance $\Delta x$ entre l'image correspondant au maximum global et l'image correspondant au premier zéro de $\underline{A}(\alpha)$, dans le plan focal image de la lentille ($\mathcal{L}$). Commenter l'évolution de la tache lumineuse de largeur $2\Delta x$ située au voisinage du point focal image de ($\mathcal{L}$) lorsqu'on fait varier la largeur $W_0$ de l'ouverture ($\mathcal{O}$). Déterminer la valeur numérique de $2\Delta x$ de la tache lumineuse pour $W_0 = 10\,\mu\text{m}$ et $f' = 200\,\text{mm}$.

## III Source laser et faisceau gaussien

Dans cette partie, on étudie la propagation dans le sens des $z$ croissants d'un faisceau lumineux issu d'une source laser. Le champ électrique modélisant ce faisceau est noté $\vec{E}_\text{L}(x,z,t) = E_\text{L}(x,z,t)\vec{e}_y$. En

raison du caractère quasi-monochromatique d'une source laser, la dépendance temporelle du champ $E_{\mathrm{L}}(x,z,t)$ est harmonique, de pulsation $\omega$. On a donc $\underline{E}_{\mathrm{L}}(x,z,t) = \underline{E}_{\mathrm{L}}(x,z)\exp(-\mathrm{i}\omega t)$. Le champ électrique décrivant l'onde lumineuse est caractérisé dans le plan $z = 0$ par une répartition gaussienne de son amplitude selon l'axe $(\mathrm{O}x)$. On a ainsi :

$$E_{\mathrm{L}}(x,z=0) = E_0 \exp\left[\frac{-x^2}{W_0^2}\right] \ . \tag{16}$$

Le faisceau lumineux décrit par cette répartition d'amplitude de champ électrique possède une extension latérale caractéristique $W_0$ très grande devant la longueur d'onde réduite : $W_0 \gg \lambda/2\pi$. Ce faisceau est invariant par translation selon l'axe $(\mathrm{O}y)$, il a donc la forme d'une nappe laser. Dans la suite de cette partie, on se placera dans le plan $y = 0$.

**11.** À partir des résultats généraux établis dans la partie I, concernant la propagation d'un paquet d'ondes planes progressives et harmoniques, établir l'expression intégrale de $\underline{E}_{\mathrm{L}}(x,z)$ dans le demi-espace $z > 0$. En déduire l'expression de $\underline{A}(\alpha)$ dans ce cas. On rappelle que les grandeurs $\alpha$ et $\gamma$ sont reliées à la norme du vecteur d'onde $k$ de la manière suivante : $k^2 = \gamma^2 + \alpha^2$.

L'expression de $\underline{A}(\alpha)$ permet d'obtenir, dans l'approximation paraxiale, la dépendance spatiale du champ électrique décrivant le faisceau. On admettra que l'amplitude du champ électrique $\underline{E}_{\mathrm{L}}(x,z)$ se met sous la forme suivante :

$$\underline{E}_{\mathrm{L}}(x,z) = \underline{K}(z)\exp\left(\frac{-x^2}{W(z)^2}\right)\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x^2}{2R(z)}\right) \ . \tag{17}$$

Les fonctions réelles, $W(z)$ et $R(z)$, et la fonction complexe $\underline{K}(z)$ ont pour expression :

$$W(z) = W_0\sqrt{1+\frac{z^2}{z_{\mathrm{R}}^2}} \qquad R(z) = z\left(1+\frac{z_{\mathrm{R}}^2}{z^2}\right) \qquad \underline{K}(z) = E_0 2\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\sqrt{\frac{1}{2\pi\left(1+\mathrm{i}\dfrac{z}{z_{\mathrm{R}}}\right)}} \ . \tag{18}$$

La distance $z_{\mathrm{R}} = \dfrac{\pi W_0^2}{\lambda} = \dfrac{kW_0^2}{2}$ est appelée distance de Rayleigh.

