

– Feuille d'exercices – Révisions –

– Exercices de la banque CCINP de sup –

Les questions précédées de * ne peuvent être réalisées pour le moment.

I Analyse

Exercice 1 Exercice de la banque CCINP supprimé depuis

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Solution de l'exercice 1

1. Par hypothèse, $\exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \implies v_n \neq 0$.

Ainsi la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir du rang N_0 .

De plus, comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / N \geq N_0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$ (1).

On considère $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et on fixe un entier N vérifiant (1).

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$.

C'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies -\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} - 1 \leq \frac{1}{2}$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \frac{u_n}{v_n} \geq \frac{1}{2}$.

Et donc, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \frac{u_n}{v_n} > 0$.

Ce qui implique que u_n et v_n sont de même signe à partir du rang N .

2. Au voisinage de $+\infty$,

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{et} \quad \tan\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{6n^3}$. On en déduit, d'après 1., qu'à partir d'un certain rang, u_n est négatif.

Exercice 2 Exercice 3 de la banque CCINP

1. On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \frac{1}{1+x}$.

Calculer, pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définition respectifs.

2. On pose $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$.

En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Solution de l'exercice 2

1. g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

On prouve, par récurrence, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$$

2. g et h sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc, d'après la formule de Leibniz, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^n \text{comb} n k 2^{n-k} e^{2x} \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n! e^{2x} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)! (1+x)^{k+1}}$$

3. Notons (P_n) la propriété : « Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont n fois dérivables sur I alors, fg est n fois dérivable sur I et : $\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{(n-k)} (x) g^{(k)}(x) \gg$

Prouvons que (P_n) est vraie par récurrence sur n .

- La propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ (dérivée d'un produit).
- Soit $n \geq 0$. Supposons la propriété vraie au rang n .

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I .

Les fonctions f et g sont, en particulier, n fois dérivables sur I et donc par hypothèse de récurrence la fonction fg l'est aussi avec $\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables sur I donc par opération sur les fonctions dérivables, la fonction $(fg)^{(n)}$ est encore dérivable sur I .

Ainsi la fonction fg est $(n+1)$ fois dérivable et :

$$\forall x \in I, (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x))$$

En décomposant la somme en deux et en procédant à un décalage d'indice sur la deuxième somme, on obtient :

$$\forall x \in I, (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

C'est-à-dire

$$(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \binom{n}{0} f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) + \binom{n}{n} f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x)$$

Or, en utilisant le triangle de Pascal, on a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

On remarque également que $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ et $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$.

On en déduit que $(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x)$.

Donc (P_{n+1}) est vraie.

Exercice 3 Exercice 4 de la banque CCINP

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.

2. Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a; b[$.

On suppose que f est continue sur $[a; b]$ et que f est dérivable sur $]a; x_0[$ et sur $]x_0; b[$.

Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0 , alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\implies$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Solution de l'exercice 3

1. **Théorème des accroissements finis** :

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$.

On suppose que f est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

2. On pose $\ell = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

Soit $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a; b]$.

En appliquant le théorème des accroissements finis, à la fonction f , entre x_0 et $x_0 + h$, on peut affirmer qu'il existe c_h strictement compris entre x_0 et $x_0 + h$ tel que $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(c_h)h$.

Quand $h \rightarrow 0$ (avec $h \neq 0$), on a, par encadrement, $c_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} x_0$.

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} f'(c_h) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell$.

On en déduit que f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.

3. La fonction g proposée dans l'indication est évidemment dérivable sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

g est également dérivable en 0 car $\frac{1}{h}(g(h) - g(0)) = h \sin \left(\frac{1}{h} \right)$.

Or $\left| h \sin \left(\frac{1}{h} \right) \right| \leq |h|$ donc par théorème d'encadrement, $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} h \sin \left(\frac{1}{h} \right) = 0$.

Donc, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

Cependant, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g'(x) = 2x \sin \left(\frac{1}{x} \right) - \cos \left(\frac{1}{x} \right)$.

$2x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ (car $\left| 2x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right| \leq 2|x|$), mais $x \mapsto \cos \left(\frac{1}{x} \right)$ n'admet pas de limite en 0.

Donc g' n'a pas de limite en 0.

Exercice 4 Exercice 5 de la banque CCINP

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) **Cas $\alpha \leq 0$**

En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.

(b) **Cas $\alpha > 0$**

Étudier la nature de la série.

Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

$$2. \text{ Déterminer la nature de la série } \sum_{n \geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}.$$

Solution de l'exercice 41. (a) **Cas $\alpha \leq 0$**

$\forall n \geq 3, \ln n \geq 1$ donc $(\ln n)^\alpha \leq 1$.

On en déduit que : $\forall n \geq 3, u_n \geq \frac{1}{n}$.

Or $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n}$ diverge. Donc, par critère de minoration pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

(b) **Cas $\alpha > 0$**

Soit $n \geq 3$.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ est continue par morceaux, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$ donc

$$\forall k \in \llbracket 3; n \rrbracket, f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1)$$

$$\text{Alors, } \sum_{k=3}^n f(k) \leq \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k f(x) dx \leq \sum_{k=3}^n f(k-1)$$

$$\text{C'est-à-dire, } \sum_{k=3}^n f(k) \leq \int_2^n f(x) dx \leq \sum_{k=2}^{n-1} f(k)$$

f étant positive, on peut donc écrire dans $[0; +\infty[$ l'inégalité

$$\sum_{k=3}^{+\infty} f(k) \leq \int_2^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=2}^{+\infty} f(k)$$

de sorte que la série et l'intégrale sont simultanément finies,

autrement dit, $\sum_{n \geq 2} f(n)$ et $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ sont de même nature.

Puisque $\int_2^{+\infty} f(x) dx \underset{t=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, on peut affirmer que : $\int_2^{+\infty} f(x) dx < \infty \iff \alpha > 1$.

On en déduit que : $\sum_{n \geq 2} f(n)$ converge $\iff \alpha > 1$.

$$2. \text{ On pose, pour tout entier naturel } n \geq 2, u_n = \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}. \text{ Au voisinage de } +\infty$$

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e - e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} = e - e^{n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} = e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} = \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{2n}$

De plus, au voisinage de $+\infty$, $\ln(n^2 + n) = 2 \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2 \ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Donc $\ln(n^2 + n) \underset{+\infty}{\sim} 2 \ln n$.

Et comme $e^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 1$, on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{8} \times \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Or, d'après 1.(b), $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge.

Donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

Exercice 5 Exercice 6 de la banque CCINP

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

Solution de l'exercice 5

1. Par hypothèse : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| \leq \varepsilon$. (1)

Prenons $\varepsilon = \frac{1 - \ell}{2}$.

Fixons un entier N vérifiant (1).

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| \leq \frac{1 - \ell}{2}$.

Et donc, $\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1 + \ell}{2}$.

On pose $q = \frac{1 + \ell}{2}$. On a donc $q \in]0; 1[$.

On a alors $\forall n \geq N, u_{n+1} \leq qu_n$.

On en déduit, par récurrence, que $\forall n \geq N, u_n \leq q^{n-N} u_N$.

Or pour tout $n \geq N, q^{n-N} u_N = u_N q^{-N} q^n$ et la série $\sum_{n \geq N} q^n$ converge car $q \in]0; 1[$. Par conséquent, la série

$\sum_{n \geq N} q^{n-N} u_n$ converge par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n!}{n^n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = e^{-n \ln(1 + \frac{1}{n})}$.

Or $-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} < 1$.

Donc, d'après 1, $\sum u_n$ converge.

Exercice 6 Exercice 7 de la banque CCINP

1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

(a) Prouver que si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors, u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

(b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive.

Prouver que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln n}{(\sqrt{n+3} - 1)}$.

Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1 .

Solution de l'exercice 6

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

(a) Par hypothèse, $\exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \implies v_n \neq 0$.

Ainsi la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir du rang N_0 .

De plus, comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / N \geq N_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$ (1).

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Fixons un entier N vérifiant (1).

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$.

C'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies -\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} - 1 \leq \frac{1}{2}$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \frac{u_n}{v_n} \geq \frac{1}{2}$

Et donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \frac{u_n}{v_n} > 0$.

Ce qui implique sur u_n et v_n sont de même signe à partir du rang N .

(b) On suppose que (v_n) est positive.

En reprenant les mêmes notations que dans 1.(a) : $\exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \implies v_n \neq 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \implies v_n > 0$.

De plus, on a prouvé dans 1.a que :

$\exists N \in \mathbb{N} / N \geq N_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies -\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} - 1 \leq \frac{1}{2}$ (*).

On en a déduit dans 1.(a) que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \frac{u_n}{v_n} > 0$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies v_n > 0$.

Donc on a aussi : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n > 0$.

D'après (*), $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}$ (**).

- **Premier cas :** Si $\sum v_n$ converge.

