

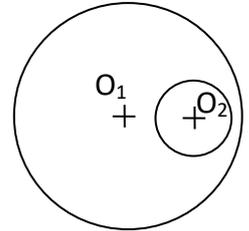
Préparation aux oraux MP/MPI

TD3 – Electromagnétisme & Ondes

1 Exercice « académique » CMT Vennat 2024 : Champ gravitationnel

1) On considère une planète modélisée par une boule de rayon R et de masse volumique ρ uniforme. Déterminer l'expression du champ gravitationnel créé par la planète en tout point M de l'espace.

2) On considère une autre planète ainsi constituée :
une boule (B_1) de centre O_1 et de rayon R_1 , de densité volumique de charge ρ_1 uniforme dans laquelle se trouve une boule (B_2) de centre O_2 et de rayon R_2 , de densité volumique de charge ρ_2 uniforme (cf ci-contre). Déterminer le champ gravitationnel régnant dans la boule (B_2).



2 Exercice : Projet Hyperloop – Propulsion de la capsule

Selon le projet de transport en commun Hyperloop pour relier Los Angeles à San Francisco, les passagers sont transportés dans des capsules, propulsées par un moteur linéaire à induction, qui se déplacent sur coussin d'air dans un tube à pression réduite. L'ensemble est alimenté par des cellules solaires disposées le long du tube.

On étudie ici la propulsion de la capsule.

Le moteur linéaire à induction est constitué d'un stator, fixe par rapport au tube et produisant un champ magnétique variable et d'une partie mobile, appelée « rotor », solidaire de la capsule (cf figure 7). Dans ce moteur, le « rotor » ne suit pas un mouvement de rotation, mais un mouvement de translation dans la direction du tube.

Le champ magnétique est produit par des bobines disposées de part et d'autre du rotor. En 1^e approximation, on peut considérer que ces bobines sont assimilables à des solénoïdes infinis.

On considère un solénoïde infini, d'axe (Oz), de rayon a , comportant n spires par unité de longueur, parcouru par un courant lentement variable d'intensité $i(t)$. On admet que l'on peut travailler dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-permanents. On considère que le champ magnétique créé à l'extérieur du solénoïde est nul.

1) Etablir l'expression du champ magnétique créé à l'intérieur du solénoïde. On notera B_0 le module de ce champ.

On considère des paires de bobines disposées régulièrement le long du tube. Ce dispositif permet de créer un champ magnétique dirigé selon \vec{u}_z dont la représentation graphique est donnée figure 6.

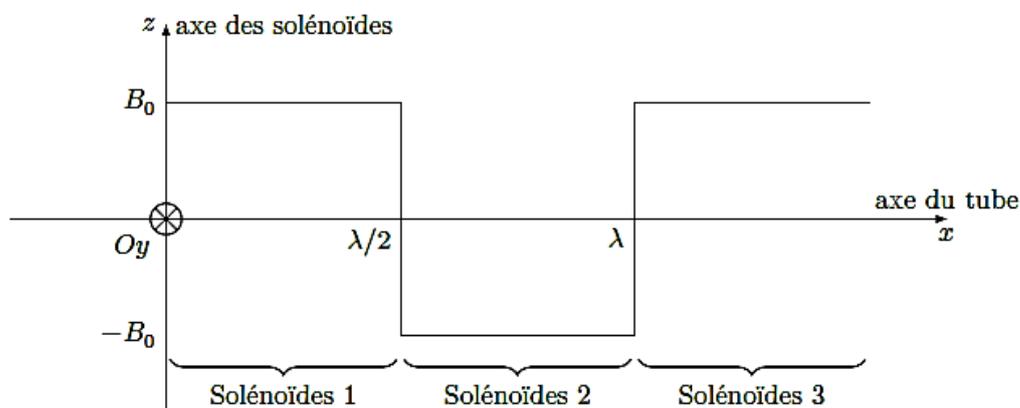


Figure 6

Le champ produit possédant une périodicité spatiale, il est possible de le décomposer en somme de fonctions sinusoïdales. En ne conservant que le 1^{er} terme de cette somme, on peut écrire :

$$\vec{B}(x) = \frac{4B_0}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \vec{u}_z$$

Le courant circulant dans les solénoïdes varie lentement de façon périodique : $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

- 2) Montrer que $\vec{B}(x)$ peut s'écrire comme la superposition de deux ondes progressives circulant en sens inverse.