**12.** Déterminer l'expression approchée de $W(z)$ dans les limites $z \ll z_{\mathrm{R}}$ et $z \gg z_{\mathrm{R}}$ et tracer la courbe représentant $W$ en fonction de $z$. Définir et exprimer l'angle $\theta$ de divergence du faisceau laser. À partir de cette expression, justifier que l'évolution spatiale du faisceau laser met en évidence un phénomène physique déjà rencontré précédemment que l'on rappellera.

**13.** Donner à une constante multiplicative près l'expression de l'intensité $I_{\mathrm{L}}(x,z)$ et en déduire que le faisceau a toujours un profil gaussien dans un plan $z = \mathrm{Cste}$. Tracer la répartition spatiale d'intensité $I_{\mathrm{L}}(x,z)$ en $z = 0$ et $z = z_{\mathrm{R}}$.

**14.** Dans le cas où $z$ vérifie conjointement les conditions $z \gg z_{\mathrm{R}}$ et $z \gg |x|$, montrer que le terme $\exp(\mathrm{i}kz)\exp\left[\mathrm{i}kx^2/(2R(z))\right]$ s'identifie au terme de phase caractéristique d'une onde sphérique, dans le plan $y = 0$ (en toute rigueur et au regard de l'invariance suivant $(\mathrm{O}y)$ de la nappe laser, il s'agit d'une onde cylindrique). Quel est le rayon de courbure des surfaces d'onde pour $z \gg z_{\mathrm{R}}$ ? Que dire de la surface d'onde pour $z \ll z_{\mathrm{R}}$ ? Évaluer numériquement $z_{\mathrm{R}}$ pour $W_0 = 100\,\mu\mathrm{m}$ et pour $W_0 = 1\,\mathrm{mm}$.

# IV Moment dipolaire d'un atome et d'une assemblée d'atomes

## IV.A Modèle d'atome : l'électron élastiquement lié

On s'intéresse dans cette partie à un électron dans un atome. Le modèle utilisé date du tout début du XX$^e$ siècle, à une époque où l'électron était identifié comme un corpuscule mais où les noyaux atomiques n'avaient pas encore été mis en évidence. L'électron est supposé être une particule ponctuelle de charge $-e$, situé dans une sphère de rayon $R_0$, uniformément chargée positivement en volume et de charge totale $+e$. Le système composé de l'électron associé à la sphère constitue un modèle simplifié d'atome, représenté Figure 2. On considérera que le diamètre $2R_0$ de la sphère a pour valeur typique $2R_0 = 0{,}1\,\text{nm}$.

Bien que ce modèle classique puisse sembler à l'heure actuelle très naïf, les résultats auxquels il mène se retrouvent bien dans un traitement quantique de la matière dans des conditions expérimentales usuelles, que nous supposerons respectées ici.

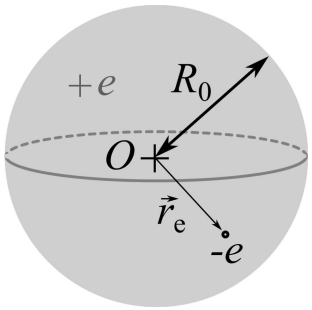


Figure 2 – Modèle simplifié d'atome. La partie grisée représente la charge $+e$ délocalisée dans toute la sphère de rayon $R_0$. L'électron est représenté par une charge $-e$ ponctuelle, de vecteur position $\vec{r}_\text{e}$.

On appelle $\vec{r}_\text{e}$ le vecteur position de l'électron, défini par rapport au centre O de la sphère chargée positivement, dans le repère cartésien (O$xyz$).

**15.** Montrer que la force électrique $\vec{F}_\text{el}$ exercée sur l'électron peut s'écrire comme une force élastique linéaire, c'est-à-dire $\vec{F}_\text{el} = -k_\text{el}\vec{r}_\text{e}$, avec $k_\text{el}$ la constante de raideur associée. Introduire dans l'expression de $k_\text{el}$ une pulsation caractéristique $\omega_0$ dont on précisera l'expression en fonction des paramètres du modèle et dont on calculera *un ordre de grandeur*.