D'après (**), $\forall n \geq N, u_n \leq \frac{3}{2}v_n$.

Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

- **Deuxième cas :** Si $\sum v_n$ diverge.

D'après (**), $\forall n \geq N, \frac{1}{2}v_n \leq u_n$.

Donc, par critère de minoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

Par symétrie de la relation d'équivalence, on obtient le résultat.

$$2. \text{ On pose } \forall n \geq 2, u_n = \frac{((-1)^n + i) \ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3} - 1)}.$$

$$|u_n| = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln n}{(\sqrt{n+3} - 1)}.$$

$$\text{De plus } |u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2} \ln n}{n^{\frac{3}{2}}} = v_n$$

On a $n^{\frac{5}{4}}v_n = \frac{\sqrt{2} \ln n}{n^{\frac{1}{4}}}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{5}{4}}v_n = 0$. Alors, $v_n = o\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right)$ et $5/4 > 1$. On en déduit par théorème de comparaison que la série $\sum v_n$ converge.

D'après 1., $\sum_{n \geq 2} |u_n|$ converge. Donc $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge absolument.

De plus, la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$, donc $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

Exercice 7 Exercice 43 de la banque CCINP

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

- (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .
(b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
- Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\text{Arctan } x)$.

Solution de l'exercice 7

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \text{Arctan } x$.

- (a)
 - **Premier cas :** Si $u_1 < u_0$, alors puisque la fonction $f : x \mapsto \text{Arctan } x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $\text{Arctan}(u_1) < \text{Arctan}(u_0)$ c'est-à-dire $u_2 < u_1$.
Par récurrence, on prouve que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.
 - **Deuxième cas :** Si $u_1 > u_0$: Par un raisonnement similaire, on prouve que la suite (u_n) est strictement croissante.
 - **Troisième cas :** Si $u_1 = u_0$: La suite (u_n) est constante.

Pour connaître les variations de la suite (u_n) , il faut donc déterminer le signe de $u_1 - u_0$, c'est-à-dire le signe de $\text{Arctan}(u_0) - u_0$.

On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = \text{Arctan } x - x$ et on étudie le signe de la fonction g . La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{-x^2}{1+x^2}$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) < 0$.

Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et comme $g(0) = 0$ alors :

$\forall x \in]0; +\infty[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]-\infty; 0[, g(x) > 0$.

On a donc trois cas suivant le signe de x_0 :

- Si $x_0 > 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $x_0 = 0$, la suite (u_n) est constante.
- Si $x_0 < 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.

(b) La fonction g étant strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$, elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
0 admet donc un unique antécédent par g et, comme $g(0) = 0$, alors 0 est le seul point fixe de f .

Donc si la suite (u_n) converge, elle converge vers 0, le seul point fixe de f .

- **Premier cas** : Si $u_0 > 0$

L'intervalle $]0; +\infty[$ étant stable par f , on a par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge et ce vers 0, unique point fixe de f .

- **Deuxième cas** : Si $u_0 < 0$

Par un raisonnement similaire, on prouve que (u_n) est croissante et majorée par 0, donc elle converge vers 0.

- **Troisième cas** : Si $u_0 = 0$

La suite (u_n) est constante.

Conclusion : $\forall u_0 \in \mathbb{R}, (u_n)$ converge vers 0.

2. Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que, $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\text{Arctan } x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

On a alors $h(x) = h(u_0) = h(\text{Arctan}(u_0)) = h(u_1) = h(\text{Arctan}(u_1)) = h(u_2) = \dots$

Par récurrence, on prouve que, $\forall n \in \mathbb{N}, h(x) = h(u_n)$.

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ par convergence de la suite (u_n) vers 0 et par continuité de h .

On obtient ainsi : $h(x) = h(0)$ et donc h est une fonction constante. Réciproquement, toutes les fonctions constantes conviennent.

Conclusion : Seules les fonctions constantes répondent au problème.

Exercice 8 Exercice 46 de la banque CCINP

On considère la série : $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge.
3. $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Solution de l'exercice 8

1. $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$.

Or, au voisinage de $+\infty$, $\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Donc, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$.

D'après 1., $v_n = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

Donc $v_n = \frac{3\pi(-1)^{n+1}}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (*).

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge (d'après le critère spécial des séries alternées).

De plus, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc par critère de domination, $\sum_{n \geq 1} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument donc converge.

Donc d'après (*), $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.

3. D'après le développement asymptotique du 2., on a $|v_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{3\pi}{8n}$.

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc $\sum_{n \geq 1} |v_n|$ diverge, c'est-à-dire $\sum_{n \geq 1} v_n$ ne converge pas absolument.

Exercice 9 Exercice 55 de la banque CCINP

Soit a un nombre complexe.

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$

- (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
(b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E .
- Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.

Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n .

Indication : discuter suivant les valeurs de a .

Solution de l'exercice 9

- (a) Montrons que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.

La suite nulle appartient à E (obtenue pour $(u_0, u_1) = (0, 0)$).

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de E . Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Montrons que $w = u + \lambda v \in E$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + \lambda v_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $w_{n+2} = u_{n+2} + \lambda v_{n+2}$.

Or, $(u, v) \in E^2$, donc $w_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n + \lambda(2av_{n+1} + 4(ia - 1)v_n)$

c'est-à-dire $w_{n+2} = 2a(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + 4(ia - 1)(u_n + \lambda v_n)$

ou encore $w_{n+2} = 2aw_{n+1} + 4(ia - 1)w_n$.

Donc $w \in E$.

Donc E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.

- (b) On considère l'application φ définie par : $\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto (u_0, u_1) \end{cases}$.

Par construction, φ est linéaire et bijective.

Donc φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On en déduit que $\dim E = \dim \mathbb{C}^2 = 2$.

2. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

On introduit l'équation caractéristique $(E) : r^2 - 2ar - 4(ia - 1) = 0$.

On a deux possibilités :

- si (E) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 , alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ avec (α, β) que l'on détermine à partir des conditions initiales.
- si (E) a une unique racine double r , alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha n + \beta)r^n$ avec (α, β) que l'on détermine à partir des conditions initiales.

Le discriminant réduit de (E) est $\Delta' = a^2 + 4ia - 4 = (a + 2i)^2$.

- **Premier cas** : $a = -2i$

$r = a = -2i$ est racine double de (E) .

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha n + \beta)(-2i)^n$.

Or $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, donc $1 = \beta$ et $1 = (\alpha + \beta)(-2i)$.

On en déduit que $\alpha = \frac{i}{2} - 1$ et $\beta = 1$.

- **Deuxième cas** : $a \neq -2i$

On a deux racines distinctes $r_1 = 2(a + i)$ et $r_2 = -2i$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha(2(a + i))^n + \beta(-2i)^n$.

Or $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, donc $\alpha + \beta = 1$ et $2(a + i)\alpha - 2i\beta = 1$.

On en déduit, après résolution, que $\alpha = \frac{1 + 2i}{2a + 4i}$ et $\beta = \frac{2a + 2i - 1}{2a + 4i}$.

II Algèbre

II.1 Algèbre linéaire

Exercice 10 Exercice 59 de la banque CCINP

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n . On pose : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :

- (a) sans utiliser de matrice de f ,
- (b) en utilisant une matrice de f .

2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.

Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

3. (*) f est-il diagonalisable ?

Solution de l'exercice 10

1. f est clairement linéaire. (*)

De plus, $\forall P \in E \setminus \{0\}, \deg P' < \deg P$ donc $\deg(P - P') = \deg P$.

Et, si $P = 0$, alors $P - P' = 0$ donc $\deg(P - P') = \deg P = -\infty$.

On en déduit que $\forall P \in E, \deg f(P) = \deg P$.

Donc $f(E) \subset E$. (**).

D'après (*) et (**), f est bien un endomorphisme de E .

(a) Déterminons $\text{Ker } f$.

Soit $P \in \text{Ker } f$.

$f(P) = 0$ donc $P - P' = 0$ donc $\deg(P - P') = -\infty$.

Or, d'après ce qui précède, $\deg(P - P') = \deg P$ donc $\deg P = -\infty$.

Donc $P = 0$.

On en déduit que $\text{Ker } f = \{0\}$.

Donc f est injectif.

Or, $f \in \mathcal{L}(E)$ et E est de dimension finie ($\dim E = n + 1$) donc f est bijectif.

(b) Soit $e = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E . Soit A la matrice de f dans la base e .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -n \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

$\det A = 1$ d'où $\det A \neq 0$.

Donc f est bijectif.

2. Soit $Q \in E$.

D'après 1. : $\exists ! P \in E$, tel que $f(P) = Q$.

$P - P' = Q, P' - P'' = Q', \dots, P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)}$.

Or $P^{(n+1)} = 0$, donc, en sommant ces $n + 1$ égalités, $P = Q + Q' + \dots + Q^{(n)}$.

