



**Mercredi 12/03/2025**

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI**

---

**PHYSIQUE - CHIMIE**

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
  - *Ne pas utiliser de correcteur.*
  - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
- 

**Les calculatrices sont autorisées**

**Le sujet est composé de quatre problèmes totalement indépendants.  
La plupart des sous-parties le sont également.**

## **Problème 1 : Une brève histoire de la photographie**

Les portions de texte *en italique* donnent des informations générales et apportent des éclairages historiques permettant de donner une cohérence au sujet. Leur lecture n'est pas indispensable pour répondre aux questions posées.

Les données, approximations et formules mathématiques utiles sont disponibles ci-dessous ou dans l'énoncé.

Les résultats numériques attendus devront être fournis avec une précision suffisante pour pouvoir être interprétés.

Le sujet comporte des documents apportant des informations sur différents aspects du thème abordé dans le sujet ou sur les systèmes étudiés dans chaque partie. Ils peuvent être utilisés pour apporter un commentaire ; lorsqu'ils sont indispensables pour répondre à une question, cela est indiqué dans le texte de la question.

### **Données du sujet**

#### Constantes de la physique

- célérité de la lumière dans le vide :  
 $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- constante de Planck :  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$
- permittivité du vide :  
 $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-3} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$
- perméabilité magnétique du vide :  
 $\mu_0 = 1,25 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$
- charge élémentaire :  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- accélération de la pesanteur :  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

#### Approximations

- $\sin(x) \approx \tan(x) \approx x$  si  $x$  est proche de 0
- $\cos(x) \approx 1$  si  $x$  est proche de 0
- $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$  si  $x \ll 1$

#### Résultat mathématique

$$\bullet \int_0^{\pi} \sin^3(\theta) d\theta = \frac{4}{3}$$

Les images sont omniprésentes dans l'environnement et il peut sembler qu'elles l'ont toujours été. C'est pourtant loin d'être le cas. Longtemps le dessin et la peinture furent les seuls moyens utilisés pour représenter la réalité sur un support à deux dimensions et ce n'est qu'au XIX<sup>e</sup> siècle qu'un procédé technique permit de "capturer" des images.

## Partie I - Optique de l'appareil photo

La date conventionnelle de l'invention de la photographie a été fixée au 7 janvier 1839, date à laquelle Arago présenta à l'Académie des Sciences l'invention de Daguerre : le daguerréotype. Mais l'histoire de la photographie commence bien avant notamment avec la camera obscura (chambre noire) qui est utilisée dès le XVI<sup>e</sup> siècle pour des travaux topographiques. Les historiens de l'art ont également montré qu'elle était utilisée par des peintres, comme Vermeer ou les frères Van Eyck.

Le fonctionnement de cet ancêtre de l'appareil photo repose sur les propriétés des lentilles.

### I.1 - Objet et image

On modélise un appareil photo (**figure 1**) par l'association d'une lentille mince ( $L$ ) de focale  $f' = \overline{OF'}$  appelée "objectif", d'un capteur ( $C$ ) sur lequel on souhaite récupérer l'image et d'un diaphragme ( $D$ ) placé devant la lentille.

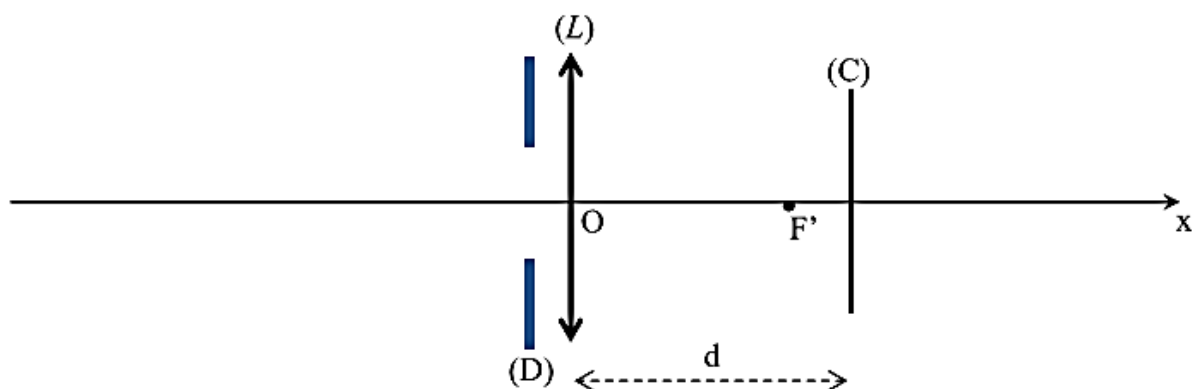


Figure 1 - Modélisation d'un appareil photo

La distance  $d$  entre la lentille ( $L$ ) et le capteur ( $C$ ) est réglable, grâce à un mécanisme lié à l'objectif ; elle est comprise entre  $d_{\min}$  et  $d_{\max}$ .

À l'aide de cet appareil, on souhaite former sur le capteur l'image d'un arbre de hauteur  $h$  situé à une distance  $L$  devant l'objectif.

- Q1.** a) La lentille mince est utilisée dans les "conditions de Gauss". Préciser en quoi elles consistent.  
b) Quelle partie de l'appareil permet d'assurer que ces conditions sont remplies ?

- Q2.** a) Faire un schéma soigné de la situation en notant AB l'objet et A'B' son image sur le capteur (A est sur l'axe et AB appartient à un plan orthogonal à l'axe). Positionner les foyers principaux et tracer au moins deux rayons lumineux issus de B pour justifier la position de l'image A'B'.
- b) Exprimer la taille  $\overline{A'B'}$  de l'image de l'arbre sur le capteur en fonction de h, f' et L. Calculer cette taille avec f' = 50 mm, h = 5 m et L = 20 m.

Rappel : l'objet AB et l'image A'B' donnée par la lentille mince de centre O et de foyers principaux F (objet) et F' (image) dans les conditions de Gauss sont liés par les relations :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} ; \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} ; \quad \overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -(\overline{OF'})^2 ; \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} .$$

- Q3.** a) Quelle est la valeur de d lorsque l'objet est à l'infini ?
- b) Montrer qu'il existe une distance limite notée  $L_{\min}$  en dessous de laquelle il ne sera pas possible d'obtenir une image sur le capteur, alors que ce serait toujours possible pour des valeurs supérieures à  $L_{\min}$ .
- c) Exprimer  $L_{\min}$  en fonction de f' et  $d_{\max}$ .
- d) Calculer  $L_{\min}$  pour f' = 50 mm et  $d_{\max} = 55$  mm.

## I.2 - Influence de la focale

On souhaite obtenir une image de l'arbre sur le capteur plus grande sans changer de place (donc en gardant la même valeur pour L). On change donc l'objectif et on le remplace par un objectif de focale  $f'_1 = 100$  mm. La distance d est toujours réglable mais les valeurs  $d_{\min}$  et  $d_{\max}$  sont différentes des valeurs de Q3.