Pour le moteur étudié, on doit éliminer l'onde progressant selon $-\vec{u}_x$. Pour cela, on remplace chaque paire de bobines par trois paires. Le champ produit peut alors s'écrire :

$$\vec{B} = \frac{3B_0'}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t\right) \vec{u}_z$$

Avec $B_0' = \frac{4\mu_0 n I_0}{\pi}$.

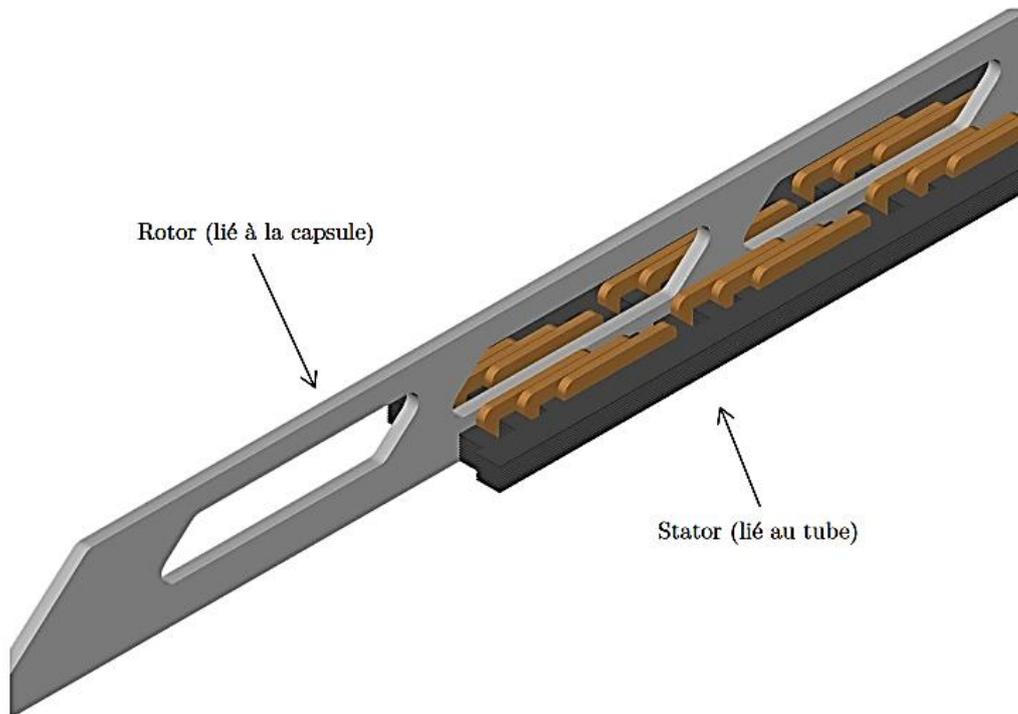


Figure 7 Moteur linéaire à induction

Le rotor, solidaire de la capsule, peut être modélisé par une spire filiforme carrée de côté $l \ll \lambda$ et de résistance R . Cette spire est située dans le plan Oxy de la figure 6 et se déplace à la vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$ selon l'axe du tube. Initialement, le centre C de la spire est en $x = 0$.

- 3) a) En considérant pour cette question et la suivante que le champ magnétique créé par le stator est uniforme à l'échelle de la spire, de valeur sa valeur en C , évaluer le flux de ce champ à travers la spire.
 b) Déterminer l'expression du courant induit $i(t)$.