3. Reprenons les notations de 1.(b).

Tout revient à se demander si A est diagonalisable.

Notons χ_A le polynôme caractéristique de A .

D'après 1.(b), on a $\chi_A = (X - 1)^{n+1}$.

Donc 1 est l'unique valeur propre de A .

Ainsi, si A était diagonalisable, alors A serait semblable à la matrice unité I_{n+1} .

On aurait donc $A = I_{n+1}$.

Ce qui est manifestement faux car $f \neq \text{Id}$.

Donc A n'est pas diagonalisable et par conséquent, f n'est pas diagonalisable.

Exercice 11 Exercice 60 de la banque CCINP

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
2. f est-il surjectif?
3. Déterminer une base de $\text{Im } f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

Solution de l'exercice 11

1. On pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\text{On a } f(M) = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 2a + 4c & 2b + 4d \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } M \in \text{Ker } f \iff \exists(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} a = -2c \\ b = -2d \end{cases}.$$

$$\text{C'est-à-dire, } M \in \text{Ker } f \iff \exists(c, d) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$\text{On en déduit que } \text{Ker } f = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (*).$$

$$\text{On pose } M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après (*), la famille (M_1, M_2) est génératrice de $\text{Ker } f$.

De plus, les matrices M_1 et M_2 ne sont pas colinéaires; donc la famille (M_1, M_2) est libre et c'est une base de $\text{Ker } f$.

2. $\text{Ker } f \neq \{0\}$, donc f est non injectif.

Or f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

On en déduit que f est non surjectif.

3. Par la formule du rang, $\text{rg } f = 2$.

$$\text{On pose } M_3 = f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_4 = f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

M_3 et M_4 sont non colinéaires, donc (M_3, M_4) est une famille libre de $\text{Im } f$.

Comme $\text{rg } f = 2$, (M_3, M_4) est une base de $\text{Im } f$.

4. On a $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$. (1)

Prouvons que $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$.

Soit $M \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$.

D'après 1. et 3., $\exists(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = aM_1 + bM_2$ et $M = cM_3 + dM_4$.

$$\text{On a donc } \begin{cases} -2a = c \\ -2b = 2d \\ a = 2c \\ b = 4d \end{cases}.$$

On en déduit que $a = b = c = d = 0$.

Donc $M = 0$.

Donc $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$

Donc, d'après (1) et (2), $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

Exercice 12 Exercice 62 de la banque CCINP

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .

2. Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$:

(a) (*) en utilisant le lemme des noyaux.

(b) sans utiliser le lemme des noyaux.

3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.

Prouver que $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Solution de l'exercice 12

1. f est linéaire donc :

$$f^2 - f - 2\text{Id} = 0 \iff f \circ (f - \text{Id}) = (f - \text{Id}) \circ f = 2\text{Id} \iff f \circ \left(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\text{Id}\right) = \left(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\text{Id}\right) \circ f = \text{Id}$$

On en déduit que f est inversible, donc bijectif, et que $f^{-1} = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\text{Id}$.

2. (a) On pose $P = X^2 - X - 2$. On a $P = (X + 1)(X - 2)$.

$P_1 = X + 1$ et $P_2 = X - 2$ sont premiers entre eux.

Donc, d'après le lemme des noyaux, $\text{Ker } P(f) = \text{Ker } P_1(f) \oplus \text{Ker } P_2(f)$.

Or P est annulateur de f , donc $\text{Ker } P(f) = E$.

Donc $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

(b) • Analyse (unicité) :

Soit $x \in E$. Supposons que $x = a + b$ avec $a \in \text{Ker}(f + \text{Id})$ et $b \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Alors par linéarité de f , $f(x) = f(a) + f(b) = -a + 2b$.

On en déduit que $a = \frac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \frac{x + f(x)}{3}$.

• Synthèse (existence) :

Soit $x \in E$. On pose $a = \frac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \frac{x + f(x)}{3}$.

On a bien $x = a + b$. (*)

$$(f + \text{Id})(a) = \frac{1}{3}(2f(x) - f^2(x) + 2x - f(x)) = \frac{1}{3}(-f^2(x) + f(x) + 2x) = 0 \text{ car } f^2 - f - 2\text{Id} = 0.$$

Donc $a \in \text{Ker}(f + \text{Id})$. (**)

$$(f - 2\text{Id})(b) = \frac{1}{3}(f(x) + f^2(x) - 2x - 2f(x)) = \frac{1}{3}(f^2(x) - f(x) - 2x) = 0 \text{ car } f^2 - f - 2\text{Id} = 0.$$

Donc $b \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$. (***)

D'après (*), (**) et (***), $x = a + b$ avec $a \in \text{Ker}(f + \text{Id})$ et $b \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

• Conclusion : $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

3. Prouvons que $\text{Im}(f + \text{Id}) \subset \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Soit $y \in \text{Im}(f + \text{Id})$. $\exists x \in E$ / $y = f(x) + x$.

Alors $(f - 2\text{Id})(y) = f(y) - 2y = f^2(x) + f(x) - 2f(x) - 2x = f^2(x) - f(x) - 2x = 0$ car $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

Donc $y \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Donc $\text{Im}(f + \text{Id}) \subset \text{Ker}(f - 2\text{Id})$. (*)

Posons $\dim E = n$.

D'après 2., $n = \dim \text{Ker}(f + \text{Id}) + \dim \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

De plus, d'après le théorème du rang, $n = \dim \text{Ker}(f + \text{Id}) + \dim \text{Im}(f + \text{Id})$.

On en déduit que $\dim \text{Im}(f + \text{Id}) = \dim \text{Ker}(f - 2\text{Id})$. (**)

Donc, d'après (*) et (**), $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Exercice 13 Exercice 64 de la banque CCINP

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Démontrer que : $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \implies \text{Im } f = \text{Im } f^2$.

2. (a) Démontrer que : $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.
- (b) Démontrer que : $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \implies E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

Solution de l'exercice 13

1. Supposons $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

Indépendamment de l'hypothèse, on a toujours que $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$ (*).

Montrons que $\text{Im } f \subset \text{Im } f^2$.

Soit $y \in \text{Im } f$. Alors, $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Or $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$, donc $\exists (a, b) \in E \times \text{Ker } f$ tel que $x = f(a) + b$.

On a alors $y = f^2(a) \in \text{Im } f^2$.

Ainsi $\text{Im } f \subset \text{Im } f^2$ (**).

D'après (*) et (**), $\text{Im } f = \text{Im } f^2$.

2. (a) On a toujours $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$ et $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$.

On en déduit que $\text{Im } f^2 = \text{Im } f \iff \text{rg } f^2 = \text{rg } f$ et $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \iff \dim \text{Ker } f = \dim \text{Ker } f^2$.

Alors, en utilisant le théorème du rang,

$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{rg } f = \text{rg } f^2 \iff \dim \text{Ker } f = \dim \text{Ker } f^2 \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.

- (b) Supposons $\text{Im } f = \text{Im } f^2$.

Soit $x \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$.

$\exists a \in E$ tel que $x = f(a)$ et $f(x) = 0_E$.

On en déduit que $f^2(a) = 0_E$ c'est-à-dire $a \in \text{Ker } f^2$.

Or, d'après l'hypothèse et 2.(a), $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$ donc $a \in \text{Ker } f$ c'est-à-dire $f(a) = 0_E$.

C'est-à-dire $x = 0$.

Ainsi $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$. (***)

De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \dim E$. (****)

Donc, d'après (***) et (****), $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

Exercice 14 Exercice 71 de la banque CCINP

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D .

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Solution de l'exercice 14

1. $D = \text{Vect}((1, 2, 3))$.

$(1, 2, 3) \notin P$ car les coordonnées du vecteur $(1, 2, 3)$ ne vérifient pas l'équation de P .

Donc $D \cap P = \{0\}$ (*).

De plus, $\dim D + \dim P = 1 + 2 = \dim \mathbb{R}^3$. (**)

D'après (*) et (**), $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Par définition d'une projection, $p(u) \in P$ et $u - p(u) \in D$

$u - p(u) \in D$ signifie que $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u - p(u) = \alpha(1, 2, 3)$.

On en déduit que $p(u) = (x - \alpha, y - 2\alpha, z - 3\alpha)$. (***)

Or $p(u) \in P$ donc $(x - \alpha) + (y - 2\alpha) + (z - 3\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{1}{6}(x + y + z)$.

Et donc, d'après (**), $p(u) = \frac{1}{6}(5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z)$.

Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit A la matrice de p dans la base e . On a $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

3. On pose $e'_1 = (1, 2, 3)$, $e'_2 = (1, -1, 0)$ et $e'_3 = (0, 1, -1)$.

e'_1 est une base de D et (e'_2, e'_3) est une base de P .

