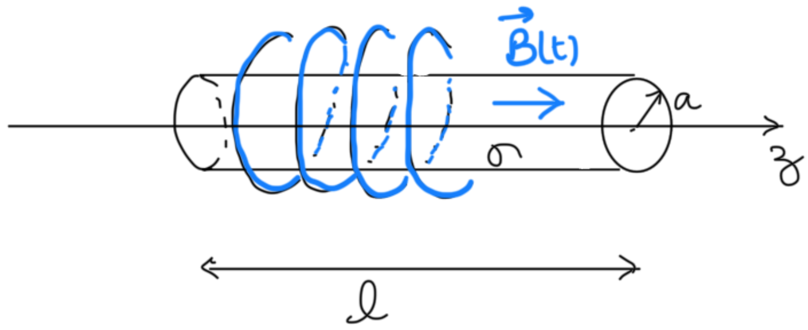
Effet Joule dans un cylindre (CCINP 2024).



$\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)\, \vec{u_z}$

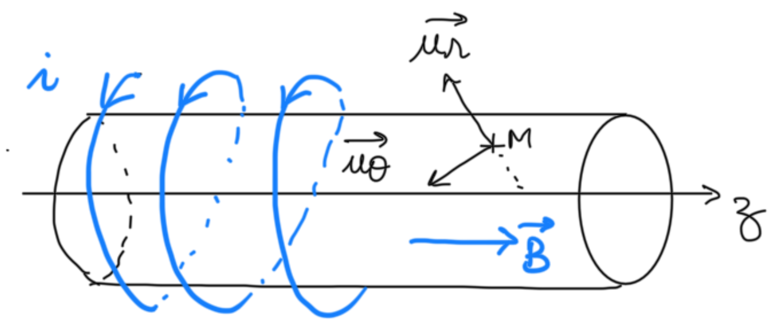
1) On a un champ magnétique qui dépend de t

⇒ le flux magnétique au travers du cylindre dépend de t ⇒

il y a induction, phénomène relié à l'éq° de

Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{rot}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

2)



Le plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ est un plan d'antisymétrie de Di

la distr de courants (à l'origine de $\vec{B}$)

Ainsi le champ électrique induit est orthogonal à ce plan

→ $\vec{E}(M) \,//\, \vec{u_\theta}$ soit un champ élec. orthoradial.

De +, il y a invariance de Di par rotat° autour de (Oz)

et par translat° le long de (Oz)*

*effets de bords négligés pour $l \gg a$.

⇒ les composantes de $\vec{E}$ ne dépendent pas de θ, ni de z

ainsi, on a $\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\, \vec{u_\theta}}$

4) 1e propositi°

d'ap. le formulaire $\overrightarrow{rot}\, \vec{E} = 0\, \vec{u_r} + 0\, \vec{u_\theta} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r}(rE)\, \vec{u_z}$

ainsi $\dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r}(rE) = + B_0\, \omega \sin(\omega t)$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\partial}{\partial r}(rE) = B_0\, \omega\, r \sin(\omega t)$

$$\Leftrightarrow \quad rE = B_0 \omega \frac{r^2}{2} \sin(\omega t) + C \quad , \; C \in \mathbb{R}$$

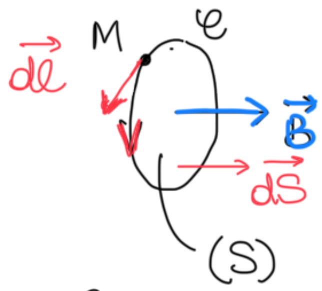
en supposant que E est fini en $r=0$, on a $0 = 0 + C \Leftrightarrow C = 0$

d'où $\boxed{\vec{E}(M) = B_0 \omega \frac{r}{2} \sin(\omega t) \, \vec{u_\theta}}$

<u>2e propositⁿ</u>

d'ap. l'éqⁿ de M-F, on a $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

on intègre sur un disque (S) délimité par le cercle ($\mathcal{C}$) d'axe (Oz) et passant par M ($\Rightarrow$ de rayon r)



$$\iint_S \vec{rot}\,\vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS}$$

d'ap. le th de Stokes, on a :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}\right) = -\frac{d}{dt}\left(B(t) \cdot \pi r^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \oint_{(\mathcal{C})} E(r)\vec{u_\theta} \cdot dl\,\vec{u_\theta} = B_0 \omega \sin(\omega t) \pi r^2$$

$$\Leftrightarrow E(r) \cdot 2\pi r = B_0 \omega \sin(\omega t) \pi r^2$$

$$\Leftrightarrow E(r) = B_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2}$$

d'où $\boxed{\vec{E}(M) = B_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \vec{u_\theta}}$

5) Le cylindre est un <u>milieu ohmique</u>

ainsi $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

La puissance volumique fournie par le champ EM aux charges s'écrit $P_V = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2$

$\Rightarrow$ puissance volumique dissipée per effet Joule :

$$P_V = \sigma B_0^2 \omega^2 \frac{r^2}{2} \sin^2(\omega t)$$

$\Rightarrow$ puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule :

$$\langle P_V \rangle = \sigma B_0^2 \omega^2 \frac{r^2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \sigma B_0^2 \omega^2 \frac{r^2}{4}$$

6) On intègre sur tout le cylindre :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \int_{r=0}^{a} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{\ell} \langle \mathcal{P}_V \rangle \, dr \, r d\theta dz$$

$$= \sigma B_0^2 \omega^2 . \frac{1}{4} . 2\pi . \ell \int_{r=0}^{a} r^3 dr$$

$$= \sigma B_0^2 \omega^2 \frac{\pi}{2} \ell \frac{a^4}{4}$$

d'où $\boxed{\langle \mathcal{P} \rangle = \sigma B_0^2 \omega^2 . \frac{\pi}{8} \ell . a^4}$

σ : $\Omega^{-1} . m^{-1}$; B_0^2 : T^2 ; ω^2 : s^{-2} ; ℓ : m ; a^4 : m^4

T^2 → or $\left[\frac{B^2}{2\mu_0}\right] = \frac{\text{énergie}}{L^3}$

$\Rightarrow$ $\langle P \rangle$ en $\Omega^{-1} . J . m^{-3} . H . m^{-1} . s^{-2} . m^4$

et $\left[\frac{L}{R}\right] = T$ (circuit élec RL)

$\Rightarrow$ $\langle P \rangle$ en $J . s^{-1} = W$ → cohérent.

On vérifie également que la puissance dissipée est d'autant ⊕ élevée que la pulsat° est élevée

→ cohérent avec le phé. d'induc° d'autant ⊕ important que les variat° du flux sont élevées.