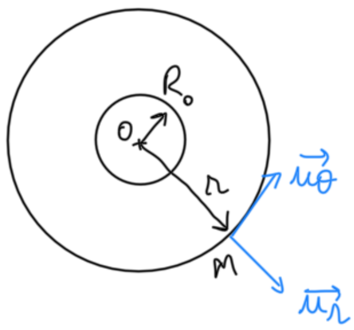
Satellite terrestre en orbite circulaire (CCINP 2024)



1.1) Syst {satellite assimilé au point M (m)}

étudié ds $R_{géoc}$ galiléen

BdF : $\boxed{\vec{F}_{grav} = -\mathcal{G}\dfrac{m M_T}{r^2}\,\vec{u_r}}$

1.2) On a $\vec{F}_{grav} = m\,\underbrace{\vec{A}(M)}_{\text{champ gravitationnel}}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{A}(M) = -\mathcal{G}\dfrac{M_T}{r^2}\,\vec{u_r}}$

ainsi $\vec{g_0} = -\mathcal{G}\dfrac{M_T}{R_0^2}\,\vec{u_r}$

ainsi $\boxed{g_0 = \mathcal{G}\dfrac{M_T}{R_0^2}}$

ODG : $g_0 = \cancel{6{,}67}.10^{-11} \times \dfrac{\cancel{6}.10^{24}}{(\cancel{6{,}4}.10^{6})^2} \simeq 10 \text{ m.s}^{-2}$

↳ valeur attendue $9{,}81 \text{ m.s}^{-2}$

2.1) PFD : $m\vec{a} = \vec{F}_{grav}$

avec $\vec{OM} = r\,\vec{u_r}$; $\vec{v} = r\dot\theta\,\vec{u_\theta}$ et $\vec{a} = r\ddot\theta\,\vec{u_\theta} - r\dot\theta^2\,\vec{u_r}$

d'où $+\cancel{m}\,r\dot\theta^2 = +\mathcal{G}\dfrac{\cancel{m} M_T}{r^2}$

d'où $v^2 = r^2\dot\theta^2 = \mathcal{G}\dfrac{M_T}{r}$

$\Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{\mathcal{G}\dfrac{M_T}{r}}}$ = cste → le mvt est uniforme

avec $\dot\theta = \dfrac{v}{r}$, on a $\boxed{\dot\theta = \sqrt{\mathcal{G}\dfrac{M_T}{r^3}}}$

2.2). Pour un mvt uniforme, on a $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$

$$\Leftrightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\mathcal{G} M_T}}}$$

On obtient $\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} M_T}}$ 3e loi de Kepler.

2.3) On a $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \mathcal{G} \frac{M_T}{r}$

$$E_p = - \mathcal{G} \frac{m M_T}{r}$$

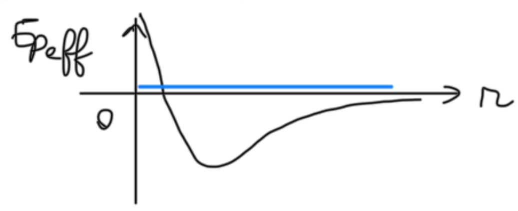
$$E_m = E_c + E_p = - \mathcal{G} \frac{m M_T}{2r}$$

avec $g_0 = \mathcal{G} \frac{M_T}{R_0^2} \Leftrightarrow \mathcal{G} M_T = g_0 R_0^2$

$$\Rightarrow \boxed{E_m = - \frac{m}{2r} g_0 R_0^2}$$

3.1). vitesse de libérat°: vitesse min à communiquer à un objet initialemt situé à la surface de la Terre pour qu'il puisse échapper à l'attract° terrestre.

↳ état libre



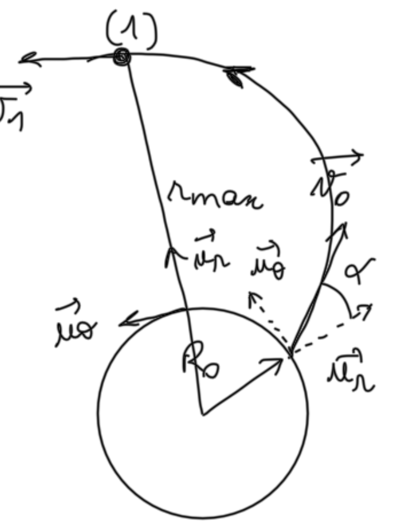
→ E_m correspondante $= 0$

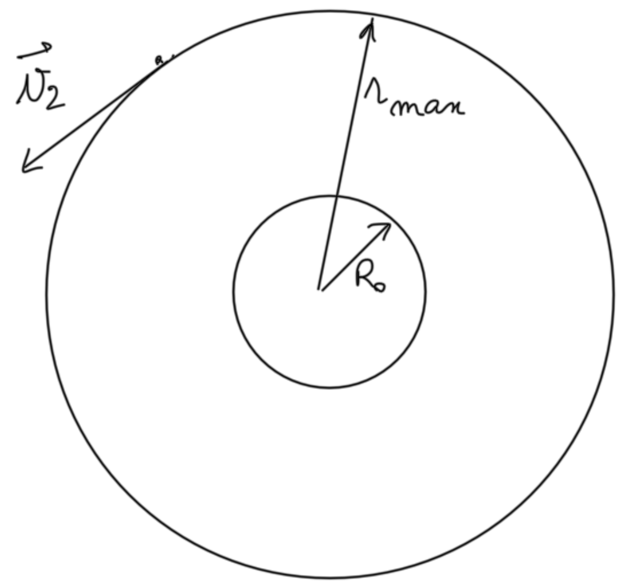
or à la surface de la Terre $E_m = \frac{1}{2} m v_{lib}^2 - \mathcal{G} \frac{m M_T}{R_0}$

d'où $v_{lib}^2 = 2 \mathcal{G} \frac{M_T}{R_0}$

ainsi $\boxed{v_{lib} = \sqrt{2 g_0 R_0}}$

3. 2).