Or $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ donc $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

De plus $e'_1 \in D$ donc $p(e'_1) = 0$. $e'_2 \in P$ et $e'_3 \in P$ donc $p(e'_2) = e'_2$ et $p(e'_3) = e'_3$.

Ainsi, $\text{Mat}_{e'}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et c'est une matrice diagonale.

Exercice 15 Exercice 90 de la banque CCINP

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.

Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi: \begin{cases} \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}^3 \\ P \longmapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

(a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

(b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .

3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .

4. Application : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1)$, $B(1, 3)$, $C(2, 1)$.

Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C .

Solution de l'exercice 15

1. Par linéarité de l'évaluation $P \mapsto P(a)$ (où a est un scalaire fixé), Φ est linéaire.

Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $\Phi(P) = 0$.

Alors $P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 0$, donc P admet trois racines distinctes.

Or P est de degré inférieur ou égal à 2 ; donc P est nul.

Ainsi, $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$ i.e. Φ est injective.

Enfin, $\dim(\mathbb{K}_2[X]) = \dim(\mathbb{K}^3) = 3$ donc Φ est bijective.

Par conséquent, Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{K}_2[X]$ dans $\mathbb{K}^3$.

2. (a) Φ est un isomorphisme donc l'image réciproque d'une base est une base.

Ainsi, (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

(b) $L_1 \in \mathbb{K}_2[X]$ et vérifie $\Phi(L_1) = (1, 0, 0)$ i.e. $(L_1(a_1), L_1(a_2), L_1(a_3)) = (1, 0, 0)$.

Donc, comme a_2 et a_3 sont distincts, $(X - a_2)(X - a_3) \mid L_1$.

Or $\deg L_1 \leq 2$, donc $\exists k \in \mathbb{K}$ tel que $L_1 = k(X - a_2)(X - a_3)$.

La valeur $L_1(a_1) = 1$ donne $k = \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$.

Donc $L_1 = \frac{(X - a_2)(X - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$.

Un raisonnement analogue donne $L_2 = \frac{(X - a_1)(X - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}$ et $L_3 = \frac{(X - a_1)(X - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$.

3. (L_1, L_2, L_3) base de $\mathbb{K}_2[X]$ donc $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$.

Par construction, $\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$, $L_i(a_j) = \delta_{ij}$ donc $P(a_j) = \lambda_j$.

Ainsi, $P = P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3$.

4. On pose $a_1 = 0, a_2 = 1$ et $a_3 = 2$. Ces trois réels sont bien distincts.

On cherche $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $(P(a_1), P(a_2), P(a_3)) = (1, 3, 1)$.

Par bijectivité de Φ et d'après 3., l'unique solution est le polynôme $P = 1.L_1 + 3.L_2 + 1.L_3$.

On a $L_1 = \frac{(X-1)(X-2)}{2}$, $L_2 = \frac{X(X-2)}{-1}$ et $L_3 = \frac{X(X-1)}{2}$.

Donc $P = -2X^2 + 4X + 1$.

II.2 Algèbre bilinéaire

Exercice 16 Exercice 63 de la banque CCINP

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

On pose $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$.

Pour tout endomorphisme u de E , on note u^* l'adjoint de u .

1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E$, $\langle u(x) | x \rangle = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $u \circ u^* = u^* \circ u$.
- ii) $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle u(x) | u(y) \rangle = \langle u^*(x) | u^*(y) \rangle$.
- iii) $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Solution de l'exercice 16

1. On se place sur $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.

On considère u la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a bien $\forall x \in E$, $\langle u(x) | x \rangle = 0$ mais u n'est pas l'endomorphisme nul.

2. • Prouvons que i. $\iff$ ii. Procédons par double implication.

- Supposons que $u \circ u^* = u^* \circ u$. Prouvons que $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle u(x) | u(y) \rangle = \langle u^*(x) | u^*(y) \rangle$.

Soit $(x, y) \in E^2$.

Par définition de l'adjoint, $\langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | u^* \circ u(y) \rangle$.

Or, par hypothèse, $u \circ u^* = u^* \circ u$.

Donc $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x | u \circ u^*(y) \rangle$.

Or, par définition de l'adjoint, $\langle x | u \circ u^*(y) \rangle = \langle u^*(x) | u^*(y) \rangle$.

Donc $\langle u(x) | u(y) \rangle = \langle u^*(x) | u^*(y) \rangle$.

- Supposons que $\forall (x, y) \in E^2, (u(x) | u(y)) = (u^*(x) | u^*(y))$. Prouvons que $u \circ u^* = u^* \circ u$.

Soit $x \in E$.

Prouvons que $u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x) \in E^\perp$.

Soit $y \in E$.

Par bilinéarité du produit scalaire, $(u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x) | y) = (u \circ u^*(x) | y) - (u^* \circ u(x) | y)$.

Or, par définition de l'adjoint, $(u \circ u^*(x) | y) = (u^*(x) | u^*(y))$ et $(u^* \circ u(x) | y) = (u(x) | u(y))$.

Donc $(u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x) | y) = (u^*(x) | u^*(y)) - (u(x) | u(y))$

Or, par hypothèse, $(u^*(x) | u^*(y)) = (u(x) | u(y))$.

Donc $(u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x) | y) = (u(x) | u(y)) - (u(x) | u(y)) = 0$.

Donc $u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x) \in E^\perp$.

Or $E^\perp = \{0\}$

Donc $u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x) = 0$.

- Prouvons que ii. $\iff$ iii. Procédons par double implication.

- On suppose que $\forall (x, y) \in E^2, (u(x) | u(y)) = (u^*(x) | u^*(y))$.

Donc, en prenant $y = x$, on obtient : $\forall x \in E, \|u(x)\|^2 = \|u^*(x)\|^2$.

Or, $\forall x \in E, \|u(x)\| \geq 0$ et $\|u^*(x)\| \geq 0$.

Donc $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

- On suppose que $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$. Prouvons que $\forall (x, y) \in E^2, (u(x) | u(y)) = (u^*(x) | u^*(y))$.

Soit $(x, y) \in E^2$.

D'après une identité de polarisation, $(u(x) | u(y)) = \frac{1}{2} (\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2)$. Or, u est linéaire donc $\|u(x) + u(y)\|^2 = \|u(x + y)\|^2$.

De plus par hypothèse, $\|u(x + y)\| = \|u^*(x + y)\|$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ et $\|u(y)\| = \|u^*(y)\|$.

Donc $(u(x) | u(y)) = \frac{1}{2} (\|u^*(x + y)\|^2 - \|u^*(x)\|^2 - \|u^*(y)\|^2)$.

Or u^* est linéaire donc $\|u^*(x + y)\| = \|u^*(x) + u^*(y)\|$.

Donc $(u(x) | u(y)) = \frac{1}{2} (\|u^*(x) + u^*(y)\|^2 - \|u^*(x)\|^2 - \|u^*(y)\|^2)$.

Or, d'après une identité de polarisation,

$$(u^*(x) | u^*(y)) = \frac{1}{2} (\|u^*(x) + u^*(y)\|^2 - \|u^*(x)\|^2 - \|u^*(y)\|^2)$$

Donc $(u(x) | u(y)) = (u^*(x) | u^*(y))$

Exercice 17 Exercice 76 de la banque CCINP

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
(b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R}), \forall x \in [a; b] \ f(x) > 0\}$.

Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt, f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

Solution de l'exercice 17

1. (a) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(|)$.

On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x, y) \in E^2, |(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$

Preuve : Soit $(x, y) \in E^2$. Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2$.

On remarque que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) \geq 0$.

De plus, $P(\lambda) = (x + \lambda y | x + \lambda y)$.

Donc, par bilinéarité et symétrie de $(|)$, $P(\lambda) = \|y\|^2 \lambda^2 + 2\lambda(x|y) + \|x\|^2$.

On remarque que $P(\lambda)$ est un trinôme en λ si et seulement si $\|y\|^2 \neq 0$.

- **Premier cas :** si $y = 0$

Alors $|(x|y)| = 0$ et $\|x\| \|y\| = 0$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.

- **Deuxième cas :** $y \neq 0$

Alors $\|y\| = \sqrt{(y|y)} \neq 0$ car $y \neq 0$ et $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Donc, P est un trinôme du second degré en λ qui est positif ou nul.

On en déduit que le discriminant réduit Δ est négatif ou nul.

Or $\Delta = (x|y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2$ donc $(x|y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$.

Et donc, $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$.

- (b) On reprend les notations précédentes.

Prouvons que $\forall (x, y) \in E^2, |(x|y)| = \|x\| \|y\| \iff x$ et y sont colinéaires.

- Supposons que $|(x|y)| = \|x\| \|y\|$.

- **Premier cas :** si $y = 0$, alors x et y sont colinéaires.

- **Deuxième cas :** si $y \neq 0$, alors le discriminant de P est nul et donc P admet une racine double λ_0 .