- Q4.** a) Quelle sera la taille de l'image de l'arbre sur le capteur ?
- b) Si on suppose que le capteur a pour dimensions : 24 mm × 36 mm, sera-t-il possible de voir l'arbre en entier sur la photo obtenue ?

Remarque : pour Q5 et Q6, des approximations justifiées seront à faire.

- Q5.** L'objectif utilisé est appelé " téléobjectif " ou " objectif de longue focale ". Sur un site internet dédié à la photographie, on peut lire que ce genre d'objectif " rapproche les objets ". Commenter cette phrase en indiquant la part de vérité ou d'inexactitude qu'elle contient. Un raisonnement et un calcul numérique sont attendus (en utilisant une approximation justifiée).

On souhaite maintenant réaliser un téléobjectif en utilisant deux lentilles : une lentille ( $L_1$ ) convergente et une lentille ( $L_2$ ) divergente, séparées par une distance e. La distance L entre ( $L_1$ ) et l'arbre n'a pas changé.

- Q6.** La lentille ( $L_1$ ), de focale  $f'_1$ , donne de l'arbre AB une image intermédiaire  $A_1B_1$  qui joue le rôle d'objet pour la lentille ( $L_2$ ), de focale  $f'_2$ , qui en donne une image finale A'B'.
- a) Exprimer la distance  $\overline{O_2A_1}$  en fonction de  $f'_1$  et e (en utilisant une approximation justifiée).
- b) L'image A'B' doit être réelle. En déduire que la distance e entre les centres des deux lentilles doit être située dans une plage de valeurs bien précise. Exprimer cette condition sur e sous la forme d'une double inégalité sur e,  $f'_1$  et  $f'_2$  (en utilisant une approximation justifiée).
- c) Vérifier que cette condition est réalisée avec  $f'_1 = 10$  cm,  $f'_2 = -5$  cm et e = 8 cm.

- Q7.** Avec les valeurs numériques de **Q6c** :
- Calculer la distance  $d$ ,
  - Calculer la taille de l'image  $A'B'$  de l'arbre sur le capteur.
  - Indiquer si ce téléobjectif est équivalent à l'objectif de **Q4**.

### I.3 - Exploitation d'une photo

Les tailles des capteurs dont sont équipés les appareils numériques actuels sont variables, comme l'indique le **document 1**.

#### Document 1 - Exemples de capteurs d'appareils photo numériques

Standard Diagonale	Dimensions	Exemples	
1/2,5"	7,18 mm	4,29x5,76 mm	Panasonic TZ6
1/2,3"	7,7 mm	4,62x6,16 mm	Nikon P90, Canon 110 IS
1/2"	8 mm	4,8x6,4 mm	Fuji F70EXR
1/1,7"	9,5 mm	5,7x7,6 mm	Canon G10
1/1,6"	10 mm	6x8 mm	Fuji S200EXR
4/3"	21,6 mm	13x17,3 mm	reflex 4/3 et hybrides Micro 4/3
APS	24,8 mm	13,8x20,7 mm (Sigma)	reflex amateurs
	à	à	
	28,4 mm	15,8x23,6 mm (Nikon, Sony)	
24x36	43,3 mm	24x36 mm	Nikon D700, Sony Alpha 900

Source : *Wikipedia*

La photo ci-dessous a été prise avec un appareil photo numérique de type "Canon G10". Les informations relatives à la photo sont consignées dans le **document 2**.



Il s'agit d'une photo prise dans la baie du Mont Saint-Michel (au point B sur la carte satellite du document 3). La distance BC vaut 1,46 km.

### Document 2 - Informations relatives à la prise de vue (Photo Mont Saint-Michel)

Sensibilité : 100 ISO  
Vitesse : 1/250 s  
Ouverture : f/7,1  
Focale : 18 mm

### Document 3 - Image satellite de la baie du Mont Saint-Michel



A : Bec d'Andaine

B : lieu de la prise de vue

C : Mont Saint-Michel

**Q8.** À partir de la photo obtenue et des documents 1, 2 et 3, déterminer la hauteur du Mont Saint-Michel (flèche comprise) en indiquant les hypothèses posées, la modélisation du problème (par exemple par un schéma légendé) et les calculs effectués.

## Partie II - La lumière

Le contrôle de la lumière qui pénètre dans l'appareil photo est essentiel, qu'il soit argentique ou numérique.

### II.1 - Réglage de différents paramètres lors d'une prise de vue

Le document 4 indique les différents réglages en mode manuel (en mode automatique, les réglages sont déjà faits par défaut) pour obtenir une bonne exposition.

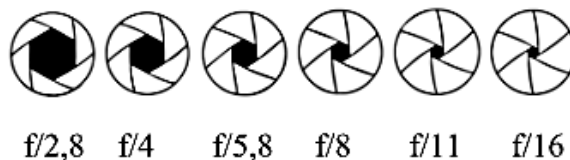


## Document 4 - Réglages de l'exposition d'une photo

L'exposition est un paramètre technique important pour la réussite d'une photo. Elle caractérise en quelque sorte l'action de la lumière sur le capteur. Si l'exposition est trop faible, l'image obtenue sera sombre (sous-exposée) ; à l'inverse, une surexposition produira une image trop claire.

L'exposition est choisie en fonction de la scène à photographier (intérieur, extérieur, etc.) et peut être contrôlée par trois paramètres.

- La sensibilité ISO correspond à la sensibilité à la lumière du capteur (ou de la pellicule) ; elle varie en général entre 100 (faible sensibilité) et 3 200 (grande sensibilité). Une sensibilité deux fois plus grande correspond donc à un capteur deux fois plus sensible. Il est préférable d'utiliser une sensibilité faible car les hautes sensibilités augmentent le bruit, ce qui détériore le résultat.
- La vitesse d'obturation représente la durée pendant laquelle l'obturateur reste ouvert. Elle est en général comprise entre 1 s et 1/250 s. Une faible vitesse peut entraîner des phénomènes de " bougé " si la scène est en mouvement.
- L'ouverture du diaphragme correspond à la taille du disque qui laisse passer la lumière quand l'obturateur est ouvert. Elle est indiquée par une notation  $f/x$ , où  $x$  est appelé " nombre d'ouverture ". Voici quelques valeurs de l'ouverture :

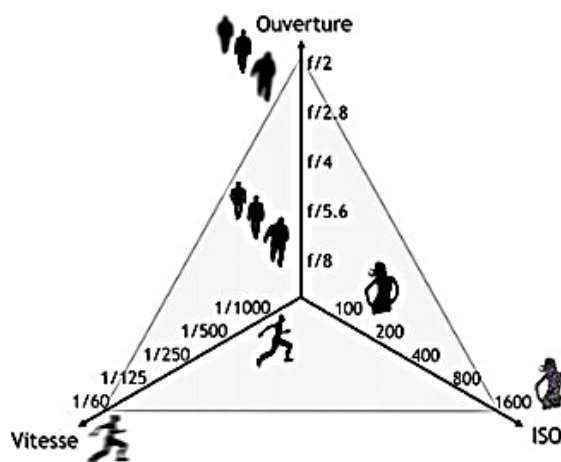


Lorsqu'on passe d'une valeur à l'autre (de la gauche vers la droite) on divise par 2 la surface d'ouverture du diaphragme. L'ouverture modifie également la profondeur de champ : une plus faible ouverture permet d'obtenir une plus grande profondeur de champ.

