

TDT5 – Eléments de thermodynamique statistique

Capacités exigibles	ChT5	Ex 1,5,7	Ex 2,8	Ex 3	Ex 4, 6
<p>Facteur de Boltzmann Modèle de l'atmosphère isotherme. Établir la variation de la pression avec l'altitude dans l'hypothèse d'une atmosphère isotherme. Poids de Boltzmann d'une particule indépendante à l'équilibre avec un thermostat. Interpréter la loi du nivellement barométrique avec le poids de Boltzmann. Identifier un facteur de Boltzmann. Comparer $k_B T$ à des écarts d'énergie et estimer les conséquences d'une variation de température.</p>	•	•		•	
<p>Systèmes à spectre discret d'énergies Probabilité d'occupation d'un état d'énergie non dégénéré par une particule indépendante. Exprimer la probabilité d'occupation d'un état d'énergie en utilisant la condition de normalisation. Exploiter un rapport de probabilités entre deux états. Énergie moyenne et écart quadratique moyen. Exprimer sous forme d'une somme sur ses états l'énergie moyenne et l'écart-quadratique énergétique d'un système. Cas d'un système à N particules indépendantes. Expliquer pourquoi les fluctuations relatives d'énergie régressent quand la taille du système augmente et associer cette régression au caractère quasi-certain des grandeurs thermodynamiques. Système à deux niveaux non dégénérés d'énergies $\pm \epsilon$. Citer des exemples de systèmes modélisables par un système à deux niveaux. Déterminer l'énergie moyenne et la capacité thermique de ce système. Interpréter l'évolution de l'énergie moyenne avec la température, notamment les limites basse et haute température. Relier les fluctuations d'énergies à la capacité thermique. Énergie moyenne d'équilibre à la température T d'un ensemble de N particules dans un puits de potentiel infini. Déterminer l'énergie moyenne d'un ensemble de particules à une température donnée, dans la limite où l'énergie de confinement est faible devant l'énergie d'agitation thermique. Relier l'expression de l'énergie moyenne en fonction de la température au théorème de l'équipartition de l'énergie.</p>	•		•	•	•
<p>Capacités thermiques classiques des gaz et des solides Théorème d'équipartition pour un degré de liberté énergétique indépendant quadratique. Connaître et exploiter la contribution $k_B T/2$ par degré quadratique à l'énergie moyenne. Capacité thermique molaire des gaz classiques dilués monoatomiques et diatomiques. Capacité thermique molaire des solides dans le modèle d'Einstein classique : loi de Dulong et Petit. Dénombrer de degrés de libertés énergétiques quadratiques indépendants et en déduire la capacité thermique molaire d'un système.</p>	•				•

0 Exercices classiques vus en cours :

- A.1 : Evaluation du nombre de particules dans un échantillon de matière macroscopique / mésoscopique
- B.1.a : Etablir la relation fondamentale de la statique des fluides
- B.1.b : Etablir l'expression de la pression en fonction de l'altitude au sein de l'atmosphère isotherme
- B.2.b : Comparer $k_B T$ à un écart d'énergie Δ et conséquence sur les probabilités des états E et $E + \Delta$
- C.2.c : Equivalence entre les deux expressions de l'écart quadratique moyen (= variance)
- C.2.c : Etablir l'expression des fluctuations relatives de l'énergie d'un système de N particules
- C.3 : Système à 2 niveaux → populations, énergie moyenne, capacité thermique et fluctuations d'énergie
- C.4 : Système de particules dans un puits de potentiel infini 1D → fonction de partition, énergie moyenne
- D.1 : Conséquence du théorème de l'équipartition de l'énergie sur $C_{V,m}$
- D.2-3 : Nombre de ddl énergétiques quadratiques indépendants pour déterminer $C_{V,m}$ d'un GP ou d'un solide

1 Statique des fluides incompressibles – Loi de l'hydrostatique

On étudie un fluide macroscopiquement au repos dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen. On note (Oz) l'axe vertical ascendant.

Le fluide est à l'état d'équilibre thermodynamique local.