C'est-à-dire $P(\lambda_0) = 0$ et comme $(|)$ est définie positive, alors $x + \lambda_0 y = 0$.

Donc x et y sont colinéaires.

- Supposons que x et y soient colinéaires.

Alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.

Supposons par exemple que $x = \alpha y$ (raisonnement similaire pour l'autre cas).

$|(x|y)| = |\alpha| \cdot |(y|y)| = |\alpha| \|y\|^2$ et $\|x\| \|y\| = \sqrt{(x|x)} \|y\| = \sqrt{\alpha^2 (y|y)} \|y\| = |\alpha| \cdot \|y\|^2$.

Donc, on a bien l'égalité.

2. On considère le produit scalaire classique sur $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ défini par :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R}), (f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

On pose $A = \left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt, f \in E \right\}$.

$A \subset \mathbb{R}$

$A \neq \emptyset$ car $(b-a)^2 \in A$ (valeur obtenue pour la fonction $t \mapsto 1$ de E).

De plus, $\forall f \in E, \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \geq 0$ donc A est minorée par 0.

On en déduit que A admet une borne inférieure et on pose $m = \inf A$.

Soit $f \in E$.

On considère la quantité $\left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2$.

D'une part, $\left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2 = \left(\int_a^b 1 dt \right)^2 = (b-a)^2$.

D'autre part, si on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(\mid)$ on obtient :

$$\left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2 \leq \int_a^b f(t) dt \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt$$

On en déduit que $\forall f \in E, \int_a^b f(t) dt \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \geq (b-a)^2$.

Donc $m \geq (b-a)^2$.

Et, si on considère la fonction $f : t \mapsto 1$ de E , alors $\int_a^b f(t) dt \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt = (b-a)^2$.

Donc $m = (b-a)^2$.

Exercice 18 Exercice 77 de la banque CCINP

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E .

Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.

2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

- (a) Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
- (b) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Solution de l'exercice 18

1. On a $A \subset (A^\perp)^\perp$. (*)

En effet, $\forall x \in A, \forall y \in A^\perp, (x \mid y) = 0$.

C'est-à-dire, $\forall x \in A, x \in (A^\perp)^\perp$.

Comme E est un espace euclidien, $E = A \oplus A^\perp$ donc $\dim A = n - \dim A^\perp$.

De même, $E = A^\perp \oplus (A^\perp)^\perp$ donc $\dim (A^\perp)^\perp = n - \dim A^\perp$.

Donc $\dim (A^\perp)^\perp = \dim A$ (**).

D'après (*) et (**), $(A^\perp)^\perp = A$.

2. (a) Procédons par double inclusion.

- Prouvons que $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$.

Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Soit $y \in F + G$. Alors $\exists (f, g) \in F \times G$ tel que $y = f + g$.

$$(x \mid y) = \underbrace{(x \mid f)}_{\substack{=0 \\ \text{car } f \in F \\ \text{et } x \in F^\perp}} + \underbrace{(x \mid g)}_{\substack{=0 \\ \text{car } g \in G \\ \text{et } x \in G^\perp}} = 0$$

Donc $\forall y \in (F + G), (x \mid y) = 0$.

Donc $x \in (F + G)^\perp$.

- Prouvons que $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

Soit $x \in (F + G)^\perp$.

$\forall y \in F$, on a $(x | y) = 0$ car $y \in F \subset F + G$. Donc $x \in F^\perp$.

De même, $\forall z \in G$, on a $(x | z) = 0$ car $z \in G \subset F + G$. Donc $x \in G^\perp$.

On en déduit que $x \in F^\perp \cap G^\perp$.

Finalement, par double inclusion, $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

- (b) D'après 2.(a), appliquée à $F^\perp$ et à $G^\perp$, on a $(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp$.

Donc, d'après 1., $(F^\perp + G^\perp)^\perp = F \cap G$.

Donc $((F^\perp + G^\perp)^\perp)^\perp = (F \cap G)^\perp$.

C'est-à-dire, en utilisant 1. à nouveau, $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

Exercice 19 Exercice 78 de la banque CCINP

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E .

On note $\langle x | y \rangle$ le produit scalaire de x et de y et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E , tel que : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
 - (a) Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$.
 - (b) Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E .

Solution de l'exercice 19

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall (x, y) \in E^2, \|u(x)\| = \|x\|$.
 - (a) Soit $(x, y) \in E^2$.
 On a, d'une part, $\|u(x + y)\|^2 = \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2$. (*)
 D'autre part,
 $\|u(x + y)\|^2 = \|u(x) + u(y)\|^2 = \|u(x)\|^2 + 2(u(x) | u(y)) + \|u(y)\|^2 = \|x\|^2 + 2(u(x) | u(y)) + \|y\|^2$ (**).
 On en déduit, d'après (*) et (**), que $(u(x) | u(y)) = (x | y)$.
 - (b) Soit $x \in \text{Ker } u$.
 Par hypothèse, $0 = \|u(x)\|^2 = \|x\|^2$. Donc $x = 0$.
 Donc $\text{Ker } u = \{0_E\}$ et u est injectif.
 Puisque E est de dimension finie, on peut conclure que l'endomorphisme u est bijectif.
2. Montrons que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des endomorphismes orthogonaux est un sous-groupe du groupe linéaire $(\text{GL}(E), \circ)$.
 - On a $\mathcal{O}(E) \subset \text{GL}(E)$ en vertu de ce qui précède.
 - On a aussi, évidemment, $\text{Id}_E \in \mathcal{O}(E)$. Donc $\mathcal{O}(E) \neq \emptyset$.
 - Soit $(u, v) \in (\mathcal{O}(E))^2$.
 $\forall x \in E, \|u \circ v^{-1}(x)\| = \|u(v^{-1}(x))\| = \|v^{-1}(x)\|$ car $u \in \mathcal{O}(E)$.
 Et $\|v^{-1}(x)\| = \|v(v^{-1}(x))\| = \|x\|$ car $v \in \mathcal{O}(E)$.
 Donc $\forall x \in E, \|u \circ v^{-1}(x)\| = \|x\|$.
 On en déduit, d'après 1. (a), que $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

Donc $\mathcal{O}(E)$ des endomorphismes orthogonaux est un sous-groupe du groupe linéaire $(\text{GL}(E), \circ)$.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

- Supposons que $u \in \mathcal{O}(E)$.

Soit $(i, j) \in (\llbracket 1; n \rrbracket)^2$.

$u \in \mathcal{O}(E)$ donc $(u(e_i) | u(e_j)) = (e_i | e_j)$.

Or e est une base orthonormée de E donc $(e_i | e_j) = \delta_i^j$ où δ_i^j désigne le symbole de Kronecker.

On en déduit que $\forall (i, j) \in (\llbracket 1; n \rrbracket)^2, (u(e_i) | u(e_j)) = \delta_i^j$.

C'est-à-dire $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une famille orthonormée de E .

Donc, c'est une famille libre à n éléments de E avec $\dim E = n$.

Donc $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E .

- Réciproquement, supposons que $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E .

Soit $x \in E$.

Comme e est une base orthonormée de E , $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Alors,

$$\|x\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \mid \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j (e_i \mid e_j)$$

Or e est une base orthonormée de E donc $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ (*)

De même, par linéarité de u ,

$$\|u(x)\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i u(e_i) \mid \sum_{j=1}^n x_j u(e_j) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j (u(e_i) \mid u(e_j))$$

Or $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E , donc $\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ (**).

D'après (*) et (**), $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.

Donc, d'après 1.(a), $u \in \mathcal{O}(E)$.

Exercice 20 Exercice 79 de la banque CCINP

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que $\int_a^b h(x) dx = 0 \implies h = 0$

2. Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall (f, g) \in E^2, \langle f | g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$.

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Solution de l'exercice 20

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_a^b h(x)dx = 0$.

On pose $\forall x \in [a; b], F(x) = \int_a^x h(t)dt$.

La fonction h est continue sur $[a; b]$ donc F est dérivable sur $[a; b]$.

De plus, $\forall x \in [a; b], F'(x) = h(x)$.

Or h est positive sur $[a; b]$ donc F est croissante sur $[a; b]$. (*)

Or $F(a) = 0$ et, par hypothèse, $F(b) = 0$. C'est-à-dire $F(a) = F(b)$. (**)

D'après (*) et (**), F est constante sur $[a; b]$.

Donc $\forall x \in [a; b], F'(x) = 0$. C'est-à-dire, $\forall x \in [a; b], h(x) = 0$.

2. On pose $\forall (f, g) \in E^2, (f | g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Par linéarité de l'intégrale, $(\cdot | \cdot)$ est linéaire par rapport à sa première variable.

Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(|)$ est symétrique.

On en déduit que $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)

Soit $f \in E$. $(f | f) = \int_a^b f^2(x)dx$

Or $x \mapsto f^2(x)$ est positive sur $[a; b]$ et $a < b$ donc $(f | f) \geq 0$.