Source : d'après [apprendre-la-photo.fr](http://apprendre-la-photo.fr)

## Document 5 - Le triangle de l'exposition

On résume souvent l'exposition d'une photo par le " triangle d'exposition " :



L'exposition est représentée par la surface du triangle.

Source : [apprendre-la-photo.fr](http://apprendre-la-photo.fr)

**Q12.** Un photographe amateur effectue une prise de vue (un portrait d'une personne immobile) en extérieur avec les réglages suivants : (ISO : 100 / vitesse : 1/250 s / ouverture : f/8). Il l'estime correctement exposée et souhaite en effectuer une autre avec la même exposition, en conservant la même sensibilité, mais avec une ouverture f/4. Répondre aux questions suivantes en justifiant les réponses à l'aide des **documents 4 et 5**.

- Quelle vitesse d'obturation doit-il choisir ?
- Ce nouveau réglage va-t-il permettre d'augmenter ou diminuer la profondeur de champ ?
- Si la personne bouge un peu durant la prise de vue, y a-t-il un risque plus grand, en comparaison avec la première photographie, que l'image obtenue soit floue ?

## II.2 - Modèle corpusculaire

Une composante monochromatique de fréquence  $\nu$  de la lumière peut être modélisée également par un flux de photons se déplaçant avec une célérité  $c$ .

**Q13.** Donner l'expression de l'énergie de chacun de ces photons en précisant la signification et les unités des termes utilisés.

Donnée : une ouverture f/8 correspond à un diamètre d'ouverture (sensiblement circulaire) du diaphragme de 5 mm dans les conditions de cette prise de vue.

**Q14.** Si on considère une prise de vue avec les réglages (ISO : 100 ; vitesse : 1/500 s ; ouverture : f/8), estimer le nombre de photons qui pénètrent dans l'appareil durant l'ouverture de l'obturateur si on considère un éclairage solaire moyen de  $700 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ . Pour cette question, on admet qu'il est équivalent de considérer que la lumière solaire est monochromatique, de fréquence  $\nu = 5,0 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ .

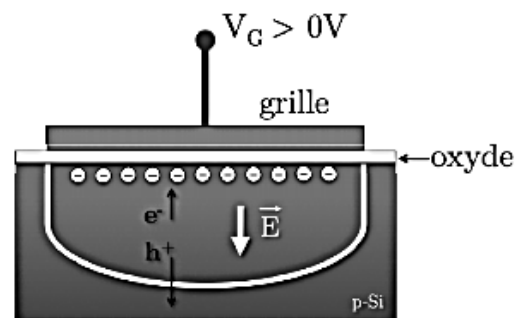
## Partie III - Le capteur

*La date admise pour l'invention de la photographie correspond au moment où l'image a pu être "capturée". Cela fut possible en utilisant un procédé analogique, une réaction chimique déclenchée par la lumière, dès le début du XIX<sup>e</sup> siècle. Il faudra attendre 1970 pour voir apparaître les premiers capteurs numériques dont le principe de fonctionnement est décrit dans le document 6.*

### Document 6 - Fonctionnement d'un capteur CCD

Un capteur est construit sur un substrat de silicium et chaque photo-site (ou pixel) est délimité par une fine électrode métallique appelée " grille ". Chaque photon qui arrive sur un photo-site crée une paire électron-trou et l'électron est " piégé " si on applique une tension positive ( $V_G$ ) entre la grille et le silicium. Chaque photo-site peut donc être modélisé comme un condensateur qui se charge au cours du temps sous l'effet de l'éclairement, la charge étant proportionnelle à l'intensité lumineuse reçue. À la fin de la durée d'exposition du capteur (appelée " durée d'intégration ") la charge de chaque photo-site est convertie en tension et le photo-site est remis à zéro.

Source : *Contribution au développement d'une technologie d'intégration tridimensionnelle pour les capteurs d'images CMOS à pixels actifs*, Perceval Coudrain (2009, Thèse de doctorat, Université de Toulouse)





**Q15.** Sous quel nom est connu le phénomène selon lequel un photon peut " arracher " un électron à un métal ? Citer le nom du physicien qui en proposa une interprétation en 1905.

**Q16.** Ce phénomène ne peut avoir lieu que si le photon possède une énergie minimale, liée au matériau du support. Pour le silicium, cette énergie minimale est de 1,12 eV. Montrer que cette valeur est compatible avec la photographie en lumière visible.

## Partie IV - Le flash

*Pour effectuer des prises de vues en faible luminosité, il est possible d'utiliser un système complémentaire externe qui apporte de la lumière : le flash. Cette idée n'est pas récente puisque dès la fin du XIX<sup>e</sup> siècle les photographes l'utilisaient. On obtenait alors une lumière intense en faisant brûler un ruban de magnésium ; mais ce système n'était guère pratique et parfois même dangereux. La première ampoule flash électrique fut inventée en 1925.*

### IV.1 - Utilisation d'un flash

Le **document 7** indique quelques caractéristiques d'un flash ainsi que ses conditions d'utilisation.

#### Document 7 - Le flash

Un flash donne un éclair d'une puissance connue, en fonction de ses caractéristiques de conception. Pour faire varier l'éclairement (lumière reçue par l'objet), ce n'est pas l'intensité de l'éclair qui varie mais sa durée. Pour obtenir un éclairement moins important (ou un flash moins puissant), la durée de l'éclair du flash est réduite par le flash lui-même et inversement. Par exemple, alors qu'un flash à pleine puissance M1/1 émet un éclair d'une durée de 1/880 s, un flash à puissance réduite M1/8 émet un éclair d'une durée de 1/5 000 s.

La puissance d'un flash est indiquée par son Nombre Guide (NG). Plus ce nombre est important, plus le flash est puissant. Les flashes intégrés sur les Reflex ont généralement un nombre guide d'environ 10-12. Ce nombre guide permet d'estimer la portée du flash, exprimée en mètre :

$$\text{portée} = \frac{\text{NG} \times \text{facteur de sensibilité}}{\text{nombre d'ouverture}}$$

avec les facteurs de sensibilité suivants :

Sensibilité (ISO)	100	200	400	800	1 600
Facteur de sensibilité	1	1,4	2	2,8	4

Source : [www.police-scientifique.com](http://www.police-scientifique.com)

On rappelle que si on note l'ouverture  $f/x$ , alors  $x$  représente le nombre d'ouverture.