Le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ est supposé uniforme.

- 1) Etablir la relation fondamentale de la statique des fluides.
- 2) On considère que l'eau liquide est un fluide incompressible i.e. son volume est indépendant de la pression. En supposant que l'eau de mer est un fluide homogène et incompressible, justifier l'affirmation suivante : Sous l'eau, la pression augmente d'environ 1 bar tous les 10 m de profondeur.

2 Fonction de partition – Energie moyenne et fluctuations d'énergie

On considère, au sein d'un système thermodynamique en équilibre à la température T , une particule indépendante pouvant exister dans les niveaux d'énergie $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$. On pose

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \text{ et } Z = \sum_i \exp(-\beta E_i).$$

1. Montrer que la valeur moyenne de l'énergie ε de la particule est : $\langle \varepsilon \rangle = -\frac{d \ln Z}{d\beta}$.
2. Montrer que : $\frac{d \langle \varepsilon \rangle}{d\beta} = \langle \varepsilon \rangle^2 - \langle \varepsilon^2 \rangle$.
3. Vérifier que : $\frac{d \langle \varepsilon \rangle}{d\beta} = -k_B T^2 \frac{d \langle \varepsilon \rangle}{dT}$.
4. On suppose que $\langle \varepsilon \rangle = \alpha k_B T$ où α est un nombre de l'ordre de l'unité et qui varie très peu sur le domaine de température considéré. Montrer que $\sigma(\varepsilon)$, écart type de l'énergie d'une particule, est du même ordre de grandeur que $\langle \varepsilon \rangle$.

3 Système avec état dégénéré

On considère une population de N molécules de dihydrogène H_2 indépendantes, à l'équilibre avec un thermostat à la température T . On considère que $N \gg 1$. Ces molécules possèdent deux niveaux d'énergie : l'état 1 d'énergie ε_1 non dégénéré et l'état 2 d'énergie $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. L'état 2 possède une dégénérescence $g_2 = 3$.

1. Exprimer les nombres moyens N_1 et N_2 de molécules qui occupent respectivement l'état 1 et l'état 2 en fonction de N , ε_1 , ε , k_B et T .
2. Donner l'expression de l'énergie E du système. Quelles sont les limites de cette énergie à haute et à basse température ?
3. Déterminer la capacité thermique. Discuter les cas des hautes températures et celui des basses températures.

4 ✎ Distribution des vitesses dans un gaz parfait unidimensionnel (d'après CCINP MP 2019)

→ Distribution continue de probabilité

Le gaz atomique (vapeur de mercure Hg) contenu dans l'ampoule est un gaz supposé parfait formé de N atomes de mercure de masse individuelle m^* , indépendants, ne pouvant se déplacer que le long de l'axe (Ox) . Ils sont confinés dans un puits de potentiel infini limité par les plans d'abscisses $x=0$ et $x=L$. On prendra l'origine des énergies potentielles $V=0$ à l'intérieur du puits (pour $0 < x < L$). L'énergie potentielle est donc infinie à l'extérieur du puits (pour $x \leq 0$ et $x \geq L$).

La température du gaz dans l'enceinte est notée T_{gaz} .

Données numériques

- Température du gaz dans la lampe : $T_{gaz} = 1000 K$
- Largeur de l'enceinte : $L = 10 cm$

Fonction d'onde d'un atome dans un état stationnaire

On recherche les fonctions d'onde associées aux états stationnaires d'énergie \mathcal{E} des atomes confinés

dans un puits infini de largeur L , sous la forme $\psi(x,t) = \varphi(x) e^{-i \frac{\mathcal{E}t}{\hbar}}$.

Q39. Le spectre énergétique (ensemble des états énergétiques accessibles) d'un atome est-il continu ou discret ? Donner un ordre de grandeur de la masse m^* d'un atome de mercure Hg .

Q40. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $\varphi(x)$ pour $x \in]0, L[$. Écrire sans démonstration les conditions aux limites $\varphi(x=0)$ et $\varphi(x=L)$. On rappelle que la fonction d'onde est continue.