On peut montrer que la valeur moyenne de la résultante des forces de Laplace s'exerçant sur le rotor s'écrit :

$$\langle \vec{F}_L \rangle = \frac{\pi(3B_0' l^2)^2}{4R\lambda} \left(\omega - \frac{2\pi v}{\lambda}\right) \vec{u}_x$$

- c) La capsule peut-elle démarrer par l'action de cette seule force ?
 d) Que faut-il faire si l'on souhaite freiner la capsule à l'aide de ce système ?

3 Exercice « académique » : Cation dans un champ magnétique

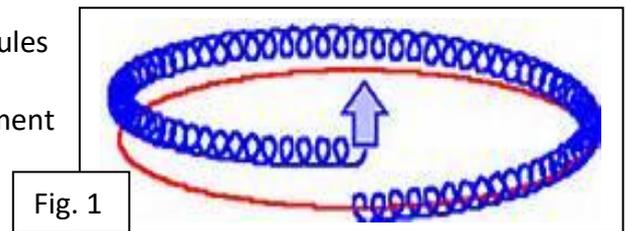
On considère un plasma obtenu à partir du Deutérium D, constitué d'ions D^+ et d'électrons e^- . Afin de réaliser la fusion nucléaire entre ions D^+ , il faut confiner le plasma c'est-à-dire le maintenir à une forte densité à une température considérable (10^8 K).

On étudie le mouvement d'un cation D^+ , non relativiste, dans un champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B} = B\vec{u}_z$ avec $B > 0$, dans le référentiel galiléen $R(O, x, y, z)$.

- 1) Montrer que le mouvement du cation est uniforme.
- 2) A $t = 0$, le cation se trouve au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_z$ avec $v_0 > 0$. Déterminer le mouvement ultérieur du cation.
- 3) A $t = 0$, le cation se trouve maintenant au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_y$ avec $v_0 > 0$. On admet que la trajectoire est circulaire. Déterminer le rayon de cette trajectoire.
- 4) A $t = 0$, le cation se trouve maintenant au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_{0\parallel}\vec{u}_z + v_{0\perp}\vec{u}_y$ avec $v_{0\parallel} > 0$ et $v_{0\perp} > 0$. Quelle est alors la nature de la trajectoire ?

On constate que, dans un champ non uniforme, les particules subissent une dérive (cf Fig. 1).

L'évaluation de cette dérive passe par le vecteur moment magnétique \vec{M} associé.



- 5) Justifier que le cation étudié en Q3 équivaut en moyenne à une spire parcourue par un courant d'intensité I et évaluer I .
- 6) En déduire que $\|\vec{M}\| = \frac{E_C}{B}$ avec E_C l'énergie cinétique du cation et préciser la direction et le sens de \vec{M} .

4 Exercice « académique » CCINP Le Neindre 2024 : Effet Joule dans un cylindre

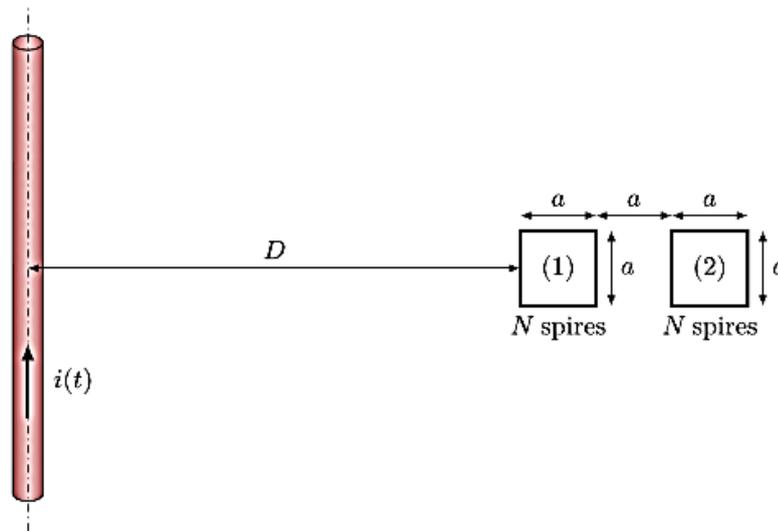
Un cylindre conducteur (plein) de conductivité électrique σ , de rayon a , de longueur ℓ est placé à l'intérieur d'un solénoïde de très grande longueur. L'axe du cylindre est confondu avec celui du solénoïde, on le note (Oz) . Le solénoïde est parcouru par un courant de fréquence $f = 50$ Hz qui crée un champ magnétique : $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\vec{u}_z$.