**Q17.** Un flash avec un nombre guide de 12 est utilisé pour prendre une photo avec une sensibilité de 400 ISO et une ouverture  $f/11$ . Quelle est la portée de ce flash (ordre de grandeur) ?

**Q18.** Pour expliquer le fait que le flash a une portée limitée, deux interprétations sont proposées :

- 1) la première interprétation serait que la portée du flash est liée à la distance que la lumière parcourt durant l'ouverture de l'obturateur ;
- 2) la seconde est liée au fait que le flux lumineux, issu du flash et reçu par un objet situé à une distance  $d$  du flash, est une fonction décroissante de  $d$ .

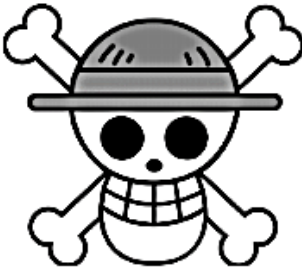
Une de ces deux propositions est correcte et l'autre inexacte. Indiquer la bonne interprétation. Expliquer en quoi l'autre est inexacte en posant des hypothèses raisonnées et en effectuant des calculs d'ordres de grandeurs. Le **document 7** pourra être utilisé pour justifier ou infirmer une des interprétations.

#### IV.2 - Principe de fonctionnement d'un flash

En simplifiant de façon importante, un flash se compose d'une pile (f.e.m. de 9 V) qui charge un condensateur dont la capacité vaut  $C = 200 \mu\text{F}$ . Quand celui-ci est chargé, une diode s'allume, indiquant que le flash est prêt à être utilisé. Lors du déclenchement de l'obturateur, le condensateur se décharge dans un tube contenant du xénon sous faible pression, ce qui provoque l'émission d'un éclair de courte durée.

- Q19.** L'énergie stockée dans le condensateur doit être de l'ordre de 10 J. En déduire la tension  $U_0$  sous laquelle il faut le charger. Commenter cette valeur.
- Q20.** Le condensateur, initialement chargé et présentant une tension  $U_0$  à ses bornes, se décharge dans le tube à xénon qu'on modélise par une résistance  $R = 1 \Omega$ .
- Faire un schéma du circuit électrique dans lequel s'insèrent le condensateur et le tube lors de la décharge. Établir l'équation différentielle que vérifie la tension  $u(t)$  aux bornes du condensateur au cours de sa décharge.
  - Établir l'expression de la puissance  $p(t)$  instantanée reçue par le tube au cours de sa décharge en fonction du temps.
  - Tracer l'allure de la courbe  $p(t)$ .
- Q21.** La durée de l'éclair produit par la décharge du condensateur est de l'ordre de  $1/200$  s. Quelle fraction de l'énergie totale est reçue par le tube pendant cette durée ?

## Problème 2 : One Piece – Gomu no jet pistol



*One Piece* est une série de mangas Shōnen créée par Eiichirō Oda.

L'histoire suit les aventures de Monkey D. Luffy, un garçon dont le corps a acquis les propriétés du *caoutchouc* après avoir mangé par inadvertance un *fruit du démon*.

Avec son équipage de pirates, appelé l'équipage au *Chapeau de paille*, Luffy explore *Grand Line* à la recherche du trésor ultime connu sous le nom de *One Piece* afin de devenir le prochain *roi des pirates*.



Luffy peut étendre ses bras, notamment en emmagasinant l'énergie potentielle élastique et frapper son adversaire. Dans ce problème, on se propose de modéliser un exemple d'extension élastique. On étudie alors une chaîne d'oscillateurs et une onde mécanique.

Un formulaire est placé en fin de ce problème.

### I.1 - Oscillateur harmonique

Soit une molécule diatomique dont les deux atomes ne peuvent se déplacer que sur la direction ( $Ox$ ). En notant  $x$  la distance interatomique, l'énergie potentielle d'interaction s'écrit, selon la relation de Morse :

$$V(x) = V_0 \left[ 1 - e^{-a(x-x_0)} \right]^2$$

avec  $V_0$ ,  $a$  et  $x_0$  des constantes réelles positives.

**Q1.** Déterminer la distance interatomique d'équilibre, appelée longueur de liaison à l'équilibre  $x_{\text{éq}}$ .

On s'intéresse aux petits mouvements autour de la position d'équilibre :  $x = x_{\text{éq}} + \varepsilon$ , avec  $|\varepsilon| \ll x_{\text{éq}}$ .

**Q2.** En développant l'énergie potentielle  $V(x)$  au second ordre en  $\varepsilon$ , montrer que la force d'interaction résultante est équivalente à celle d'un ressort de constante de raideur  $k$  dont on donnera l'expression en fonction de  $V_0$  et de  $a$ .

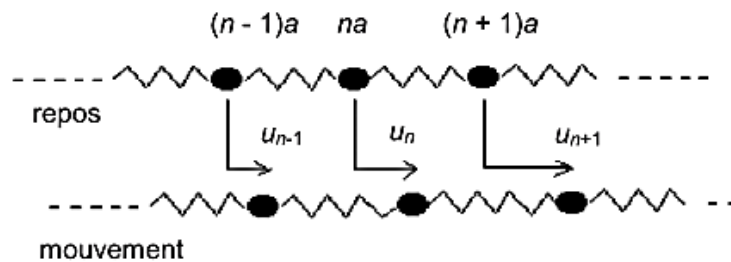
- Q3.** Si on appliquait cette force à une particule de masse  $m$  et de position  $\varepsilon(t)$ , quelle serait la pulsation des oscillations  $\omega_0$  de celle-ci ? Représenter la vibration au cours du temps  $t \rightarrow \varepsilon(t)$  pour des conditions initiales données :  $\varepsilon(0) = \beta$  et  $\dot{\varepsilon}(0) = 0$ .
- Q4.** Donner, sur le même graphique, l'allure des courbes représentatives de l'énergie potentielle de Morse et de l'énergie potentielle harmonique approchée en fonction de la distance interatomique.

## I.2 - Chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques

On considère une chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques identiques, de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ . Les masses sont toutes égales et désignées par des indices entiers successifs  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $m$  cette masse des masselottes entre les ressorts,  $\vec{r}_n(t) = x_n(t)\vec{u}_x$  le vecteur position de la  $n^{\text{ième}}$  masse et  $u_n(t)$  son déplacement par rapport à sa position d'équilibre. Le référentiel est supposé galiléen. On ne prend en compte que les interactions harmoniques entre les masses.