Q41. En déduire l'expression des niveaux d'énergie des atomes dans le puits sous la forme $\mathcal{E}_n = n^2 \times \mathcal{E}_1$ où n est un entier supérieur ou égal à 1 et où on exprimera \mathcal{E}_1 en fonction de \hbar , m^* et L . Évaluer numériquement \mathcal{E}_1 .

Énergie moyenne d'un atome

Q42. Évaluer l'ordre de grandeur du nombre quantique n_1 tel que $\mathcal{E}_{n_1} = k_B T_{gaz}$. Évaluer l'ordre de

grandeur du rapport $\frac{\mathcal{E}_{n_1+1} - \mathcal{E}_{n_1}}{\mathcal{E}_{n_1}}$. En déduire que le spectre des énergies accessibles à un atome

dans l'enceinte de la lampe peut être considéré approximativement continu pour les énergies dans le cadre de notre étude.

On se place dans le cadre de cette approximation.

Q43. Donner la relation $n(\mathcal{E})$ donnant l'expression du nombre quantique n en fonction de l'énergie \mathcal{E} de l'atome et de l'énergie de l'état fondamental \mathcal{E}_1 .

Q44. Exprimer dn le nombre d'états quantiques différents d'énergie comprise entre \mathcal{E} et $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$. On écrira le résultat sous la forme $dn = \rho(\mathcal{E}) \cdot d\mathcal{E}$ où $\rho(\mathcal{E})$ est appelé densité des niveaux d'énergie.

On suppose que la distribution des vitesses des atomes est régie par la statistique de Boltzmann.

Q45. Exprimer, à un facteur multiplicatif près, la probabilité pour un atome d'être dans un état d'énergie \mathcal{E} .

Q46. Exprimer la probabilité $d\mathcal{P}(\mathcal{E})$ pour un atome d'avoir une énergie comprise dans l'intervalle $[\mathcal{E}; \mathcal{E} + d\mathcal{E}]$ en fonction de dn et de la probabilité écrite au-dessus. Exprimer, à une constante multiplicative près, la densité de probabilité $f(\mathcal{E})$ définie par $d\mathcal{P}(\mathcal{E}) = f(\mathcal{E}) \cdot d\mathcal{E}$.

Q47. Quelle est la signification de la relation $\int_{\mathcal{E}=0}^{+\infty} d\mathcal{P}(\mathcal{E}) = 1$? À partir de cette relation, exprimer complètement $f(\mathcal{E})$ en fonction de \mathcal{E} et de $\beta = \frac{1}{k_B T_{gaz}}$.

Q48. Établir l'expression de la valeur moyenne de l'énergie $\langle \mathcal{E} \rangle$. Énoncer le théorème dont le résultat précédent n'est qu'un cas particulier. Exprimer la vitesse quadratique moyenne $u = \sqrt{\langle V_x^2 \rangle}$. Évaluer l'ordre de grandeur de u dans les conditions du problème.

Données

- Masse d'un électron : $m_e \approx 10^{-30} \text{ kg}$
- Constante de Planck réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Équation de Schrödinger indépendante du temps vérifiée par $\varphi(x)$ associée à un quanton dans un état stationnaire d'énergie \mathcal{E} , de fonction d'onde $\psi(x, t) = \varphi(x) \cdot e^{-i\frac{\mathcal{E}t}{\hbar}}$, soumis à l'énergie potentielle $V(x)$: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + V(x) \cdot \varphi(x) = \mathcal{E} \cdot \varphi(x)$
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \approx 1 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- Masse molaire du Mercure Hg : $M_{Hg} = 200,6 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \approx 2 \cdot 10^2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Valeurs de certaines intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi} \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad ; \quad \int_0^{+\infty} x \sqrt{x} e^{-x} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

5 Enrichissement de l'Uranium par centrifugation (d'après CCS MP 2016)

Certains noyaux sont susceptibles de fissionner sous l'effet d'un bombardement de neutrons « lents » (vitesse de $2,2 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$) : on parle alors de noyaux fissiles. Le seul isotope fissile naturel est l'uranium-235. Dans les réacteurs REP, on privilégie cette fission par neutrons lents. Or l'uranium est un mélange naturel de deux isotopes principaux : l'uranium-238 (99,28%) et l'uranium-235 (0,714%). On améliore alors le rendement de la réaction de fission en enrichissant l'uranium naturel avec de l'uranium-235.