## IV.B Établissement du moment dipolaire de l'atome

L'atome, décrit par le modèle simplifié présenté précédemment, est éclairé par une onde plane monochromatique, représentée par les champs électrique et magnétique suivants, en un point M quelconque de vecteur position $\vec{r}$ : $\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{E}}(\vec{r})\text{e}^{-\text{i}\omega t} = \vec{E}_0\text{e}^{\text{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ et $\underline{\vec{B}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{B}}(\vec{r})\text{e}^{-\text{i}\omega t} = \vec{B}_0\text{e}^{\text{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$. La pulsation $\omega$ de l'onde appartient à la gamme visible du spectre électromagnétique. On considère que les amplitudes $\underline{\vec{E}}(\vec{r})$ et $\underline{\vec{B}}(\vec{r})$ de l'onde électromagnétique peuvent être considérées comme uniformes à l'échelle de l'atome. On considère également que le déplacement du noyau soumis à cette onde est négligeable par rapport à celui de l'électron. Enfin, on suppose que l'électron sollicité par l'onde ne peut atteindre des vitesses qui nécessiteraient de prendre en compte des effets relativistes.

Lorsque l'électron est excité par l'onde électromagnétique, celui-ci perd de l'énergie au cours de son déplacement sous forme de rayonnement. Nous modéliserons ces pertes par une force de frottement visqueux $\vec{F}_\text{v} = -m_\text{e}\Gamma\dot{\vec{r}}_\text{e}$, où $\dot{\vec{r}}_\text{e}$ désigne la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\vec{r}_\text{e}$ de l'électron. On a de plus $\Gamma \ll \omega_0$.

**16.** Justifier que les amplitudes $\underline{\vec{E}}(\vec{r})$ et $\underline{\vec{B}}(\vec{r})$ peuvent être effectivement considérées comme uniformes à l'échelle de l'atome.

**17.** Donner un argument pour justifier que le mouvement du noyau peut être négligé devant celui de l'électron.

**18.** L'influence du champ magnétique de l'onde sur l'électron peut-elle être négligée ?

**19.** Établir l'équation différentielle à laquelle obéit le vecteur position $\underline{\vec{r}}_{\mathrm{e}}(t)$ de l'électron.

**20.** On cherche la solution de cette équation en régime établi (régime sinusoïdal forcé) sous la forme $\underline{\vec{r}}_{\mathrm{e}}(t) = \underline{\vec{r}}_{\mathrm{e},0}\exp(-\mathrm{i}\omega t)$. Déterminer l'expression de $\underline{\vec{r}}_{\mathrm{e},0}$. En déduire l'expression du moment dipolaire $\underline{\vec{d}}_{\mathrm{at}}(t) = -e\,\underline{\vec{r}}_{\mathrm{e}}(t)$ associé à l'atome soumis à l'influence de l'onde électromagnétique.

## IV.C Moment dipolaire d'une sphère diélectrique et indice optique

Le modèle de l'électron élastiquement lié, décrit dans (IV.A), et la modélisation de l'influence d'une onde électromagnétique sur un atome par l'apparition d'un moment dipolaire (IV.B) permettent de décrire le phénomène de polarisation d'une sphère *diélectrique*. Le terme diélectrique est synonyme ici d'isolant électrique.

On considère maintenant un volume de matière, constitué de $N$ atomes par unité de volume. On appelle $\vec{P}(\vec{r},t)$ le vecteur *polarisation* représentant la densité volumique de moment dipolaire. On peut considérer que si l'excitation par un champ électrique est sinusoïdale, c'est-à-dire $\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{E}}(\vec{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, la réponse de la matière diélectrique est linéaire et la polarisation oscille également à la pulsation $\omega$, d'où $\underline{\vec{P}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{P}}(\vec{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$. L'indice optique $n$ du volume de matière considéré intervient alors dans le facteur de proportionnalité entre le champ électrique $\underline{\vec{E}}(\vec{r})$ et la polarisation $\underline{\vec{P}}(\vec{r})$ selon la formule suivante :

$$\underline{\vec{P}}(\vec{r}) = \varepsilon_0(n^2-1)\underline{\vec{E}}(\vec{r})\ , \tag{19}$$

où $\underline{\vec{E}}(\vec{r})$ désigne l'amplitude du champ électrique sinusoïdal excitateur et $\underline{\vec{P}}(\vec{r})$ l'amplitude de la réponse sinusoïdale en polarisation au point $\vec{r}$. On précise que l'indice optique $n$ peut dépendre de la pulsation et peut être une grandeur complexe.