Initialement, à  $t = 0$ , la chaîne est au repos. La distance entre deux atomes successifs à l'équilibre  $a$  (figure 1) est égale à la longueur à vide,  $\ell_0 = a$ .

On prend comme origine sur l'axe la position repérée par  $n = 0$  à  $t = 0$ .



**Figure 1** - Chaîne d'oscillateurs identiques

- Q5.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , écrire la position initiale de la  $n^{\text{ième}}$  masse ( $x_n(0)$ ) en fonction de  $n$  et de  $a$ . En déduire son écart  $u_n(t)$  par rapport à sa position d'équilibre en fonction de  $x_n(t)$ ,  $n$  et de  $a$ .
- Q6.** Établir que l'équation du mouvement de la  $n^{\text{ième}}$  masse, se met sous la forme :  $\ddot{u}_n = \omega_0^2 [u_{n+1} + u_{n-1} - \alpha u_n]$  avec  $\alpha$ , constante réelle à déterminer.

On s'intéresse à la propagation d'ondes mécaniques dans cette chaîne. On cherche à savoir s'il existe un réel  $q$  strictement positif tel que, en notation complexe, on puisse écrire :

$$\underline{u}_n(t) = U_0 \exp(i(\omega t - qna)) \text{ avec } i^2 = -1, \omega \text{ et } U_0 \text{ strictement positifs.}$$

- Q7.** Cette onde est-elle harmonique ? Que représentent  $U_0$  et  $\omega$  ?

Cette onde présente une périodicité spatiale s'il existe une  $p^{\text{ième}}$  masse (avec  $p > n$ ) telle que :  $\underline{u}_p(t) = \underline{u}_n(t)$ . On définit la longueur d'onde comme la plus petite distance séparant deux telles masses au repos.

Q8. Établir l'expression de la longueur d'onde  $\lambda$  en fonction de  $a$ . Que représente finalement  $q$  ?

Q9. Montrer que la relation de dispersion, reliant  $\omega$  et  $q$ , est  $\omega^2 = 4\omega_0^2 \left( \sin \frac{qa}{2} \right)^2$ .

Représenter graphiquement la fonction :  $[q \mapsto \omega(q)]$  en se restreignant à l'intervalle  $\left[ 0, \frac{2\pi}{a} \right]$ .

Q10. Rappeler les définitions et les significations de la vitesse de groupe  $v_g$  et de la vitesse de phase  $v_\phi$ . Comment lit-on ces vitesses sur le graphe de la question Q9 ?

Q11. La chaîne est-elle dispersive ? Quelle condition doit satisfaire  $\omega$  pour que  $q$  existe ? Préciser la nature du filtre que constitue la chaîne d'oscillateurs vis-à-vis de ces ondes.

Q12. Déterminer  $v_g$  et  $v_\phi$  pour  $q \ll \frac{\pi}{a}$  et pour  $q = \frac{\pi}{a}$ . On précisera la nature de l'onde dans les deux cas.

*Le fluide (ou haki en VO) est un pouvoir mystérieux du manga, qui permet à son possesseur d'utiliser sa propre énergie spirituelle à des fins diverses, notamment pour renforcer sa peau et la rendre aussi dure qu'un diamant.*

### I.3 - Solide cristallin

On considère ici un cristal parfait, c'est-à-dire un assemblage spatial triplement périodique d'un très grand nombre d'atomes.

Hypothèses du modèle :

- tous les défauts du cristal réel sont négligés ;
- l'agitation thermique n'est qu'une vibration autour d'une position moyenne des atomes qui sera prise comme position d'équilibre ;
- les vibrations d'origine thermique sont décomposables en ondes planes ;
- seules les interactions entre plus proches voisins dans une maille cristalline cubique simple sont considérées : les trois dimensions de l'espace sont découplées et l'étude sera faite sur l'une d'elles selon le modèle d'un cristal à une dimension ;
- l'énergie potentielle de liaisons entre deux atomes de masse  $m$ , distants de  $x$ , sera modélisée par le potentiel de Lennard-Jones :

$$V(x) = \frac{A}{x^{12}} - \frac{B}{x^6}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}_+^{*2}.$$

~~Q13. À quelles interactions correspondent les deux termes du potentiel de Lennard-Jones ?~~

Q14. En notant  $a$ , la distance entre deux atomes à l'équilibre, montrer que  $V$  se met sous la forme :

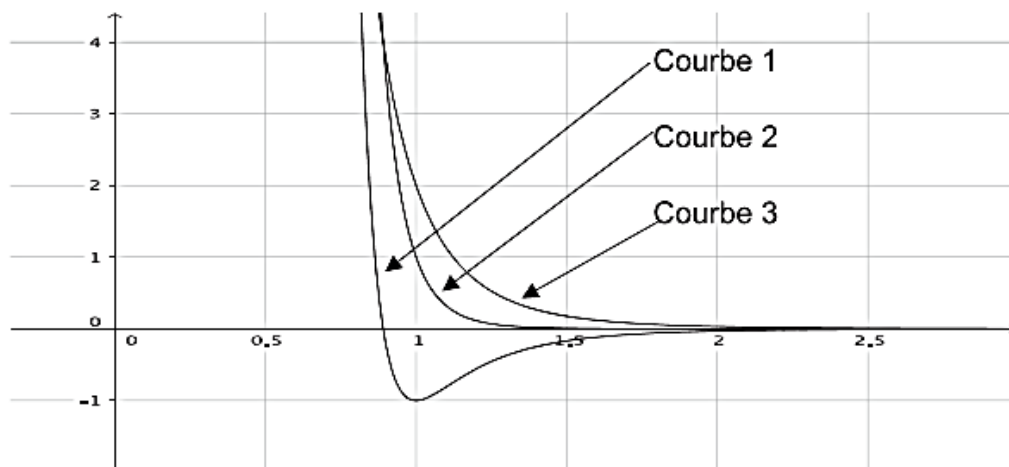
$$V(x) = \Theta_0 \left[ \left( \frac{a}{x} \right)^{12} - 2 \left( \frac{a}{x} \right)^6 \right], \quad \text{où la profondeur du puits de potentiel } \Theta_0 \text{ est à exprimer en}$$

fonction de  $B$  et de  $a$ .

**Q15.** Sur le graphique ci-après, ont été représentées les courbes :

$$\left[ \frac{x}{a} \mapsto \frac{V(x)}{\Theta_0} \right], \left[ \frac{x}{a} \mapsto \left( \frac{a}{x} \right)^{12} \right] \text{ et } \left[ \frac{x}{a} \mapsto 2 \left( \frac{a}{x} \right)^6 \right].$$

Identifier ces courbes.