Donc $(|)$ est positive. (**)

Soit $f \in E$ telle que $(f | f) = 0$.

Alors $\int_a^b f^2(x)dx = 0$

Or $x \mapsto f^2(x)$ est positive et continue sur $[a; b]$.

Donc, d'après 1., f est nulle sur $[a; b]$. On en déduit que $(|)$ est définie. (***)

D'après (*), (**) et (***), $(|)$ est un produit scalaire sur E .

3. On a $|(f|g)| \leq \|f\| \|g\|$ si f et g sont continues sur $[a; b]$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz associée au produit scalaire défini en 2.

Avec $a = 0, b = 1, f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto e^{-x}$, la fonction fg est positive sur $[0; 1]$ et on a donc

$$\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx \leq \sqrt{\int_0^1 x dx} \sqrt{\int_0^1 e^{-2x} dx}$$

$$\text{Or, } \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \text{ et } \int_0^1 e^{-2x} dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^1 = \frac{1 - e^{-2}}{2}.$$

$$\text{On a donc } \int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx \leq \frac{\sqrt{1 - e^{-2}}}{2}.$$

Exercice 21 Exercice 80 de la banque CCINP

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Démontrer que $\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E .
- Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.
Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Solution de l'exercice 21

1. On pose $\forall (f, g) \in E^2, (f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$

Par linéarité de l'intégrale, $(|)$ est linéaire par rapport à sa première variable.

Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(|)$ est symétrique.

On en déduit que $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)

Soit $f \in E$. $(f | f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t)dt$.

Or $t \mapsto f^2(t)$ est positive sur $[0, 2\pi]$ et $0 < 2\pi$, donc $(f | f) \geq 0$.

Donc $(|)$ est positive. (**)

Soit $f \in E$ telle que $(f | f) = 0$. Alors $\int_0^{2\pi} f^2(t)dt = 0$

Or $t \mapsto f^2(t)$ est positive et continue sur $[0, 2\pi]$.

Donc, f est nulle sur $[0, 2\pi]$.

Or f est 2π -périodique donc $f = 0$.

Donc $(|)$ est définie. (***)

D'après (*), (**) et (***), $(|)$ est un produit scalaire sur E .

2. On a $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$.

Or la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2} \cos(2x) \in F$. De plus, si on note h l'application $x \mapsto \frac{1}{2}$,

$(h | f) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = 0$ et $(h | g) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2x)dx = 0$ donc $h \in F^\perp$ (car $F = \text{Vect}(f, g)$).

On en déduit que le projeté orthogonal de u sur F est $x \mapsto -\frac{1}{2} \cos(2x)$.

Exercice 22 Exercice 81 de la banque CCINP

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^T A')$, où $\text{tr}(A^T A')$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A' .

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Solution de l'exercice 22

1. On a immédiatement $\mathcal{F} = \text{Vect}(I_2, K)$ avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut donc affirmer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\mathcal{F} = \text{Vect}(I_2, K)$ donc (I_2, K) est une famille génératrice de $\mathcal{F}$.

De plus, I_2 et K sont non colinéaires donc la famille (I_2, K) est libre.

On en déduit que (I_2, K) est une base de $\mathcal{F}$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Comme (I_2, K) est une base de $\mathcal{F}$,

$$M \in \mathcal{F}^\perp \iff \varphi(M, I_2) = 0 \text{ et } \varphi(M, K) = 0 \iff a + d = 0 \text{ et } b - c = 0 \iff d = -a \text{ et } c = b.$$

On en déduit que $\mathcal{F}^\perp = \text{Vect}(A, B)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(A, B) est une famille libre et génératrice de $\mathcal{F}^\perp$ donc (A, B) est une base de $\mathcal{F}^\perp$.

3. On peut écrire $J = I_2 + B$ avec $I_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^\perp$.

Donc le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}^\perp$ est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. On note $d(J, \mathcal{F})$ la distance de J à $\mathcal{F}$.

D'après le cours, $d(J, \mathcal{F}) = \|J - p_{\mathcal{F}}(J)\|$ où $p_{\mathcal{F}}(J)$ désigne le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}$.

On peut écrire à nouveau que $J = I_2 + B$ avec $I_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^\perp$.

Donc $p_{\mathcal{F}}(J) = I_2$.

On en déduit que $d(J, \mathcal{F}) = \|J - p_{\mathcal{F}}(J)\| = \|J - I_2\| = \|B\| = \sqrt{2}$.

Exercice 23 Exercice 82 de la banque CCINP

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A | A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Solution de l'exercice 23

1. On pose $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, on pose $(A | A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E, A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E, B = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \in E$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(A + A' | B) = \left(\begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \right) = (a + a')a'' + (b + b')b'' + (c + c')c'' + (d + d')d''.$$

$$\text{Donc } (A + A' | B) = (aa'' + bb'' + cc'' + dd'') + (a'a'' + b'b'' + c'c'' + d'd'') = (A | B) + (A' | B).$$

$$(\alpha A | B) = \left(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \right) = \alpha aa'' + \alpha bb'' + \alpha cc'' + \alpha dd'' = \alpha(A | B).$$

On en déduit que $(\cdot | \cdot)$ est linéaire par rapport à sa première variable.

De plus, par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(\cdot | \cdot)$ est symétrique.

Donc $(\cdot | \cdot)$ est une forme bilinéaire et symétrique. (*)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$

$$(A | A) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0. \text{ Donc } (\cdot | \cdot) \text{ est positive. (**)}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ telle que $(A | A) = 0$

Alors $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$.

Comme il s'agit d'une somme de termes tous positifs, on en déduit que $a = b = c = d = 0$ donc $A = 0$.

Donc $(\cdot|\cdot)$ est définie. (***)

D'après (*), (**), (***), $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E .

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in F \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in F^\perp, \text{ car } \forall (a, b, d) \in \mathbb{R}^3, \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) = 0.$$

On en déduit que le projeté orthogonal, noté $p_F(A)$, de A sur F est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Ainsi, } d(A, F) = \|A - p_F(A)\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\| = 1$$

II.3 Complexes et polynômes

Exercice 24 Exercice 84 de la banque CCINP

- Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
- En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Solution de l'exercice 24

- Soit z un complexe non nul. Posons $z = x + iy$ avec x et y réels.

Un argument de z est un réel θ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$ avec $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- $z = 0$ n'est pas solution de l'équation $z^n = 1$.

Les complexes solutions s'écriront donc sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\text{On a } z^n = 1 \iff \begin{cases} r^n = 1 \\ \text{et} \\ n\theta = 0 \bmod{2\pi} \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \text{et} \\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les réels $\frac{2k\pi}{n}$, pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, sont deux à deux distincts et $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \frac{2k\pi}{n} \in [0; 2\pi[$.

De plus, si $\ell \in \mathbb{Z}$, alors en faisant la division euclidienne de ℓ par n , il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, tel que $\ell = nq + k$. Alors, $\frac{2\ell\pi}{n} = 2q\pi + \frac{2k\pi}{n}$ et $e^{i\frac{2\ell\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

On en déduit que les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont exactement les $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ et qu'il y en a n .

Remarque : on peut aussi utiliser l'argument suivant. Les solutions de l'équation $z^n = 1$ étant également racines du polynôme $X^n - 1$, il ne peut y en avoir d'autres et il y en a au plus n . C'est donc l'ensemble déterminé.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$ est $S = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$.

3. $z = i$ n'étant pas solution de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$,

$$\begin{aligned}(z + i)^n = (z - i)^n &\iff \left(\frac{z + i}{z - i}\right)^n = 1 \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \text{ tel que } \frac{z + i}{z - i} = e^{\frac{i2k\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \text{ tel que } z \left(1 - e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right) = -i \left(1 + e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right)\end{aligned}$$

En remarquant que $z \left(1 - e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right) = -i \left(1 + e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right)$ n'admet pas de solution pour $k = 0$, on en déduit que :

$$(z + i)^n = (z - i)^n \iff \exists k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \text{ tel que } z = i \frac{e^{\frac{i2k\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{i2k\pi}{n}} - 1}$$

En utilisant la méthode de l'angle moitié, on a $i \frac{e^{\frac{i2k\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{i2k\pi}{n}} - 1} = \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}$ et on voit que les solutions sont des réels.

$$(z + i)^n = (z - i)^n \iff \exists k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \text{ tel que } z = \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)} = \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

La fonction cotan est bijective de $]0; \pi[$ dans $\mathbb{R}$. L'équation admet donc $n-1$ solutions réelles.

On pouvait aussi voir que si z est solution de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ alors $|z + i| = |z - i|$ et donc le point d'affixe z appartient à la médiatrice de $[A, B]$, A et B étant les points d'affixes respectives i et $-i$, c'est-à-dire à la droite des réels.

Exercice 25 Exercice 85 de la banque CCINP

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.