**21.** Exprimer $\underline{\vec{P}}(\vec{r},t)$ en fonction de $N$ et $\underline{\vec{d}}_{\mathrm{at}}(t)$, et en déduire l'expression de $n^2$.

**22.** Dans le modèle d'atome adopté initialement, montrer que dans le domaine des fréquences optiques ($\omega$ comprise entre $2.\,10^{15}$ et $5.\,10^{15}\,\mathrm{rad.s^{-1}}$) l'indice dépend peu de la pulsation.

On considère une sphère diélectrique d'indice optique $n$ et de rayon $a$ dans le vide, placée en O. Cette sphère est éclairée par une onde électromagnétique monochromatique incidente, dont l'amplitude du champ électrique est $\underline{\vec{E}}_0$. Le rayon $a$ de la sphère diélectrique est tel que $a \ll \lambda$, où $\lambda$ désigne la longueur d'onde du champ excitateur $\underline{\vec{E}}_0$, de sorte que l'on peut considérer le champ électromagnétique uniforme dans la sphère. On peut montrer, sous certaines conditions d'approximation respectées ici, que l'amplitude $\underline{\vec{E}}$ du champ électrique monochromatique effectivement ressenti par les atomes dans la sphère est différent de celle du champ excitateur $\underline{\vec{E}}_0$ et obéit à la relation :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}\ . \tag{20}$$

**23.** Quel est le moment dipolaire $\underline{\vec{d}}_{\mathrm{at}}$ de chaque atome de la sphère en fonction de $\underline{\vec{E}}_0$ et $\underline{\vec{P}}$ ? Donner alors l'expression de $\underline{\vec{P}}$ en fonction de l'indice optique $n$ précédemment déterminé et de $\underline{\vec{E}}_0$.

**24.** En déduire le moment dipolaire $\underline{\vec{D}}$ de la sphère en fonction de $n$, $a$, $\varepsilon_0$ et de $\underline{\vec{E}}_0$.

# V Principe d'une pince optique

Le principe général d'une pince optique repose sur le piégeage d'un système de petite dimension en utilisant un faisceau laser. L'équilibre de ce système dans le faisceau laser est dépendant des différentes interactions du système avec le faisceau lumineux. Cette partie propose de modéliser les différentes actions exercées par la lumière sur le système de petite dimension (V.A) et d'analyser le comportement de ce dernier au sein d'un faisceau lumineux (V.B).

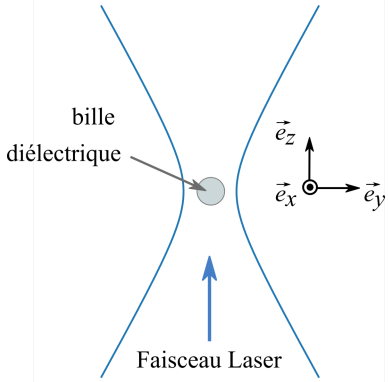


Figure 3 – Principe général d'une pince optique : piégeage d'une bille dans un faisceau lumineux. Les lignes courbes représentent l'extension spatiale du faisceau lumineux.

On considère donc la situation physique décrite par la Figure 3 où une nano-bille diélectrique est placée dans un faisceau laser, dont l'axe optique est (O$z$) et de géométrie cylindrique. Cette bille est de rayon $a$ petit devant la longueur d'onde $\lambda$ du faisceau. Elle est placée en $\vec{r}_\mathrm{b}$ dans un liquide dont l'indice optique est $n_\mathrm{s}$. Lorsque la bille est éclairée par le faisceau lumineux, elle est assimilable à un moment dipolaire $\vec{D}_\mathrm{b}$ (vecteur réel) proportionnel au champ électrique du faisceau, $\vec{E}(\vec{r}_\mathrm{b})$ (vecteur réel) :

$$\vec{D}_\mathrm{b} = A\vec{E}(\vec{r}_\mathrm{b}) \; . \tag{21}$$

Le comportement diélectrique de la bille dans le faisceau lumineux, c'est-à-dire l'expression du coefficient $A$ (constante réelle), sera développé dans la partie V.B.

