

Durée 4h

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la **clarté**, à la **précision** et à la **concision** de la **rédaction**. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un **stylo noir ou bleu foncé non effaçable** pour la rédaction de votre composition ; **d'autres couleurs, excepté le vert**, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les **schémas** et la **mise en évidence des résultats**.
- **Ne pas utiliser de correcteur**.
- **Numéroter les copies** : "i/nombre total".
- **Respecter les notations** de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la **numérotation de la question posée**.
- **Écrire le mot FIN à la fin de votre composition**.

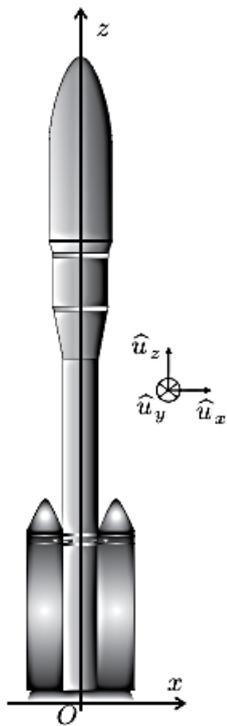
La page 10 de ce sujet est à rendre avec la copie (graphique à annoter).

Ex 1 : Propulsion d'engins spatiaux

Pour les applications numériques on utilisera 3 chiffres significatifs. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires \hat{u}_x ou d'une flèche dans le cas général \vec{v} . A l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les grandeurs complexes sont soulignées : $\underline{z} \in \mathbb{C}$.

Données valables dans tout le problème

- Masse de l'électron, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg ;
- Charge élémentaire, $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C ;
- Constante de Newton de la gravitation universelle, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m³ · kg⁻¹ · s² ;
- Permittivité diélectrique du vide, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F · m⁻¹ ;
- Constante d'Avogadro, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹ ;
- Rayon de la Terre, $R_t = 6,37 \cdot 10^3$ km ;
- Masse de la Terre, $M_t = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg ;
- Intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre, $g = 9,81$ m · s⁻² ;
- Constante de Boltzmann, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K⁻¹ ;
- Constante de Planck, $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J · s ;
- Constante des gaz parfaits, $R = 8,31$ J · K⁻¹ · mol⁻¹ ;



I. — Généralités

I.A. — Aspect cinétique - Lois de vitesse

A l'instant $t = 0$, une fusée de masse totale m_0 décolle verticalement dans le référentiel terrestre (voir figure 1). On définit le débit de masse $D_m > 0$ des gaz brûlés, par $D_m = -\frac{dm}{dt}$, $m(t)$ désignant la masse de la fusée à un instant $t > 0$ quelconque. On note $\vec{u} = -u\hat{u}_z$ avec $u > 0$, la vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée. On note $\vec{v} = v(t)\hat{u}_z$ la vitesse de la fusée dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On suppose que D_m et u restent constants et que le champ de pesanteur g reste uniforme lors du lancement.

□ 1 — En prenant pour système la fusée à l'instant t , exprimer sa quantité de mouvement \vec{p}_f aux instants t et $t + dt$. Déterminer de même la quantité de mouvement \vec{p}_g à l'instant $t + dt$ du gaz éjecté pendant dt .

□ 2 — On rappelle que la dérivée temporelle d'un vecteur $\vec{w}(t)$ est définie par la relation $\frac{d\vec{w}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{w}(t + dt) - \vec{w}(t)}{dt}$. En utilisant le principe fondamental de la dynamique pour l'ensemble {fusée + gaz}, établir l'équation différentielle

$$m \frac{dv}{dt} = D_m u - mg \tag{1}$$

FIGURE 1 – Fusée

□ 3 — Identifier, dans le second membre de l'équation (1), l'intensité F de la force de poussée. A quelle condition la fusée décolle-t-elle ?

□ 4 — On nomme impulsion spécifique I_s d'un ergol (gaz propulseur) le temps pendant lequel une masse m de cet ergol peut fournir une poussée équivalente au poids ressenti par m à la surface de la terre. Exprimer I_s en fonction de u et g .