**Q16.** Montrer que, tant que l'amplitude des oscillations reste négligeable devant  $a$ , la liaison entre deux atomes est modélisable par un ressort de constante de raideur  $k$  que l'on exprimera en fonction de  $\Theta_0$  et de  $a$ . On pourra développer le potentiel au second ordre grâce à la formule de Taylor.

**Q17.** Calculer  $k$  et  $\omega_0$  pour  $a = 2,0 \cdot 10^{-10}$  m,  $\Theta_0 = 0,10$  eV et  $m = 1,0 \cdot 10^{-25}$  kg.

Cette modélisation du solide cristallin permet de décrire la propagation d'ondes mécaniques longitudinales dans les solides et on s'intéresse ici aux aspects énergétiques. On suppose que le mouvement des masses correspond au passage d'une onde plane harmonique de pulsation  $\omega$  dont la formule est indiquée entre les questions **Q6** et **Q7**.

**Q18.** Exprimer la valeur moyenne temporelle de l'énergie cinétique  $\langle E_c \rangle$  d'un atome indicé par  $n$  en fonction de  $m$ ,  $U_0$  et  $\omega$ . En déduire l'énergie cinétique moyenne pour  $N$  atomes.

**Q19.** Justifier que l'énergie potentielle moyenne  $\langle E_p \rangle$  du  $n^{\text{ième}}$  atome se met sous la forme :

$$\langle E_p \rangle = \frac{k}{4} \left( |u_{n+1} - u_n|^2 - |u_{n-1} - u_n|^2 \right).$$

**Q20.** Grâce à la forme de l'onde et à la formule de dispersion obtenue précédemment, exprimer  $\langle E_p \rangle$  en fonction de  $m$ ,  $U_0$  et de  $\omega$ .



## I. 4 - Du discret au continu

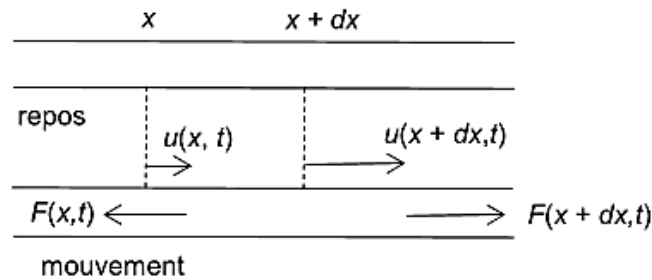


Figure 2 - Passage au continu

**Q22.** À partir de la relation de dispersion, exprimer la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde qui se propage en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_0$  et de  $a$ .

Calculer  $\lambda$  pour des fréquences ultrasonores ( $f = 500$  kHz). Commenter.

**Q23.** La comparaison de la longueur d'onde au paramètre  $a$  permet d'écrire  $u_n(t) = u(x, t)$

(figure 2) et d'obtenir une équation de D'Alembert de la forme  $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{k}{m} a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ .

Calculer la célérité de l'onde dans le cristal pour des fréquences ultrasonores.

*Grâce à ce corps élastique, malléable, Luffy peut étirer son bras loin derrière lui et le ramener brutalement en avant, frappant son adversaire ; l'énergie élastique emmagasinée est alors relâchée à l'impact...*

## Formulaire

### Développement de Taylor

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ ,  $\forall h \in \mathbb{R}, (x_0 + h) \in I$ ,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x_0} + \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x=x_0} + \dots + \frac{h^n}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_0} + o(h^n)$$

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} \left. \frac{d^k f}{dx^k} \right|_{x=x_0} + o(h^n).$$

### Trigonométrie

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1$$

## Problème 3 : Le stockage de l'électricité

### Partie I – Définition du cahier des charges

On estime à 20 kW la puissance nécessaire pour faire rouler une voiture sur route plate par vent nul. On souhaite comparer différents moyens permettant d'utiliser cette voiture pendant une heure.

Voici quelques données techniques :

- énergie massique du carburant sans plomb 98 :  $W_1 = 12,3 \text{ kW.h.kg}^{-1}$  ;
- constante des gaz parfaits  $R = 8,3 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$  ;
- pression ambiante :  $P_0 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$  ;
- température ambiante :  $\theta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$  ;
- masse molaire de l'hydrogène H :  $M_H = 1,0 \text{ g.mol}^{-1}$ .

**Q28.** Calculer l'énergie nécessaire pour assurer ce trajet d'une heure en watt.heures (W.h) puis en joules.

**Q29.** Calculer la masse  $m_1$  de carburant sans plomb 98 nécessaire.

En menant le même raisonnement, on peut prouver qu'il faudrait installer une batterie lithium-ion pesant  $m_2 = 160 \text{ kg}$  ou stocker  $m_3 = 0,600 \text{ kg}$  de dihydrogène pour alimenter une pile à combustible.

**Q30.** Le dihydrogène étant considéré comme un gaz parfait, quel volume occuperait une telle quantité de dihydrogène s'il était stocké à pression et température ambiantes ?

**Q31.** Dans le but d'assurer l'autonomie des voitures dans un avenir proche :

- à quelle condition peut-on envisager de remplacer les carburants fossiles par des batteries ?
- à quelle condition peut-on envisager de remplacer les carburants fossiles par des piles à combustible ?

### Partie II – Problématique du stockage

Pour pallier le problème identifié en partie I, des études s'intéressent à l'acide méthanoïque comme carburant potentiel pour des piles à combustible. L'acide méthanoïque de formule  $\text{HCOOH}$  est naturellement sécrété par des fourmis, d'où son nom usuel d'acide formique.

On donne les masses molaires  $M$ , les numéros atomiques  $Z$  et les nombres de masse  $A$  des atomes suivants :

- Pour l'hydrogène H :  $M_H = 1,0 \text{ g.mol}^{-1}$ ,  $Z_H = 1$ ,  $A_H = 1$  ;
- Pour l'oxygène O :  $M_O = 16,0 \text{ g.mol}^{-1}$ ,  $Z_O = 8$ ,  $A_O = 16$  ;
- Pour le carbone C :  $M_C = 12,0 \text{ g.mol}^{-1}$ ,  $Z_C = 6$ ,  $A_C = 12$ .

Pour une solution aqueuse d'acide formique de concentration initiale  $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ , la mesure du  $pH$  à l'équilibre donne  $pH = 2,9$ .

**Q33.** D'après ces données, l'acide formique est-il un acide fort ou un acide faible ? Justifier précisément votre réponse.

Dans la suite de cette partie, le candidat pourra se référer au **document 4**, d'après le communiqué de presse de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL) du 30 novembre 2010.

#### **Document 4 – De l'acide formique au dihydrogène**

Le dihydrogène est souvent désigné comme le futur remplaçant des carburants fossiles. Il est facilement produit à partir d'énergie électrique. Écologique et performant, il n'en présente pas moins de nombreux inconvénients. Extrêmement inflammable, il doit être stocké dans d'encombrantes bouteilles pressurisées, autant d'obstacles à son utilisation, que les scientifiques de l'EPFL et leurs confrères du Leibniz-Institut für Katalyse ont levés, en stockant le dihydrogène sous la forme d'acide formique. Grâce à un catalyseur et au  $CO_2$  présent dans l'atmosphère, les scientifiques ont transformé le dihydrogène en acide formique.