- 1) Justifier la présence d'un champ électrique à l'intérieur du cylindre. Comment s'appelle ce phénomène ? Par quelle équation de Maxwell est-il régi ?
- 2) Justifier que ce champ électrique est orthoradial.
- 3) Déterminer l'expression de ce champ électrique.
- 4) Donner l'expression de la puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule dans le conducteur (en un point situé à une distance r de l'axe (Oz)).
- 5) En déduire la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans tout le conducteur.

5 CCS1 / CMT Neveu 2024 : Mesure d'intensité

Un câble est parcouru par un courant alternatif $i(t)$ sinusoïdal de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$. Un appareil de mesure contient deux bobines (1) et (2), de même résistance $R = 1 \Omega$, contenant chacune $N=100$ spires carrées de côté $a = 2,0 \text{ cm}$ supposées quasiment confondues.

Chacune de ces bobines est équipée d'un ampèremètre mesurant les intensités efficaces $i_{1,eff}$ et $i_{2,eff}$ des courants dans (1) et (2).



1. Expliquer pourquoi on observe des courants dans (1) et (2).
2. Les capteurs relèvent $i_{1,eff} = 1,92 \text{ mA}$ et $i_{2,eff} = 1,83 \text{ mA}$ et on suppose que $D \gg a$. En déduire l'intensité efficace i_{eff} du courant dans le câble.
3. Discuter les hypothèses de travail.
4. Quel est l'avantage de ce dispositif par rapport à un ampèremètre branché directement sur le câble ? par rapport à une pince ampèremétrique (petite bobine torique munie d'un ampèremètre, qu'on place autour du câble) ?

6 Résolution de problème CMT : Expérience de Marconi

La haute atmosphère de la Terre est partiellement ionisée (dans la zone dite ionosphère) et se présente sous forme d'ions positifs et d'électrons, à raison de $n \approx 10^{12} \text{ m}^{-3}$ électrons par unité de volume.

On considère la propagation d'ondes planes :

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}} = \vec{B}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$$

- 1) Sachant que la conductivité complexe du plasma s'écrit $\underline{\gamma} = -i \frac{\alpha}{\omega}$ avec $\alpha = \frac{ne^2}{m}$, établir la relation de dispersion. Commenter.
- 2) Vérifier la cohérence de ce modèle avec l'expérience de G. Marconi :

En 1901, l'Italien G. Marconi réalisa la 1^{ère} transmission transatlantique d'un message par ondes radios de fréquence $f \approx 300 \text{ kHz}$. Cette prouesse est liée au fait que dans un milieu homogène, les ondes électromagnétiques se propagent en ligne droite. Or, sur les 6 000 km de traversée de l'océan, la courbure de la surface terrestre est telle que l'onde ne devrait jamais parvenir au récepteur. L'enregistrement du signal impose donc que l'onde se soit réfléchi.

Donnée : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

7 Exercice « académique » : Floculation d'une suspension colloïdale

On s'intéresse aux mécanismes de traitement des eaux usées, et plus particulièrement à la floculation des particules colloïdales en solution aqueuse.

Document 1 : Phénomène de floculation

Les particules colloïdales sont caractérisées par deux points essentiels : d'une part, leur rayon est très faible (de 10 nm à 1 μm) ; et d'autre part, elles ont la particularité d'être chargées négativement, ce qui engendre des forces de répulsions inter-colloïdales. Ces deux points confèrent aux colloïdes une vitesse de sédimentation extrêmement faible.