- (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$.
 (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :

a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in \llbracket 0; r-1 \rrbracket$, $P^{(k)}(a) = 0$

2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution de l'exercice 25

1. (a) $P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$

(b) a est une racine d'ordre r de $P \iff \exists Q \in \mathbb{R}_{n-r}[X]$ tel que $Q(a) \neq 0$ et $P = (X - a)^r Q$

$$\iff \exists (q_0, \dots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = (X - a)^r \sum_{i=0}^{n-r} q_i (X - a)^i$$

$$\iff \exists (q_0, \dots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = \sum_{i=0}^{n-r} q_i (X - a)^{r+i}$$

$$\iff \exists (q_0, \dots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \quad \text{et} \quad P = \sum_{k=r}^n q_{k-r} (X - a)^k$$

D'après la formule de Taylor (rappelée ci-dessus) et l'unicité de la décomposition de P dans la base $(1, (X-a), \dots, (X-a)^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ il vient enfin :

$$a \text{ est une racine d'ordre } r \text{ de } P \iff \forall k \in \{0, \dots, r-1\} \quad P^{(k)}(a) = 0 \text{ et } P^{(r)}(a) \neq 0$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} 1 \text{ est racine double de } P = X^5 + aX^2 + bX &\iff P(1) = P'(1) = 0 \text{ et } P''(1) \neq 0 \\ &\iff \begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 5 + 2a + b = 0 \\ 20 + 2a \neq 0 \end{cases} \\ &\iff a = -4 \text{ et } b = 3 \end{aligned}$$

On obtient $X^5 - 4X^2 + 3X = X(X-1)^2(X^2 + 2X + 3)$ et c'est la factorisation cherchée car le discriminant de $X^2 + 2X + 3$ est strictement négatif.

Exercice 26 Exercice 87 de la banque CCINP

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n, n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \dots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leq n \text{ et } \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, P(a_i) = b_i$$

2. Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Expliciter ce polynôme P , que l'on notera L_k , lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

3. Prouver que $\forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket, \sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$.

Solution de l'exercice ??

1. L'application $u : \begin{matrix} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{matrix}$ est linéaire.

Montrons que $\text{Ker } u = \{0\}$.

Si $P \in \text{Ker } u$, alors $P(a_0) = P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0$ et le polynôme P , de degré inférieur ou égal à n , admet $n+1$ racines distinctes.

Donc $P = 0$.

Ainsi u est injective et comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, u est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Enfin les conditions recherchées sont équivalentes à : $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $u(P) = (b_0, \dots, b_n)$.

La bijectivité de u dit que ce problème admet une unique solution P et on a $P = u^{-1}((b_0, \dots, b_n))$.

2. Pour ce choix de $b_0, b_1, \dots, b_n$ le polynôme L_k vérifie les conditions :

$$\deg L_k \leq n \text{ et } \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, L_k(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Comme $a_0, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n$ sont n racines distinctes de L_k qui est de degré $\leq n$, il existe nécessairement $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$L_k = \lambda \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (X - a_i)$$

La condition supplémentaire $L_k(a_k) = 1$ donne $\lambda = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (a_k - a_i)}$ et finalement :

$$L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$

3. Soit $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Les polynômes $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k$ et X^p vérifient les mêmes conditions d'interpolation :

$$\deg P \leq n \text{ et } \forall i \in \{0, \dots, n\} \quad P(a_i) = a_i^p$$

Par l'unicité vue en première question, on a $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$.

Exercice 27 Exercice 89 de la banque CCINP

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$.

Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Solution de l'exercice 27

1. On pose $Z = z^k - 1$.

$$Z = e^{i\frac{k2\pi}{n}} - 1 = e^{i\frac{k\pi}{n}} \left(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}} \right) = e^{i\frac{k\pi}{n}} 2i \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right)$$

$$\text{c'est-à-dire } Z = 2 \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) e^{i\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, on a $0 < \frac{k\pi}{n} < \pi$, donc $\sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) > 0$.

Donc le module de Z est $2 \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right)$ et un argument de Z est $\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2}$.

2. On remarque que pour $k=0$, $|z^k - 1| = 0$ et $\sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) = 0$.

Donc d'après la question précédente, on a $S = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right)$.

S est donc la partie imaginaire de $T = 2 \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}}$.

Or, comme $e^{i\frac{\pi}{n}} \neq 1$, on a $T = 2 \frac{1 - e^{i\pi}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} = \frac{4}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}}$.

$$\text{Or } 1 - e^{i\frac{\pi}{n}} = e^{i\frac{\pi}{2n}} \left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}} \right) = -2ie^{i\frac{\pi}{2n}} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

$$\text{On en déduit que } T = \frac{4e^{-i\frac{\pi}{2n}}}{-2i \sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{2n}} ie^{-i\frac{\pi}{2n}} = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{2n}} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right).$$

$$\text{En isolant la partie imaginaire de } T, \text{ et comme } \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \neq 0 \ (n \geq 2), \text{ on en déduit que } S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 28 Exercice 92 de la banque CCINP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n .

On pose : $\forall (A, B) \in E^2, \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A .

1. Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E .

Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$.

On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E .

On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E .

- (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
- (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.

3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E .

Déterminer $F^\perp$.

Solution de l'exercice 28

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à sa première variable par linéarité de la trace, de la transposition et par distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans E .

De plus, une matrice et sa transposée ayant la même trace, on a :

$$\forall (A, B) \in E^2, \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B) = \text{tr}\left((A^T B)^T\right) = \text{tr}(B^T A) = \langle B, A \rangle.$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

On en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire et symétrique. (1)

Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$.

$$\langle A, A \rangle = \text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n (A^T A)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (A^T)_{i,k} A_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{k,i}^2$$

Donc $\langle A, A \rangle \geq 0$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive. (2)

Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$ telle que $\langle A, A \rangle = 0$.

Alors $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{k,i}^2 = 0$. Or, $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, A_{k,i}^2 \geq 0$.

Donc $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, A_{k,i} = 0$. Donc $A = 0$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie. (3)

D'après (1),(2) et (3), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

Remarque importante : Soit $(A, B) \in E^2$.

On pose $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (B_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Alors

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^n (A^T B)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (A^T)_{i,k} B_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{k,i} B_{k,i}$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique sur E .

2. (a) Soit $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$.

alors $M^T = M$ et $M^T = -M$ donc $M = -M$ et $M = 0$.

Donc $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$. (1)

Soit $M \in E$.

Posons $S = \frac{M + M^T}{2}$ et $A = \frac{M - M^T}{2}$.

On a $M = S + A$

$S^T = \left(\frac{M + M^T}{2}\right)^T = \frac{1}{2} (M^T + (M^T)^T) = \frac{1}{2} (M^T + M) = S$, donc $S \in S_n(\mathbb{R})$.

$A^T = \left(\frac{M - M^T}{2}\right)^T = \frac{1}{2} (M^T - (M^T)^T) = \frac{1}{2} (M^T - M) = -A$, donc $A \in A_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $E = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$.

D'après (1) et (2), $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

Remarque : on pouvait également procéder par analyse et synthèse pour prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

(b) Prouvons que $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^\perp$.

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Prouvons que $\forall A \in A_n(\mathbb{R}), \langle S, A \rangle = 0$.

Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$.

$$\langle S, A \rangle = \text{tr}(S^T A) = \text{tr}(SA) = \text{tr}(AS) = \text{tr}(-A^T S) = -\text{tr}(A^T S) = -\langle A, S \rangle = -\langle S, A \rangle$$

Donc $2\langle S, A \rangle = 0$ soit $\langle S, A \rangle = 0$.

On en déduit que $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^\perp$

De plus, $\dim A_n(\mathbb{R})^\perp = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R})$.

Or, d'après 2.(a), $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, $\dim S_n(\mathbb{R}) = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R})$.

On en déduit que $\dim S_n(\mathbb{R}) = \dim A_n(\mathbb{R})^\perp$.

D'après (1) et (2), $S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^\perp$.

3. On introduit la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, E_{i,j} = (e_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n} \text{ avec } e_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors $F = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, \dots, E_{n,n})$.

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$.

Alors, en utilisant la remarque importante de la question 1.,

$$M \in F^\perp \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \langle M, E_{i,i} \rangle = 0 \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, m_{i,i} = 0$$

Donc $F^\perp = \text{Vect}(E_{i,j} \text{ telles que } (i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \text{ et } i \neq j)$.

En d'autres termes, $F^\perp$ est l'ensemble des matrices comprenant des zéros sur la diagonale.

II.4 Arithmétique

Exercice 29 Exercice 86 de la banque CCINP

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.