Une fois extrait du sol, le minerai d'uranium est transformé chimiquement en hexafluorure d'uranium UF_6 . Dans le procédé d'enrichissement par centrifugation, l'hexafluorure d'uranium est chauffé pour être transformé en vapeur, puis le gaz passe par une série de centrifugeuses qui vont l'enrichir en ^{235}U jusqu'à la teneur souhaitée (de 3 à 5%). Ensuite refroidi et solidifié, l'hexafluorure d'uranium sera transformé en combustible nucléaire prêt à l'emploi, sous forme de pastilles.

Une centrifugeuse est constituée d'un cylindre de rayon $R = 10 \text{ cm}$ et de hauteur $h = 5 \text{ cm}$, tournant autour d'un axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire constante $\omega = 50\,000 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$. Le gaz d'hexafluorure d'uranium UF_6 est introduit dans le cylindre. Les molécules $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$ de masses différentes se répartissent alors différemment et il est possible de déterminer la distribution spatiale des molécules dans la centrifugeuse.

On note \mathcal{R}_0 un référentiel lié au laboratoire, d'axe vertical (Oz). On suppose que \mathcal{R}_0 est galiléen. On considère, dans un premier temps, que le cylindre est rempli d'un gaz, supposé parfait, constitué de molécules identiques de masse m . L'ensemble est à la température $T = 353 \text{ K}$.

Soit un volume élémentaire de gaz $d^3\tau$ autour d'un point M situé à la distance r de l'axe (Oz) de la centrifugeuse. On note $P(M) = P(r)$ le champ de pression dans le gaz, $\rho(r)$ la masse volumique du gaz et $n^*(r)$ sa densité particulaire.

I.B.1) Soit \mathcal{R}_1 le référentiel lié au cylindre en rotation. Est-il galiléen ? Pourquoi ?

I.B.2) Faire un bilan des forces exercées sur la particule de fluide en équilibre dans le référentiel \mathcal{R}_1 . On exprimera la résultante élémentaire des forces de pression sous la forme de son équivalent volumique (sans démonstration).

I.B.3) Évaluer numériquement l'accélération d'entraînement subie par la particule de fluide en rotation. Justifier que, par la suite, on néglige le poids dans le bilan des forces.

I.B.4) Dédurre de la condition d'équilibre relatif de la particule de fluide la répartition $n^*(r)$ des molécules dans le cylindre. On notera $n^*(0)$ la densité particulaire sur l'axe de rotation et on donnera l'expression de $n^*(r)$ en fonction de $n^*(0)$, m , T , k_B , r et ω .

I.B.5) Montrer que la répartition $n^*(r)$ ainsi trouvée obéit à une statistique de Maxwell-Boltzmann, avec une énergie potentielle E_p dont dérive la force d'inertie d'entraînement.

I.B.6) On donne, en figure 4, l'allure des densités particulaires $n_1^*(r)$ et $n_2^*(r)$ des molécules $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$ en fonction de r . En déduire le principe de base de l'enrichissement de l'uranium : on explicitera le protocole qui permet d'obtenir le gaz enrichi en ^{235}U .