Plutôt qu'une lourde bouteille de fonte remplie de dihydrogène sous pression, ils obtiennent ainsi une substance très peu inflammable et liquide à température ambiante. Une solution pour accumuler l'énergie des sources renouvelables comme le solaire ou l'éolien, ou alimenter la voiture de demain.

En novembre 2010, seconde étape. Les laboratoires sont parvenus à provoquer le phénomène inverse : par le biais d'une catalyse, l'acide formique retourne de manière totale à l'état de  $CO_2$  et de dihydrogène, lequel peut ensuite être transformé en énergie électrique. Un prototype fonctionnel, peu encombrant et d'une puissance de deux kilowatts est d'ores et déjà au point. [...] Autre avantage par rapport au stockage conventionnel, le procédé permet de stocker presque le double d'énergie à volume égal. En effet, un litre d'acide formique peut libérer par une transformation chimique plus de 53 grammes de dihydrogène contre à peine 28 grammes pour un même volume de dihydrogène pur pressurisé à 350 bars.

On donne :

- densité de l'acide formique par rapport à l'eau :  $d = 1,22$  ;
- masse volumique de l'eau liquide :  $\mu_{eau} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ .

**Q34.** Donner deux avantages que revêt l'utilisation de l'acide formique en tant que combustible plutôt que le dihydrogène.

**Q35.** Établir l'équation chimique permettant de créer du dihydrogène à partir de l'acide formique.

**Q36.** En déduire que l'affirmation du texte « un litre d'acide formique peut libérer par une transformation chimique plus de 53 grammes de dihydrogène » est vérifiée.

**Q37.** Le projet de recherche envisage de réduire dans un premier temps le dioxyde de carbone en acide formique grâce à l'énergie électrique fournie par des panneaux solaires, puis dans un second temps d'utiliser une pile à combustible à acide formique pour obtenir de l'électricité. Commenter l'intérêt de chacune de ces deux opérations.

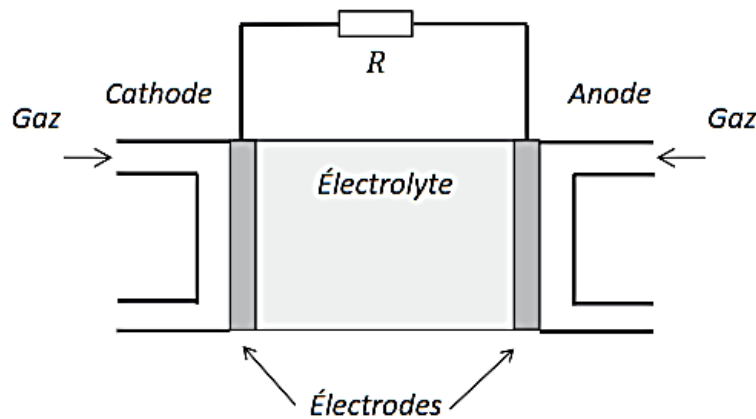
## Partie IV – Pile à combustible

Le dihydrogène peut être utilisé en tant que combustible dans une pile à hydrogène selon une réaction d'oxydo-réduction. Les deux réactifs sont le dihydrogène et le dioxygène présent dans l'air. Les couples d'oxydo-réduction mis en jeu sont ceux de l'eau :  $O_{2(g)}/H_2O_{(l)}$  et  $H_{(aq)}^+/H_{2(g)}$  (ou  $H_3O_{(aq)}^+/H_{2(g)}$ ). Pour mettre en œuvre cette réaction, on dispose de deux électrodes, l'anode et la cathode, séparées par un électrolyte. La réaction est favorisée par la présence d'un catalyseur dont on ne mentionnera plus la présence par la suite. La pile débite dans une charge résistive modélisée par une résistance  $R$ .

**Q42.** Écrire les demi-équations électroniques relatives au fonctionnement de la pile.

**Q43.** En déduire l'équation de la réaction ayant lieu lorsque la pile débite.

**Q44.** Recopier et compléter le schéma de la pile à hydrogène présenté en **figure 3** en repérant les espèces en présence à l'anode et à la cathode. Indiquer le sens conventionnel du courant électrique  $I$  et le sens de circulation des porteurs de charges. Indiquer les polarités des électrodes.



**Figure 3** – Pile à combustible débitant sur une résistance  $R$

**Q45.** Quelle est l'utilité de l'électrolyte ?

On estime à 500 moles la quantité de matière de dihydrogène nécessaire pour faire rouler une voiture sur une distance de 100 kilomètres.

**Q46.** Quelle est la quantité de matière de porteurs de charge  $n_e$  nécessaire pour parcourir 100 kilomètres ?

**Q47.** Quelle est la charge électrique  $Q$  libérée par ces porteurs de charge ? On donne le nombre de Faraday  $\mathcal{F} = 96\,500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

**Q48.** En réalité, la pile à hydrogène est constituée de 256 cellules câblées en série, délivrant une tension de 0,7 V chacune. Elle développe par ailleurs une puissance totale de 20 kW. Déterminer le temps nécessaire pour parcourir la distance désirée de 100 kilomètres. Votre démarche sera clairement exposée.

**Q49.** Calculer la vitesse en km/h du véhicule équipé d'une telle pile à hydrogène. Conclure sur les améliorations à apporter à ce projet pour voir les voitures rouler à l'acide formique.



