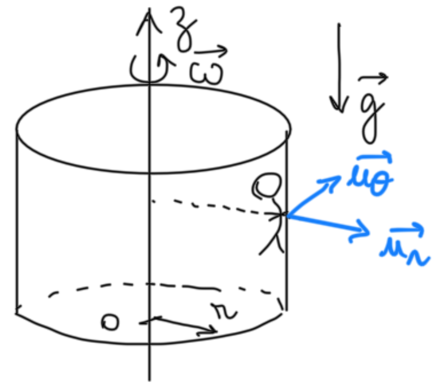
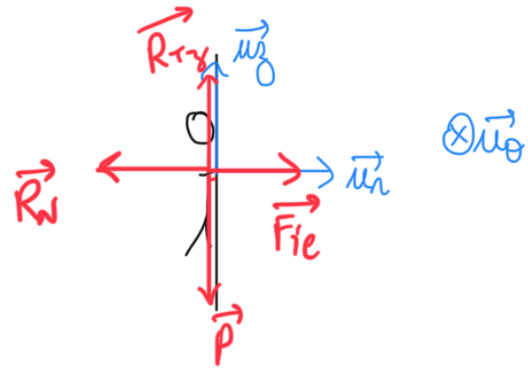
Manège en rotati° (CMT 2024)

1) 



syst {personne (m)} ds R' lié au manège non galiléen
car R' en rotati° uniforme autour de (Oz) fixe / à $R_{\text{terrestre}}$ gal.

~~Bdf~~ : vraies
$$\begin{cases} \vec{P} = -mg\,\vec{u_z} \\ \vec{R} = \vec{R_N} + \vec{R_T} = -R_N\,\vec{u_r} + R_{T\theta}\,\vec{u_\theta} + R_{Tz}\,\vec{u_z} \\ \quad \text{avec } R_N > 0 \text{ si la personne est en contact avec paroi} \end{cases}$$

pseudo-forces : $\vec{F_{ie}} = -m\vec{a_e} = m\,r\,\omega^2\,\vec{u_r}$
$\vec{F_{ic}} = -m\vec{a_c} = -m\,2\,\vec{\omega} \wedge \vec{v_r}$

Si la personne est immobile ds R' alors $\vec{v_r} = \vec{0}$ et $\vec{a_r} = \vec{0}$

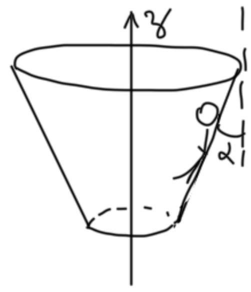
et d'ap. la loi de Coulomb pour le non-glissement :
$$\|\vec{R_T}\| \leq \mu_s \|\vec{R_N}\|$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{R_{T\theta}^2 + R_{Tz}^2} \leq \mu R_N$$

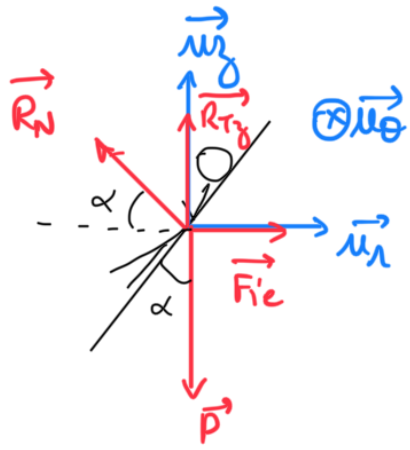
PFD dans R' : $\vec{0} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_{ie}}$

$$\begin{cases} 0 = -R_N + m\,r\,\omega^2 \\ 0 = R_{T\theta} + 0 \\ 0 = R_{Tz} - mg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_N = m\,r\,\omega^2 \\ R_{T\theta} = 0 \\ R_{Tz} = mg \end{cases}$$

la personne reste immobile / à la paroi tant que
$$\cancel{m}g \leq \mu\,\cancel{m}\,r\,\omega^2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu r}}}$$

AN : $\omega \geq 2{,}4\ \text{rad}\cdot s^{-1} = 0{,}38\ \text{tr}\cdot s^{-1}$

2) si on a 



Projec° du PFD :

$$\begin{cases} 0 = -R_N \cos\alpha + m r \omega^2 \\ 0 = R_{T\theta} + 0 \\ 0 = R_N \sin\alpha + R_{Tz} - mg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_N = \dfrac{m r \omega^2}{\cos\alpha} \\ R_{T\theta} = 0 \\ R_{Tz} = mg - \sin\alpha \dfrac{m r \omega^2}{\cos\alpha} \end{cases}$$

Personne immobile tant que

$$\cancel{m} g - \tan\alpha \, \cancel{m} r \omega^2 \leq \mu \cdot \frac{\cancel{m} r \omega^2}{\cos\alpha}$$

$$g \leq r\omega^2 \left(\frac{\mu}{\cos\alpha} + \tan\alpha \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega^2 \geqslant \frac{g/r}{\tan\alpha + \mu/\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\omega \geqslant \sqrt{\frac{g/r}{\tan\alpha + \mu/\cos\alpha}}}$$

$$\omega \geqslant \sqrt{\frac{g/\mu r}{\frac{\tan\alpha}{\mu} + \cos\alpha}}$$

- si $\alpha = 0$ on a $\begin{cases} \tan\alpha = 0 \\ \cos\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \omega \geqslant \sqrt{\dfrac{g}{\mu r}}$ idem Q1

- si $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ on a $\begin{cases} \tan\alpha = 1 \\ \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \omega \geqslant \sqrt{\dfrac{g/r}{1 + \sqrt{2}\mu}} = 1{,}40 \text{ rad.s}^{-1}$

- si $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ on a $\begin{cases} \tan\alpha \to +\infty \\ \cos\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \omega \geqslant 0$ paroi horizontale ...

- <u>⊕ α est élevé, moins la cdt° sur ω est contraignante</u>

$$f(\alpha) = \frac{\tan\alpha}{\mu} + \cos\alpha \Rightarrow \frac{df}{d\alpha} = \frac{1}{\mu}(1 + \tan^2\alpha) - \sin\alpha$$

$$\frac{df}{d\alpha} = 0 \Leftrightarrow 1 + \tan^2\alpha = \mu \sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = \mu \sin\alpha$$ pas de sol° dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\dfrac{df}{d\alpha} > 0$ $\quad f(\alpha) \nearrow$ $\quad \omega_{min} = \sqrt{\dfrac{g/\mu r}{\frac{\tan\alpha}{\mu} + \cos\alpha}} \searrow$ si $\alpha \nearrow$