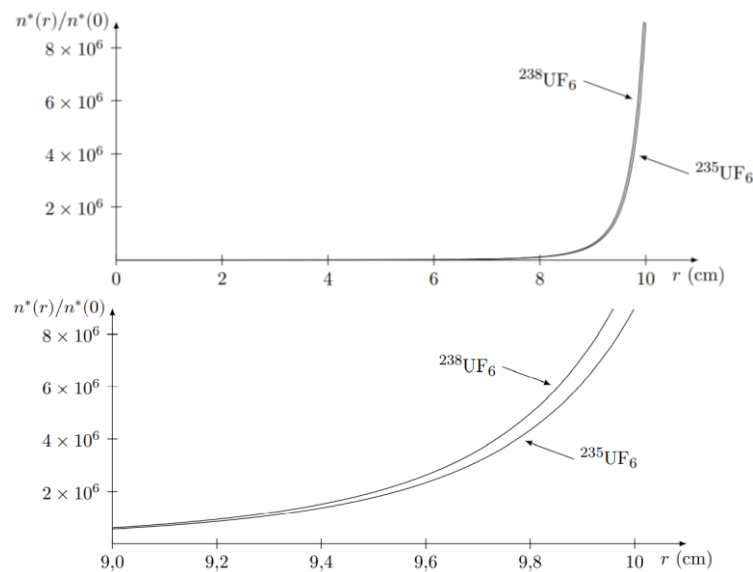


Figure 4 Densités particulaires des molécules $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$ en fonction de r

Formulaire :

Expression du gradient d'une fonction scalaire $f(r, \theta, z)$ en coordonnées cylindriques

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

6 Modèle d'Einstein quantique des solides (sur le même thème : CCS MP 2016)

Afin de pouvoir évaluer précisément la capacité thermique d'un solide, on utilise le modèle unidimensionnel d'EINSTEIN de 1907. Chaque atome de masse m est considéré comme un oscillateur harmonique au sens quantique à une dimension. Les niveaux d'énergie d'un tel système d'énergie potentielle $E_p(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ sont quantifiés :

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega. \text{ On pose } u = \frac{\hbar\omega}{k_B T}.$$

1. Pour un solide en équilibre avec un thermostat de température T , exprimer la probabilité $p_n(u)$ qu'un atome soit dans l'état indicé par n .
2. Montrer que l'énergie moyenne $\bar{\varepsilon}(T)$ d'un atome vaut :

$$\bar{\varepsilon}(T) = \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)$$

On donne : $\sum_{n=0}^{\infty} n \exp(-\alpha n) = \frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2}}$ pour $\alpha > 0$.

3. Évaluer la capacité thermique molaire $C_{V,mol}(T)$ du solide. On rappelle la relation $\frac{d \coth x}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.
4. Quelle est la limite à haute température ? Quelle loi retrouve-t-on ?
5. Discuter de la limite à basse température.

Conseil : Pour faciliter les calculs, introduire la fonction de partition $Z = \sum_n e^{-\frac{E_n}{k_B T}}$ et exprimer l'énergie moyenne en fonction de sa dérivée.

7 Expérience de Jean Perrin (sur le même thème : CCMP1 MP 2021)

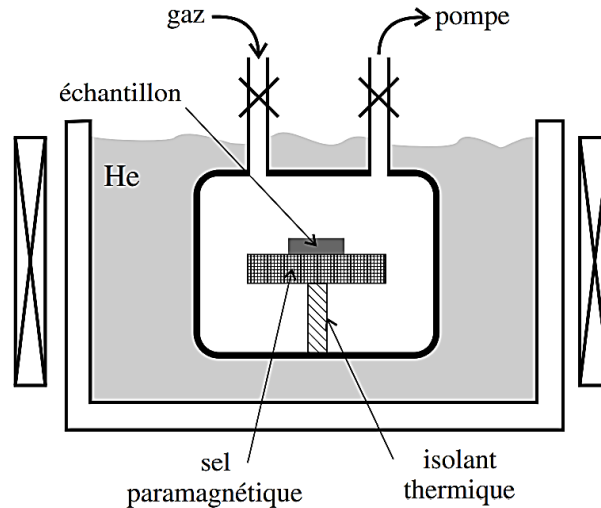
Dans son livre *Les atomes* publié en 1913, JEAN PERRIN décrit des expériences qui lui ont permis de mesurer la constante d'AVOGADRO. Il observe au microscope une suspension de grains sphériques dans l'eau, tous les grains ayant un rayon a de l'ordre d'un dixième de micron. La suspension est observée dans une cuve de 100 μm de profondeur. La densité des grains est $d = 1,194$.