#### Problème 4 : Résolution interférométrique d'un doublet spectral

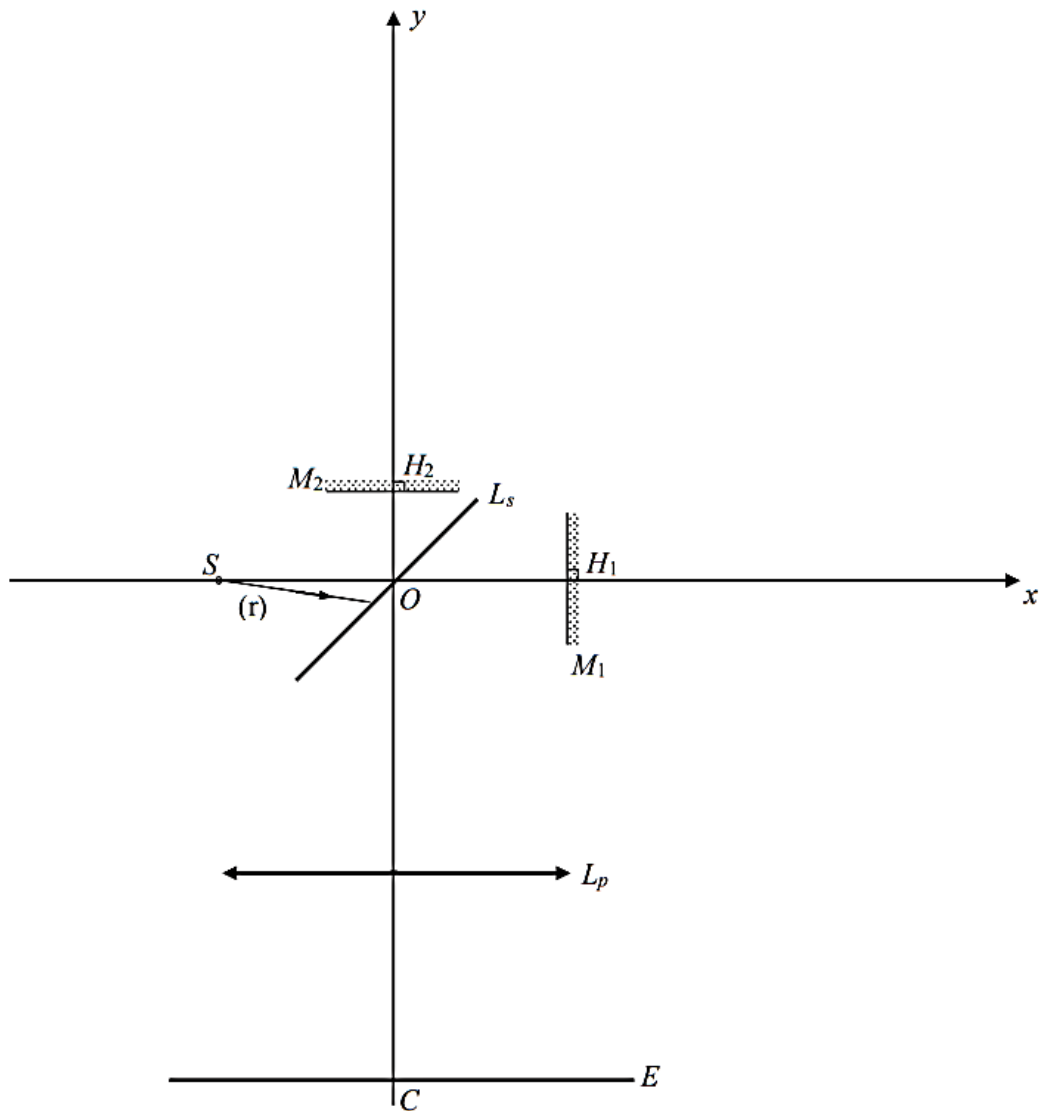
Les moyens spectroscopiques conventionnels (spectroscopie à prisme ou à réseau) peuvent se révéler insuffisants quand il s'agit de résoudre un doublet à très faible écart spectral. On peut alors avoir recours à des méthodes interférométriques. Il est question dans cette partie de l'utilisation de l'interféromètre de Michelson.

Le schéma 1 de principe d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air est donné page 16. On note  $Ox$  et  $Oy$  deux axes perpendiculaires définissant les directions des deux bras de l'interféromètre.  $S$  est une source lumineuse ponctuelle située sur  $Ox$ .  $M_1$  et  $M_2$  sont deux miroirs plans parfaitement réfléchissants, disposés perpendiculairement à  $Ox$  en  $H_1$  et respectivement à  $Oy$  en  $H_2$ . Le trait incliné à  $45^\circ$ , noté  $L_s$ , schématise un groupe de deux lames semi-réfléchissantes à faces parallèles. Ce groupe est supposé n'introduire aucune différence de marche sur les trajets lumineux.  $L_p$  désigne une lentille mince convergente placée à la sortie de l'interféromètre de manière à ce que son axe optique soit confondu avec l'axe  $Oy$ . Un écran  $E$  est placé dans le plan focal image de  $L_p$ . On note  $C$  le foyer image de  $L_p$ .

- Q1.** Nommer les lames qui composent  $L_s$ . Qu'est-ce qui les distingue ? Expliquer la nécessité pratique d'utiliser deux lames.
- Q2.** Un rayon lumineux, noté  $(r)$ , émis par  $S$ , a été représenté. Reproduire le schéma ci-dessous sur la copie avec  $SO = OH_1 = 2 OH_2$  et le compléter en faisant un tracé soigné des deux rayons  $(r_1)$  et  $(r_2)$  qui émergent de l'interféromètre après division de  $(r)$ . On laissera apparent tout élément de construction (traits, prolongements de rayons, points remarquables, etc.) justifiant d'un tracé raisonné sans utilisation d'aucun rapporteur d'angle. Tout élément explicatif (noms, positions des points, constructions réalisées...) sera également mentionné.

Sur ce même schéma positionner le miroir fictif  $M'_1$  justifiant de la dénomination « lame d'air » en faisant apparaître le point  $Q_1$  intersection de  $M'_1$  avec les deux prolongements fictifs ad hoc de  $(r_1)$  et de  $(r_2)$ .

Enfin, terminer le tracé des rayons  $(r_1)$  et  $(r_2)$  après la lentille  $L_p$  jusqu'à l'écran  $E$  (on demande comme ci-dessus un tracé raisonné).



**Schéma 1 – Interféromètre de Michelson**

- Q3.** Indiquer quelle est la forme des franges d'interférences observées sur l'écran (aucune justification n'est demandée). Comment nomme-t-on ces franges ?
- Q4.** En appelant  $e$  l'épaisseur de la lame d'air et en prenant l'indice optique de l'air égal à 1, exprimer la différence de marche  $\delta$  au centre  $C$  de l'écran.
- Q5.** On étudie le cas où la source de lumière utilisée présente un doublet spectral de nombres d'ondes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Donner l'expression des ordres d'interférence  $p_1$  et  $p_2$  en  $C$  pour chaque radiation du doublet en fonction de  $\delta$ ,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .
- Q6.** Pour quelles valeurs de la différence  $p_1 - p_2$  y-a-t-il brouillage en  $C$  ?  
En pratique la totalité de la figure d'interférences est affectée et on perd la visibilité des franges partout sur l'écran. En déduire, en fonction de l'écart spectral  $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ , la variation  $D_\delta$  de la différence de marche entre deux situations consécutives de brouillage. Comment nomme-t-on ces situations ?

Application numérique : dans le cas du doublet  $H_\alpha$  (écart spectral  $\Delta\sigma_{\text{exp}} = 0,360 \text{ cm}^{-1}$ ), calculer la variation  $D_e$  de l'épaisseur de la lame d'air pour passer d'une situation de brouillage à la situation de brouillage directement consécutive.

**-- FIN DE L'ENONCE --**