La floculation est le processus physico-chimique au cours duquel des particules colloïdales en suspension dans un liquide s'agglomèrent pour former des particules plus grosses, généralement très poreuses, nommées floccs. Les floccs sédimentent généralement beaucoup plus rapidement que les particules primaires dont ils sont formés, ce qui est utilisé dans le traitement des eaux usées.

Adapté de Wikipédia

On souhaite étudier l'effet de l'ajout de sels ioniques à la suspension. On raisonne sur une particule colloïdale sphérique, de centre O , de rayon R et de charge $Q < 0$. Les densités volumiques des ions sont $N_+(r) = N_0 e^{-zeV(r)/k_B T}$ pour les cations (charge $+ze$, $z = 2$ ou 3 en pratique) et $N_-(r) = N_0 e^{+zeV(r)/k_B T}$ pour les anions (charge $-ze$), avec N_0 une constante, V le potentiel électrostatique, k_B la constante de Boltzmann et T la température. On suppose $|zeV(r)| \ll k_B T$.

Donnée : laplacien d'une fonction $V(r)$ à symétrie sphérique

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rV) .$$

- 1 - Pourquoi peut-on considérer les ions comme ponctuels ?
- 2 - Déterminer la densité volumique de charge $\rho(r)$ autour du colloïde étudié.
- 3 - Déterminer une expression du potentiel électrostatique V .
- 4 - Montrer que le champ électrique est de la forme

$$E(r) = \frac{K}{r^2} \left(1 + \frac{r}{\delta} \right) e^{-r/\delta} .$$

Déterminer K en appliquant le théorème de Gauss à une surface bien choisie.

- 5 - Décrire l'effet des ions sur le champ électrique entre deux particules colloïdales. Conclure.

8 ✍ Exercice « académique » CCINP : Onde électromagnétique

Une onde électromagnétique se propage dans le vide entre $z = 0$ et $z = a$; on donne

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos(kx - \omega t) \vec{u}_y .$$

- 1) Déterminer la relation de dispersion ; à quelle condition sur ω une telle onde peut-elle exister ?
- 2) Déterminer la vitesse de phase. Y a-t-il phénomène de dispersion ?
- 3) Déterminer \vec{B} .
- 4) Déterminer la densité d'énergie électromagnétique et le vecteur de Poynting puis déterminer leur valeur moyenne.
- 5) Déterminer la vitesse de l'énergie électromagnétique.

9 CCS2 : Ondes sismiques

Ondes dans un barreau unidimensionnel

Soit une onde longitudinale dans un barreau très long, de masse volumique ρ_0 uniforme au repos. On admet qu'au passage de l'onde longitudinale, la masse volumique dans le barreau s'écrit : $\rho(x, t) \simeq \rho_0$. La figure 1 définit les notations.

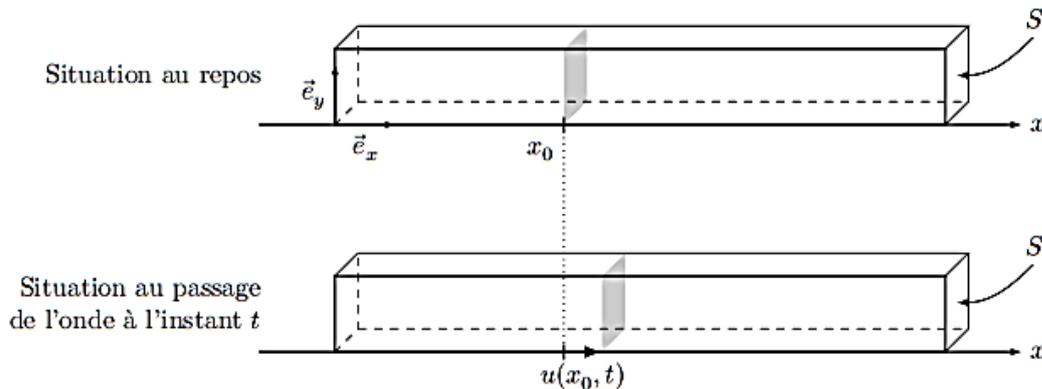


Figure 1 Déplacement longitudinal dans un barreau unidimensionnel

Les développements limités seront effectués à l'ordre 1.