1. Chaque grain est soumis à son poids et à la poussée d'ARCHIMÈDE. Montrer que l'énergie potentielle $E_p(z)$ d'un grain d'altitude z est de la forme $E_p(z) = Az$ où A est une constante que l'on exprimera en fonction de g , d , a et de la masse volumique de l'eau μ_{eau} .
2. En faisant l'hypothèse que les grains suivent la loi de BOLTZMANN, déterminer une longueur caractéristique h dépendant de A et T , longueur caractérisant la répartition des grains selon l'axe Oz . Quel est l'ordre de grandeur de h à la température ambiante $T = 293 \text{ K}$? Commenter.
3. Le rayon des grains utilisés est $a = 0,212 \mu\text{m}$. JEAN PERRIN a trouvé que les concentrations des grains en quatre plans horizontaux équidistants traversant la cuve aux niveaux 5, 35, 65 et 95 μm sont proportionnelles aux nombres 100, 47, 23 et 12. En déduire une valeur approchée de la constante d'AVOGADRO sachant que la constante des gaz parfaits est $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. On prendra $T = 293 \text{ K}$.

8 Refroidissement par désaimantation adiabatique (proche de CCMP MP 2019 et CCINP 2017)

La technique de refroidissement par désaimantation adiabatique d'un sel paramagnétique est utilisée pour refroidir un échantillon à une température extrêmement basse et permet d'atteindre des températures de l'ordre de $100 \mu\text{K}$.

L'échantillon à refroidir est en contact avec un cristal de sel paramagnétique. L'ensemble est placé dans une cellule plongée dans un bain d'hélium liquide de température $T_{\text{He}} = 4,2 \text{ K}$ (voir figure). La cellule peut être remplie d'un gaz sous faible pression pour permettre l'échange thermique (par conduction et convection) entre le système {échantillon + sel paramagnétique} et l'hélium. Elle peut être aussi vidée à l'aide d'une pompe ce qui rend impossible cet échange thermique. De plus on peut soumettre le sel paramagnétique à un champ magnétique en faisant circuler un courant électrique dans une bobine.



1. Le sel paramagnétique contient des ions ayant un moment magnétique $\vec{\mu}$. On rappelle qu'un moment magnétique $\vec{\mu}$ plongé dans un champ magnétique \vec{B} a une énergie potentielle d'interaction avec le champ $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Par ailleurs, la mécanique quantique nous enseigne que la composante de $\vec{\mu}$ sur tout vecteur unitaire \vec{u}_z prend des valeurs quantifiées. Dans le cas considéré ici où les ions ont un spin $\frac{1}{2}$ cette composante prend l'une des deux valeurs $\pm\mu_B$ où $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ est le magnéton de Bohr.

On pose $\vec{u}_z = \frac{\vec{B}}{B}$ avec $B = \|\vec{B}\|$ et on convient de dire que le moment magnétique est « dans le sens de \vec{B} » lorsque $\mu_z = +\mu_B$ et qu'il est « dans le sens inverse de \vec{B} » lorsque $\mu_z = -\mu_B$.

a. Exprimer, en fonction de μ_B et B , l'écart Δ entre les deux énergies possibles pour un moment magnétique. Calculer Δ en eV pour $B = 1 \text{ T}$, ainsi que $\Theta_{\text{spin}} = \frac{\Delta}{k_B}$.

b. On note N_+ (resp. N_-) le nombre moyen de moments magnétiques dans le sens de \vec{B} (resp. dans le sens inverse de \vec{B}). Exprimer $\frac{N_+}{N_-}$ à l'équilibre en fonction de μ_B , B , k_B et T .

2. Le sel paramagnétique est composé de deux systèmes, les moments magnétiques (spins) et le réseau cristallin et sa capacité thermique est la somme de la capacité thermique C_{spin} et

$C_{\text{réseau}}$ de ces deux systèmes. La capacité thermique molaire des spins, système à deux niveaux séparés de $\Delta = k_B\Theta_{\text{spin}}$, est : $C_{\text{spin}} = R \left(\frac{\Theta_{\text{spin}}}{T} \right)^2 \exp \left(\frac{\Theta_{\text{spin}}}{T} \right) \left(\exp \left(\frac{\Theta_{\text{spin}}}{T} \right) + 1 \right)^{-2}$.