## V.A Forces optiques subies par la bille

Afin de réaliser le piégeage d'une bille dans un faisceau lumineux laser il est nécessaire de modéliser les interactions lumière-matière entre la bille et le faisceau lumineux. La bille, décrite par un dipôle $\vec{D}_\mathrm{b}$, est soumise à deux forces issues de l'interaction avec le faisceau lumineux : la force radiative de diffusion et la force de gradient, décrites dans les sous-parties suivantes. On négligera le poids de la bille, ainsi que la poussée d'Archimède exercée par le solvant sur la bille.

### V.A.a Force radiative de diffusion

La puissance lumineuse moyenne émise (diffusée) par le dipôle est donnée par :

$$\mathcal{P} = \frac{4\pi^3}{3}\frac{c\, n_\mathrm{s}}{\varepsilon_0 \lambda^4} D_{\mathrm{b},0}^2 \,, \tag{22}$$

où $\lambda$ est la longueur d'onde dans le vide du faisceau lumineux, et $D_{\mathrm{b},0}$ est l'amplitude du moment dipolaire $\vec{D}_\mathrm{b}$.

On rappelle que l'impulsion $\vec{p}_\mathrm{ph}$ portée par un photon est $\hbar\vec{k}$ où $\vec{k}$ est le vecteur d'onde associé au mode électromagnétique décrit par le photon dans le milieu du solvant ($k = n_\mathrm{s}\omega/c$), et $\hbar = h/(2\pi)$ la constante de Planck réduite. L'énergie d'un photon est $E_\mathrm{ph} = \hbar\omega$.

**25.** Sur une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$, déterminer l'énergie $\mathrm{d}\mathcal{E}$ de la lumière diffusée par la bille. En déduire le nombre de photons $\mathrm{d}\mathcal{N}$ qui ont été diffusés par la bille pendant cette durée.

**26.** La diffusion par un dipôle est à symétrie centrale (symétrie par rapport au centre du dipôle) : le nombre de photons diffusés dans une direction caractérisée par le vecteur d'onde $\vec{k}$ est donc égal au nombre de photons diffusés dans la direction $-\vec{k}$. En conséquence, on admettra que l'impulsion globale de la lumière diffusée par la bille est nulle. En écrivant l'impulsion infinitésimale $\mathrm{d}\vec{p}$ transmise par les photons de l'onde incidente à la bille pendant $\mathrm{d}t$, déduire l'expression de la force $\vec{F}_\mathrm{d}$ de diffusion exercée par les photons incidents sur la bille, notamment en fonction de $\mathcal{P}$. Quelle est son action sur la bille ? On précisera le sens de la force.

### V.A.b Force de gradient

Pour modéliser l'influence de la deuxième force exercée par la lumière sur la bille, on va se ramener à une situation simplifiée. Dans un premier temps, on considère un dipôle formellement décrit par une charge positive $+q$ et une charge négative $-q$ aux positions respectives $\vec{r}_+ = \vec{r}_0$ et $\vec{r}_- = \vec{r}_0 - \vec{\delta}$. Le moment dipolaire de la bille s'écrit alors $\vec{D}_\mathrm{b} = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = q\vec{\delta}$. Afin de simplifier l'étude, on considère que les charges positives ont une inertie beaucoup plus grande que les charges négatives, et on supposera qu'aux échelles de temps considérées $\vec{r}_0$ ne dépend pas du temps (charges positives fixes) et seul $\vec{\delta}$ dépend du temps (charges négatives mobiles).