Pendant la 1ère phase $\{M(m)\}$ ds $R_{géoc}$ galiléen

soumis à $\overrightarrow{F_{grav}}$ conservative et centrale

$\Rightarrow$ d'après TPM : $\dfrac{dE_m}{dt} = P^{nc} = 0 \Leftrightarrow \underline{E_m = cste}$

TMC / à O fixe ds $R_{géoc}$: $\dfrac{d\overrightarrow{\sigma_0}(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_0(\overrightarrow{F_{grav}}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \underline{\overrightarrow{\sigma_0}(M) = \overrightarrow{cst}}$

- On a $E_m(0) = \dfrac{1}{2} m v_0^2 - \mathcal{G}\dfrac{mM_T}{R_0} = \dfrac{1}{2} m g_0 R_0 - m g_0 R_0$

$\Leftrightarrow E_m(0) = -\dfrac{1}{2} m g_0 R_0.$

$E_m(1) = E_c(1) + E_p(1)$

avec $\vec{v_1} = v_1 \overrightarrow{u_\theta}$

d'où $E_m(1) = \dfrac{1}{2} m v_1^2 - \mathcal{G}\dfrac{mM_T}{r_{max}}$

par consᵒ de E_m, on a $-\dfrac{1}{2}\cancel{m} g_0 R_0 = \dfrac{1}{2}\cancel{m}\, v_1^2 - \cancel{m}\dfrac{g_0 R_0^2}{r_{max}}$

- On a $\overrightarrow{\sigma_0}(M, t=0) = R_0 \overrightarrow{u_r} \wedge m v_0 (\cos\alpha\, \overrightarrow{u_r} + \sin\alpha\, \overrightarrow{u_\theta})$

$= m R_0 v_0 \sin\alpha\, \overrightarrow{u_z} = m R_0 \sqrt{g_0 R_0} \sin\alpha\, \overrightarrow{u_z}$

$\overrightarrow{\sigma_0}(M, t_1) = r_{max} \overrightarrow{u_r} \wedge m \vec{v_1}$

avec $\vec{v_1} = v_1 \overrightarrow{u_\theta}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\sigma_0}(M, t_1) = m\, r_{max}\, v_1 \overrightarrow{u_z}$

par conse de $\vec{\sigma_0}(M)$, on a $\cancel{m} R_0\sqrt{g_0R_0}\sin\alpha = \cancel{m}\, r_{max}\, v_1$

d'où
$$\begin{cases} -\frac{1}{2} g_0 R_0 = \frac{1}{2} v_1^2 - \frac{g_0 R_0^2}{r_{max}} & (A) \\ R_0\sqrt{g_0 R_0}\sin\alpha = r_{max}\, v_1 & (B) \end{cases}$$

$$(B) : v_1 = \frac{R_0\sqrt{g_0R_0}\sin\alpha}{r_{max}}$$

$$\Rightarrow (A) : -\frac{1}{2} g_0 R_0 = \frac{1}{2}\frac{R_0^3 g_0 \sin^2\alpha}{r_{max}^2} - g_0\frac{R_0^2}{r_{max}}$$

$$\Leftrightarrow \quad g_0 R_0 r_{max}^2 - 2 g_0 R_0^2 r_{max} + R_0^3 g_0 \sin^2\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad r_{max}^2 - 2 R_0 r_{max} + R_0^2\sin^2\alpha = 0$$

$$r_{max} = \frac{2R_0 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{avec } \Delta = 4R_0^2 - 4R_0^2\sin^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 4R_0^2(1-\sin^2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 4R_0^2\cos^2\alpha \geq 0$$

ainsi $r_{max} = \dfrac{2R_0 \pm 2R_0\cos\alpha}{2}$ $\quad \left(\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\alpha \geq 0\right)$

$$\Leftrightarrow \quad r_{max} = R_0(1 \pm \cos\alpha)$$

il faut $r_{max} > R_0$ ainsi pour $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\boxed{r_{max} = R_0(1+\cos\alpha)}$

et (B) : $\boxed{v_1 = \dfrac{R_0\sqrt{g_0R_0}\sin\alpha}{R_0(1+\cos\alpha)} = \sqrt{g_0R_0}\,\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}$

3.3) Phase 2 mvt circulaire de rayon r_{max}

$$\rightarrow v_2 = \sqrt{G\frac{M_T}{r_{max}}} = \sqrt{\frac{g_0R_0^2}{R_0(1+\cos\alpha)}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v_2 = \sqrt{\frac{g_0 R_0}{1+\cos\alpha}}}$$

les moteurs doivent apporter une énergie égale à

$$E_{m_2} - E_{m_1} = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{2 r_{max}} + \frac{1}{2} m g_0 R_0$$

$$= -\frac{g_0 R_0^2 m}{2R_0(1+\cos\alpha)} + \frac{1}{2} m g_0 R_0$$

$$\boxed{E_{m\,fournie} = \frac{1}{2} m g_0 R_0 \left(1 - \frac{1}{1+\cos\alpha}\right)}$$

<u>NB</u>: $E_{m\,fournie} > 0$ ce qui est bien cohérent