- a. En une section située en x_0 à l'instant t , la partie $x < x_0$ exerce sur la partie $x > x_0$ la force

$$\vec{f}_L(x_0, t) = -(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) S \vec{e}_x$$

où λ et μ sont des constantes positives propres au matériau, appelées paramètres de Lamé. Montrer que $u(x, t)$ vérifie l'équation d'onde et donner l'expression de la célérité des ondes longitudinales (ou de compression), c_L .

- b. Un solide peut être le siège d'ondes transversales (ou de cisaillement). Localement, en une section située en x_0 à l'instant t , la partie $x < x_0$ exerce sur la partie $x > x_0$ la force

$$\vec{f}_T(x_0, t) = -\mu \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, t) S \vec{e}_y$$

où v est le déplacement par rapport à l'équilibre du barreau selon \vec{e}_y . Par analogie avec la question précédente, donner sans démonstration l'expression de la célérité des ondes transversales (ou de cisaillement), c_T .

- c. En sismique, les ondes de compression et de cisaillement sont désignées respectivement par les lettres P et S , respectivement pour Première et Seconde. Pourquoi ?

Rai sismique

Un rai (ou rayon) sismique est aux ondes sismiques ce qu'un rayon lumineux est aux ondes électromagnétiques.

- Justifier qu'un rai sismique est perpendiculaire aux surfaces où l'amplitude de l'onde sismique prend une valeur constante. En vous basant sur l'optique, énoncer les lois de Descartes de la réfraction d'un rai sismique à l'interface plane entre deux milieux de vitesse de rai v_1 et v_2 .
- La vitesse des ondes change en fonction de la profondeur. Afin de comprendre comment cela affecte un rai sismique, on considère un rai traversant trois milieux 1, 2 et 3 de vitesses v_1, v_2 et v_3 respectivement. L'interface entre chaque milieu est sphérique, et le rai arrive sur le milieu 1 avec une incidence i_1 . Tracer la marche du rai incident (figure 2).

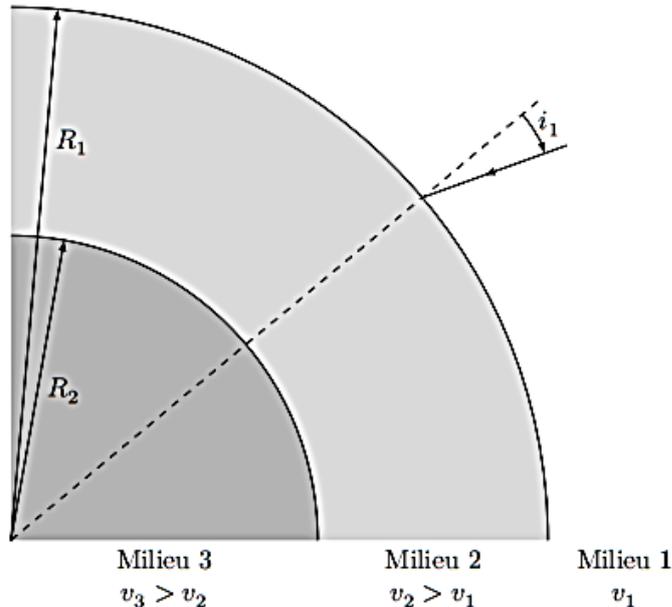


Figure 2

Montrer que la quantité $p = \frac{R_k \sin(i_k)}{v_k}$ est identique pour les deux interfaces ($k = \{1; 2\}$, i_2 est l'angle d'incidence à l'interface 2/3). p s'appelle *paramètre de rai*.

Étude documentaire

On justifiera les réponses en s'appuyant d'une part sur les résultats des questions précédentes, d'autre part sur les documents fournis.

