– Interro n°01 – Sujet A –

– Lundi 8 septembre 2025 –

1. Donner les équivalents des expressions suivantes :
   - $\tan\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right) \sim ?$
   - $\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln n}} - 1 \sim ?$
   - $\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{n^2+3}{n^4+1}\right) \sim$
2. Donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.
3. Donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.
4. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{x \ln x}{1+x^2}$ sur un ensemble à déterminer.
5. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{x+2}{x(x^2+4)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

– Interro n°01 – Sujet B –

– 8 septembre 2025 –

1. Donner les équivalents des expressions suivantes :
   - $\tan\left(\dfrac{n}{(n+1)^3}\right) \sim ?$
   - $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 \sim ?$
   - $\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{n^2+1}{n^3+2}\right) \sim$
2. Donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}\ x}{x}$.
3. Donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\mathrm{sh}\ x}{x}\right)$.
4. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{x\ln(x+1)}{3+x^2}$ sur un ensemble à déterminer.
5. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{x+3}{x(x^2+9)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

– Interro n°01 – Sujet A – Corrigé –

– Lundi 8 septembre 2025 –

1. Donner les équivalents des expressions suivantes :

   - $\tan\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right) \sim ?$

     $\dfrac{n+1}{n^2} \sim n \to +\infty \dfrac{n}{n^2} \sim \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$. Donc $\tan\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right) \sim \dfrac{1}{n}$

   - $\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln n}} - 1 \sim ?$

     $\dfrac{1}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\mathrm{e}^{x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \dfrac{1}{\ln n}$.

   - $\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{n^2+3}{n^4+1}\right) \sim$

     $\dfrac{n^2+3}{n^4+1} \sim n \to +\infty \dfrac{n^2}{n^4} \sim \dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or $\mathrm{Arcsin}\ x \underset{x\to 0}{\sim} x$. Donc $\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{n^2+3}{n^4+1}\right) \sim \dfrac{1}{n^2}$.

2. Donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.

   On détermine un $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)$. D'où $\dfrac{\sin x}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^3)$.

3. Donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

   On a au voisinage de 0
   $$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^3)\right)$$
   On pose $y = -\dfrac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^3) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $y \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$. Comme on veut un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction, il suffit d'un $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\ln(1+y) = y - \dfrac{y^2}{2} + \mathrm{o}(y^2)$ et $y^2 = \mathrm{o}(x^3)$. On en déduit
   $$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^3)$$

4. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{x \ln x}{1+x^2}$ sur un ensemble à déterminer.

   La fonction, qu'on note f, est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et pour tout $x > -1$, $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 + \ln(x)(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

5. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{x+2}{x(x^2+4)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On fait une DES de la fraction. On a donc $\dfrac{X+2}{X(X^2+4)} = \dfrac{1}{2X} - \dfrac{X-2}{2(X^2+4)} = \dfrac{1}{2X} - \dfrac{2X}{4(X^2+4)} + \dfrac{1}{4\left(\left(\dfrac{X}{2}\right)^2+1\right)}$.

   Une primitive de la fonction est donc pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)$$

– Interro n°01 – Sujet B –

– 8 septembre 2025 –

1. Donner les équivalents des expressions suivantes :

   - $\tan\left(\dfrac{n}{(n+1)^3}\right) \sim ?$

     $\dfrac{n}{(n+1)^3} \sim n \to +\infty \dfrac{n}{n^3} \sim \dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$. Donc $\tan\left(\dfrac{n}{(n+1)^3}\right) \sim \dfrac{1}{n^2}$

   - $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 \sim ?$

     $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \dfrac{1}{n}$.

   - $\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{n^2+1}{n^3+2}\right) \sim$

     $\dfrac{n^2+1}{n^3+2} \sim n \to +\infty \dfrac{n^2}{n^3} \sim \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or $\mathrm{Arcsin}\, x \underset{x\to 0}{\sim} x$. Donc $\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{n^2+1}{n^3+2}\right) \sim \dfrac{1}{n}$.

2. Donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{x}$.

   On détermine un $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\mathrm{sh}\, x = x + \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)$. D'où $\dfrac{\mathrm{sh}\, x}{x} = 1 + \dfrac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^3)$.

3. Donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\mathrm{sh}\, x}{x}\right)$.

   On a au voisinage de 0
   $$\ln\left(\frac{\mathrm{sh}\, x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^3)\right)$$
   On pose $y = \dfrac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^3) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $y \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$. Comme on veut un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction, il suffit d'un $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\ln(1+y) = y - \dfrac{y^2}{2} + \mathrm{o}(y^2)$ et $y^2 = \mathrm{o}(x^3)$. On en déduit
   $$\ln\left(\frac{\mathrm{sh}\, x}{x}\right) = \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^3)$$

4. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{x\ln(x+1)}{3+x^2}$ sur un ensemble à déterminer.

   La fonction, qu'on note f, est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et pour tout $x > -1$, $f'(x) = \dfrac{-(x^3+x^2-3x-3)\ln(x+1) + x(}{(3+x^2)(x+1)}$

5. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{x+3}{x(x^2+9)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On fait une DES de la fraction. On a donc $\dfrac{X+3}{X(X^2+9)} = \dfrac{1}{3X} - \dfrac{X}{3(X^2+9)} + \dfrac{1}{X^2+9} = \dfrac{1}{3X} - \dfrac{X}{3(X^2+9)} + \dfrac{1}{9\left(\left(\frac{X}{3}\right)^2+1\right)}$.

Une primitive de la fonction est donc pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \frac{1}{3}\ln x - \frac{1}{6}\ln(x^2+9) + \frac{1}{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{3}\right)$$