- (a) Prouver que $\forall k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket, p$ divise $\binom{p}{k} k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
- (b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n \pmod{p}$.
- Indication :** procéder par récurrence.
- (c) En déduire, pour tout entier naturel n , que : p ne divise pas $n \implies n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Solution de l'exercice 29

1. On suppose $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$.

D'après le théorème de Bézout,

$$\exists (u_1, v_1) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } u_1 p + v_1 a = 1. \quad (1)$$

$$\exists (u_2, v_2) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } u_2 p + v_2 b = 1. \quad (2)$$

En multipliant les équations (1) et (2), on obtient :

$$\underbrace{(u_1 u_2 p + u_1 v_2 b + u_2 v_1 a)}_{\in \mathbb{Z}} p + \underbrace{(v_1 v_2)}_{\in \mathbb{Z}} (ab) = 1.$$

Donc, d'après le théorème de Bézout, $p \wedge (ab) = 1$.

2. Soit p un nombre premier.

(a) Soit $k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket \cdot \binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1) \dots (p-k+1)}{k!}.$

Donc $\binom{p}{k} k! = p(p-1) \dots (p-k+1).$

donc $p \mid \binom{p}{k} k!. \quad (3)$

Or, $\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket, p \wedge i = 1$ (car p est premier) donc, d'après 1., $p \wedge k! = 1$.

Donc, d'après le lemme de Gauss, $(3) \implies p \mid \binom{p}{k}.$

- (b) On montre par récurrence que la propriété $(P_n) : n^p \equiv n \pmod{p}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$ et pour $n = 1$, la propriété est vérifiée.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété $(P_n) : n^p \equiv n \pmod{p}$ soit vérifiée.

Alors, d'après la formule du binôme de Newton, $(n+1)^p = n^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k + 1. \quad (4)$

Or $\forall k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket, p \mid \binom{p}{k}$ donc $p \mid \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k.$

Donc d'après (4) et $(P_n), (n+1)^p \equiv n+1 \pmod{p}$ et (P_{n+1}) est vraie.

- Par principe de récurrence P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que p ne divise pas n .

Comme p est premier, alors $p \wedge n = 1$.

La question précédente donne p divise $n^p - n = n(n^{p-1} - 1).$

Or comme p est premier avec n , on en déduit, d'après le lemme de Gauss, que p divise $n^{p-1} - 1$.

Ce qui signifie que $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. (petit théorème de Fermat).

Exercice 30 Exercice 94 de la banque CCINP

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.

Soit $c \in \mathbb{N}$.

Prouver que : $(a \mid c \text{ et } b \mid c) \iff ab \mid c$.

3. On considère le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 6 & [17] \\ x \equiv 4 & [15] \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.

(a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.

(b) Dédurre des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S) .

Solution de l'exercice 30

1. Théorème de Bézout : Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

$$a \wedge b = 1 \iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 / au + bv = 1$$

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $a \wedge b = 1$.

Soit $c \in \mathbb{N}$.

- Prouvons que $ab \mid c \implies a \mid c$ et $b \mid c$.

Si $ab \mid c$ alors $\exists k \in \mathbb{Z} / c = kab$.

Alors, $c = (kb)a$ donc $a \mid c$ et $c = (ka)b$ donc $b \mid c$.

- Prouvons que $(a \mid c \text{ et } b \mid c) \implies ab \mid c$.

$a \wedge b = 1$ donc $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 / au + bv = 1$. (1)

De plus $a \mid c$ donc $\exists k_1 \in \mathbb{Z} / c = k_1 a$. (2)

De même, $b \mid c$ donc $\exists k_2 \in \mathbb{Z} / c = k_2 b$. (3)

On multiplie (1) par c et on obtient $cau + cbv = c$.

Alors, d'après (2) et (3), $(k_2 b) au + (k_1 a) bv = c$, donc $(k_2 u + k_1 v)(ab) = c$ et donc $ab \mid c$.

On a donc prouvé que $(a \mid c \text{ et } b \mid c) \iff ab \mid c$.

3. (a) • Première méthode (méthode générale) :

Soit $x \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} x \text{ solution de } (S) &\iff \exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } \begin{cases} x = 6 + 17k \\ x = 4 + 15k' \end{cases} \\ &\iff \exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } \begin{cases} x = 6 + 17k \\ 6 + 17k = 4 + 15k' \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Or } 6 + 17k = 4 + 15k' \iff 15k' - 17k = 2.$$

Pour déterminer une solution particulière x_0 de (S) , il suffit donc de trouver une solution particulière (k_0, k'_0) de l'équation $15k' - 17k = 2$.

Pour cela, cherchons d'abord, une solution de l'équation $15u + 17v = 1$.

17 et 15 sont premiers entre eux.

Déterminons alors un couple (u_0, v_0) d'entiers relatifs tel que $15u_0 + 17v_0 = 1$.

On a : $17 = 15 \times 1 + 2$ puis $15 = 7 \times 2 + 1$.

$$\text{Alors } 1 = 15 - 7 \times 2 = 15 - 7 \times (17 - 15 \times 1) = 15 - 17 \times 7 + 15 \times 7 = 15 \times 8 - 17 \times 7$$

$$\text{Donc } 8 \times 15 + (-7) \times 17 = 1$$

$$\text{Ainsi, } 16 \times 15 + (-14) \times 17 = 2.$$

On peut prendre alors $k'_0 = 16$ et $k_0 = 14$.

Ainsi, $x_0 = 6 + 17 \times k_0 = 6 + 17 \times 14 = 244$ est une solution particulière de (S)

- Deuxième méthode :

En observant le système (S) , on peut remarquer que $x_0 = -11$ est une solution particulière.

Cette méthode est évidemment plus rapide mais ne fonctionne pas toujours.

$$(b) \ x_0 \text{ solution particulière de } (S) \text{ donc } \begin{cases} x_0 &= 6 [17] \\ x_0 &= 4 [15] \end{cases}$$

$$\text{On a alors } x \text{ solution de } (S) \iff \begin{cases} x &= x_0 [17] \\ x &= x_0 [15] \end{cases} \iff (17 \mid x - x_0 \text{ et } 15 \mid x - x_0).$$

Or $17 \wedge 15 = 1$ donc d'après 2., x solution de $(S) \iff (17 \times 15) \mid x - x_0$.

Donc l'ensemble des solutions de (S) est $\{x_0 + 17 \times 15k, k \in \mathbb{Z}\} = \{244 + 255k, k \in \mathbb{Z}\}$.

III Dénombrement

Exercice 31 Exercice 112 de la banque CCINP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.

On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Solution de l'exercice 31

1. On note $F = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset B\}$.

Soit $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On pose $F_p = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset B \text{ et } \text{card } B = p\}$.

Pour une partie B à p éléments donnée, le nombre de parties A de E telles que $A \subset B$ est $\text{card } \mathcal{P}(B) = 2^p$.

De plus, on a $\binom{n}{p}$ possibilités pour choisir une partie B de E à p éléments.

On en déduit que : $\forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket, \text{Card } F_p = \binom{n}{p} 2^p$.

Or $F = \bigcup_{p=0}^n F_p$ avec $F_0, F_1, \dots, F_n$ deux à deux disjoints.

Donc $a = \text{card } F = \sum_{p=0}^n \text{card } F_p = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^p = 3^n$, d'après le binôme de Newton.

Conclusion : $a = 3^n$.

Autre méthode :

Le raisonnement suivant (corrigé non détaillé) permet également de répondre à la question 1.

Notons encore $F = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset B\}$.

À tout couple (A, B) de F , on peut associer l'application $\varphi_{A,B}$ définie par :

$$\varphi_{A,B}: \begin{cases} E \longrightarrow \{1, 2, 3\} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 2 & \text{si } x \notin A \text{ et } x \in B \\ 3 & \text{si } x \notin B \end{cases} \end{cases}$$

On note $\mathcal{A}(E, \{1, 2, 3\})$ l'ensemble des applications de E dans $\{1, 2, 3\}$.

Alors l'application $\Theta: \begin{cases} F & \longrightarrow \mathcal{A}(E, \{1, 2, 3\}) \\ (A, B) & \longmapsto \varphi_{A,B} \end{cases}$ est bijective.

Le résultat en découle.

$$2. \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \cap B = \emptyset\} = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset \bar{B}\}.$$

$$\text{Or } \text{card} \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset \bar{B}\} = \text{card} \{(A, \bar{B}) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset \bar{B}\}$$

$$= \text{card} \{(A, C) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset C\}$$

$$= a.$$

Donc $b = a$.

$$3. \text{ Compter tous les triplets } (A, B, C) \text{ tels que } A, B \text{ et } C \text{ soient deux à deux disjoints et tels que } A \cup B \cup C = E \\ \text{ revient à compter tous les couples } (A, B) \text{ tels que } A \cap B = \emptyset \text{ car, alors, } C \text{ est obligatoirement égal à } \overline{A \cup B}.$$

$$\text{En d'autres termes, } c = \text{card} \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \cap B = \emptyset\} = b = 3^n.$$