On considère un séisme de foyer F . On appelle *épicentre* E le projeté de F sur la surface de la Terre. L'étude d'un séisme se fait notamment par deux outils.

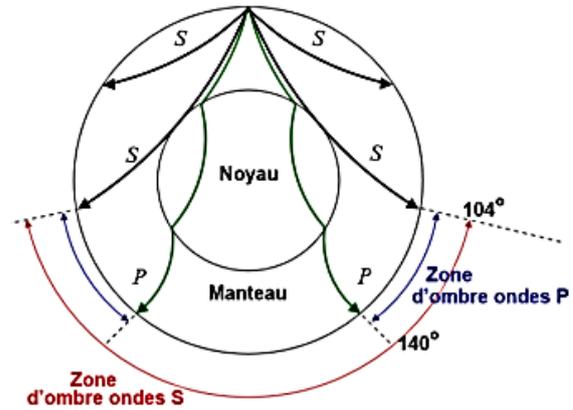
- L'hodochrone des ondes : il s'agit du graphe du temps T mis par l'onde pour arriver en un point M de la surface de la Terre en fonction de Δ , appelée distance épicentrale et définie dans le document 2.
- L'enregistrement, par une station de mesure, des ondes P et S en fonction du temps : c'est le sismogramme.

- Expliquer l'allure des rais sismiques présentés.
- Pourquoi une onde S ne se propage-t-elle pas dans le noyau ? Comment cela se traduit-il sur son hodochrone ?
- À partir des données fournies, déterminer la distance épicentrale du séisme étudié. Connait-on exactement l'emplacement de l'épicentre ?

Document 1 Modèle de la Terre à deux enveloppes

La Terre peut être modélisée en première approximation par un noyau liquide, de rayon approximatif 2900 km, entourée par un manteau solide. Dans le manteau, la vitesse des ondes P et S augmente en fonction de la profondeur. La vitesse des ondes P dans le noyau est plus faible que dans le manteau.

Du fait de la présence du noyau, il existe des zones à la surface de la Terre qui ne reçoivent pas les ondes issues d'un point donné. Ce sont des zones d'ombre sismiques.



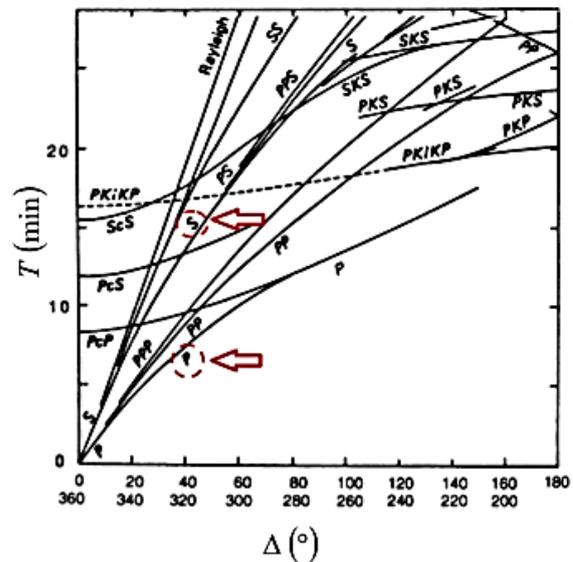
Document 2 Hodochrone

La figure ci-contre représente l'hodochrone des différentes ondes sismiques dans l'ensemble {Manteau + Noyau}.

L'abscisse du graphe est l'angle $\Delta = \widehat{EOM}$ avec : E épicentre du séisme, O le centre de la Terre, M point d'observation.

L'ordonnée est le temps T correspondant à Δ , pour un type d'onde donné.

On exploitera *uniquement* les hodochrones des ondes P et S (voir flèches).



Document 3 Sismogrammes

La figure ci-contre est un enregistrement de l'amplitude des ondes P et S en fonction du temps. Cet enregistrement a été réalisé par un sismographe situé à la surface de la Terre.