Le déplacement $\vec{\delta}$ étant peu important, on pourra utiliser le développement limité au premier ordre en $||\vec{\delta}||$ des champs suivants :

$$\vec{E}(\vec{r}_-,t) = \vec{E}(\vec{r}_0,t) - (\vec{\delta}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{E}(\vec{r}_0,t) \,. \tag{23}$$

Le même développement s'applique au champ magnétique $\vec{B}(\vec{r}_-,t)$.

**27.** Écrire la force de Lorentz instantanée $\vec{F}_\mathrm{Lor}$ exercée sur l'ensemble des deux charges, et en déduire, à l'aide du développement limité au premier ordre en $\| \vec{\delta} \|$ ci-dessus, que la force totale exercée par l'onde électromagnétique incidente sur le dipôle $\vec{D}_\mathrm{b}$ représentant la bille se met sous la forme suivante :

$$\vec{F}_\mathrm{Lor} = (\vec{D}_\mathrm{b}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{E} + \frac{\mathrm{d}\vec{D}_\mathrm{b}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{B} \,. \tag{24}$$

**28.** En utilisant l'expression (21) et l'identité vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec{E}^2) = 2(\vec{E}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{E} + 2\vec{E} \wedge (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E})$, exprimer la force $\vec{F}_\mathrm{Lor}$ comme une combinaison linéaire, dont on précisera les coefficients, des termes $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec{E}^2)$ et $\partial(\vec{E} \wedge \vec{B})/\partial t$.

**29.** Du fait de son inertie et de la fréquence élevée du champ électromagnétique décrivant l'onde incidente sur la bille, cette dernière ne réagit qu'à la moyenne temporelle de la force de Lorentz instantanée $\langle\vec{F}_\mathrm{Lor}\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{F}_\mathrm{Lor}(t)\mathrm{d}t$, où $T = 2\pi/\omega$ est la période d'oscillation du champ électromagnétique. Montrer que $\langle\partial(\vec{E}\wedge\vec{B})/\partial t\rangle_T = \vec{0}$ et donner l'expression de la force de gradient $\vec{F}_\mathrm{g}$, définie comme $\vec{F}_\mathrm{g} = \langle\vec{F}_\mathrm{Lor}\rangle_T$, en fonction de $A$ et du gradient de $\langle\vec{E}^2\rangle_T$.

## V.B Piégeage d'une bille diélectrique

La bille, considérée jusqu'à présent, est une sphère diélectrique de rayon $a$ et d'indice optique $n$. Le moment dipolaire de la bille en présence d'un faisceau lumineux obéit à la relation (21). On peut montrer que le coefficient de proportionnalité de l'équation (21) entre le moment dipolaire de la bille $\vec{D}_\mathrm{b}$ et le champ électrique caractérisant le faisceau lumineux est :

$$A = 4\pi\varepsilon_0 n_\mathrm{s}^2 a^3 \frac{m^2-1}{m^2+2}\,, \tag{25}$$

où $m = n/n_\mathrm{s}$ est le rapport de l'indice optique de la bille $n$ sur l'indice optique $n_\mathrm{s}$ du solvant. L'intensité du faisceau lumineux incident sur la bille, au sein du solvant, est par définition :

$$I = n_\mathrm{s}\varepsilon_0 c\langle\vec{E}^2\rangle_T\,. \tag{26}$$

**30.** À partir de l'étude des forces de diffusion et de gradient menée dans les paragraphes (V.A.a) et (V.A.b), donner les expressions des forces $\vec{F}_\mathrm{d}$ et $\vec{F}_\mathrm{g}$ sur la bille au sein du solvant, en fonction de $m$, $n_\mathrm{s}$ et $I$ en particulier. Dans le cas de la force de diffusion, on pourra se servir du fait que $\langle\vec{E}^2\rangle_T = E_0^2/2$ où $E_0$ est l'amplitude du champ électrique $\vec{E}(t)$.