La capacité thermique du réseau cristallin est donnée par la théorie de Debye en fonction du rapport $\frac{T}{\Theta_D}$ où Θ_D est une température caractéristique du matériau, de l'ordre de 200 K. Les

formes limites de cette expression sont : $\frac{C_{\text{réseau}}}{3R} \simeq \frac{4}{5}\pi^4 \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3$ pour $T \ll \Theta_D$ et

$\frac{C_{\text{réseau}}}{3R} \simeq 1 - \frac{1}{20} \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^2$ pour $T \gg \Theta_D$.

a. Comparer en ordre de grandeur C_{spin} et $C_{\text{réseau}}$ pour une température de l'ordre de Θ_{spin} .

b. Les spins et le réseau peuvent avoir des températures distinctes T_{spin} et $T_{\text{réseau}}$ pendant une durée de l'ordre de t_1 , temps caractéristique de l'échange thermique entre ces deux systèmes. Que peut-on dire de la température finale commune des deux systèmes, T_f , une fois que l'équilibre thermique est atteint (après un temps grand devant t_1) si initialement $T_{\text{spin}} \sim \Theta_{\text{spin}}$ et $T_{\text{réseau}} \ll \Theta_D$?

3. L'expérience dont le montage est représenté sur la figure se déroule de la manière suivante :

i) La cellule est remplie de gaz, le sel paramagnétique est en équilibre thermique avec le bain d'hélium de température T_{He} : $T_{\text{spin}} = T_{\text{réseau}} = T_{\text{He}}$. Aucun champ magnétique extérieur n'étant appliqué, les spins sont plongés dans un champ magnétique d'intensité $B_i \simeq 1.10^{-2}$ T qui est le champ créé par les spins eux-mêmes.

ii) On applique instantanément un fort champ magnétique extérieur : les spins sont alors plongés dans un champ magnétique d'intensité $B = B_e + B_i \simeq B_e$ avec $B_e = 5$ T.

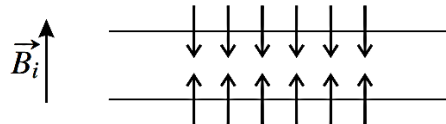
iii) Le sel atteint un nouvel équilibre thermique avec le bain d'hélium.

iv) On fait le vide dans la cellule et on annule rapidement le champ magnétique extérieur.

Après un temps très petit devant t_1 les températures sont telles que $T_{\text{spin}} \ll T_{\text{réseau}} = T_{\text{He}}$.

v) Après un temps supérieur à t_1 , le réseau et les spins sont en équilibre thermique à la même température T_f .

a. Le schéma ci-contre montre les populations des deux niveaux d'énergie accessibles aux spins à l'étape i) de l'expérience. Une flèche verticale vers le haut (resp. le bas) représente un spin dirigé dans le sens du champ magnétique (resp. dans le sens inverse du champ magnétique).



Vérifier que le schéma respecte approximativement la valeur du rapport $\frac{N_+}{N_-}$ des nombre de spins dans les deux états.

b. En admettant qu'aucun spin ne se retourne pendant que l'on modifie le champ magnétique, faire des schémas analogues correspondant aux étapes ii), iii) et iv). On tiendra compte des variations de l'écart entre les deux niveaux.

c. Déterminer la température T_{spin} correspondant à la répartition des spins entre les deux niveaux à l'étape iv). Donner une expression littérale en fonction de T_{He} , B_i et B_e et une valeur numérique.

d. Quelle est la température T_f ?

e. Pourquoi appelle-t-on cette méthode « refroidissement par désaimantation adiabatique » ?

4. À quelle condition le refroidissement du sel paramagnétique entraîne-t-il celui de l'échantillon ?