On considère que l'intensité du faisceau gaussien utilisé, à géométrie *cylindrique*, centré en $x = 0$ et $y = 0$, peut s'écrire sous la forme :

$$I(x,y,z) = I_0 \frac{z_\mathrm{R}^4}{(z_\mathrm{R}^2+z^2)^2} \exp\left(\frac{-2(x^2+y^2)}{W_0^2}\right)\,. \tag{27}$$

**31.** Préciser les conditions permettant de piéger la bille de façon stable au centre du faisceau.

Dans une région du faisceau définie par les conditions suivantes : $|x|,|y| \ll W_0$ et $|z| \ll z_\mathrm{R}$, il est possible d'écrire, en première approximation, les dérivées partielles de l'intensité sous la forme suivante :

$$\frac{\partial I}{\partial x}(x,y,z) = \frac{-4I_0}{W_0^2}\,x\,, \tag{28}$$

$$\frac{\partial I}{\partial y}(x,y,z) = \frac{-4I_0}{W_0^2}\,y\,, \tag{29}$$

$$\frac{\partial I}{\partial z}(x,y,z) = \frac{-4I_0}{W_0^2}\frac{\lambda^2}{\pi^2 W_0^2}\,z\,. \tag{30}$$

**32.** Compte tenu des résultats de la question **30**, et sans effectuer de calcul, conclure sur la possibilité de piéger une telle bille. Justifier la nécessité de focaliser le faisceau pour piéger la bille.

En utilisant un objectif de microscope approprié, considéré comme une lentille mince convergente de très courte distance focale, il est possible de focaliser très fortement un faisceau laser, de manière à créer un gradient d'intensité élevé. On montre dans ce cas que l'extension latérale $W_0$ du faisceau lumineux est de l'ordre de $\lambda/\pi$.

**33.** Quelle est dans ce cas la distance de Rayleigh $z_\mathrm{R}$ (autour du point focal) ? En déduire l'échelle de longueur sur laquelle l'intensité est significative le long de l'axe (O$z$) de propagation du faisceau laser et justifier que les forces de gradient sont du même ordre de grandeur sur les trois axes (O$x$), (O$y$) et (O$z$).

**34.** On éclaire, dans ces conditions, une bille de silice de rayon $a = 100\,\text{nm}$, d'indice optique $n = 1{,}37$, dans de l'eau d'indice optique $n_s = 1{,}33$ (On a alors $(m^2-1)/(m^2+2) \approx 0{,}02$), avec un laser de longueur d'onde $\lambda = 600\,\text{nm}$, et dont la puissance délivrée est de $40\,\text{mW}$. Calculer l'intensité $I_0$ dans le plan focal image de la lentille en $\text{W.cm}^{-2}$. Pour un écart à la position $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ de l'ordre de 50 nm, on obtient une valeur de la force de gradient de l'ordre de 1 pN. L'ordre de grandeur de la force de diffusion est 0,2 pN. Conclure sur la possibilité de piéger la bille.

**35.** Justifier que l'on puisse considérer la force de gradient comme une force élastique et évaluer la constante de raideur associée.

**36.** A partir des valeurs des forces données dans la question **34**, donner un ordre de grandeur des forces de gradient et de diffusion pour des billes de silice de rayon $a = 200\,\text{nm}$. Donner également un ordre de grandeur des forces de gradient et de diffusion pour des billes en polystyrène de rayon $a = 100\,\text{nm}$, dont l'indice optique est $n = 1{,}63$ (on donne alors $(m^2-1)/(m^2+2) \approx 0{,}14$). Comment choisir la longueur d'onde du laser pour mieux piéger une particule ?

**37.** On revient à une particule de silice de rayon $a = 100\,\text{nm}$ piégée dans la pince optique. Le long de l'axe $(Ox)$, la position de la bille est en moyenne nulle : $\langle x_b \rangle = 0$. En utilisant le théorème d'équipartition de l'énergie, déterminer quel est l'ordre de grandeur de l'écart-type $\sigma_x$ à température ambiante ($T = 300\,\text{K}$). On rappelle que $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$. Comparer à la taille de la bille et à la distance caractéristique de la zone de confinement du faisceau. Le piège est-il satisfaisant ?

⋆ ⋆
⋆