□ 5 — Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ de la fusée à l'instant t , en fonction de t , $m(t)$, g , u et de la masse de la fusée à l'instant $t = 0$ notée m_0 .

□ 6 — On suppose le vaisseau extrait de l'attraction terrestre (mission interplanétaire), sa masse totale est alors m_i et sa vitesse $\vec{v} = v_i\hat{u}_z$. On allume à nouveau un moteur pendant une durée Δt conduisant à une variation de masse $\Delta m = m_i - m_f$. Adapter l'expression précédente pour obtenir la relation de Tsiolkovski donnant l'accroissement de vitesse correspondant, noté $\Delta V = v_f - v_i$, en fonction de u , m_i et m_f .

L'exemple qui suit a pour objet de montrer l'intérêt des fusées à plusieurs étages. Soit une fusée de masse totale $m_t = 134$ tonnes constituée de deux étages. La masse totale du premier étage est $m_{t_1} = 110$ tonnes dont 100 tonnes d'ergols, et celle du second est $m_{t_2} = 24,0$ tonnes dont 20,0 tonnes d'ergols.

□ 7 — En considérant que la vitesse d'éjection des gaz $u = 4,00 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ est la même lors de la poussée de chaque étage, calculer les accroissements de vitesse apportés successivement par chacun des étages de la fusée. Comparer avec le cas d'une fusée ne possédant qu'un seul étage et la même répartition de masses, c'est-à-dire 14,0 tonnes de structure et 120 tonnes d'ergols. Les calculs seront effectués dans l'hypothèse d'une absence de pesanteur.

Une autre manière de minimiser les dépenses en carburant est d'augmenter la vitesse d'éjection, limitée à quelques kilomètres par seconde dans le cas d'une propulsion chimique comme nous le verrons dans la suite de ce problème.

□ 8 — Pour une charge utile de masse $m_u = 500 \text{ kg}$, calculer les masses m_{c_1} et m_{c_2} de carburant (la masse initiale du vaisseau est $m_0 = m_u + m_c$) à prévoir pour obtenir une variation de vitesse $\Delta V = 5,00 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, dans le cas d'une propulsion chimique ($u = 4,00 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$) et d'une propulsion ionique ($u = 20,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$).

I.B. — Aspect énergétique - Rendement propulsif du moteur fusée

□ 9 — Le vaisseau se déplace à une vitesse de norme v dans le référentiel d'étude galiléen. Exprimer l'énergie cinétique dans ce référentiel de la masse dm du gaz éjectée pendant dt , en déduire la puissance cinétique P_{jet} contenue dans le jet de gaz issu du moteur. Exprimer de même la puissance reçue par le vaisseau de la part de la force de poussée. On exprimera ces deux termes en fonction de D_m, u et v .

□ 10 — On définit le rendement propulsif comme le rapport de la puissance cinétique gagnée par le vaisseau sur la puissance totale dépensée. En admettant une conversion parfaite de l'énergie stockée dans le vaisseau en énergie cinétique du jet et du vaisseau, montrer que le rendement propulsif peut se mettre sous la forme

$$\eta(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

où l'on précisera l'expression de x en fonction des données du problème.

□ 11 — Tracer la courbe $\eta(x)$, pour quelle valeur de x le rendement propulsif est-il maximal ? Pour quelles valeurs de x le rendement est-il nul ? Montrer que l'on pouvait prévoir ces résultats sans calcul.

En fait, bien que des moteurs à vitesse d'éjection variable soient étudiés et quelquefois exploités, le rendement énergétique de la propulsion est souvent considéré comme secondaire : l'énergie fournie par une pile nucléaire ou des panneaux solaires est presque illimitée, ce qui n'est pas le cas des réserves de gaz propulsif.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Limites de la propulsion chimique

Considérons l'écoulement d'une tranche de fluide, comprise entre les sections S_1 et S_2 à l'instant t et entre S'_1 et S'_2 à l'instant $t + dt$. Durant le laps de temps dt cette tranche échange un certain travail W et une certaine quantité de chaleur Q avec l'extérieur. On note par ailleurs W' le travail échangé sans mettre en jeu les forces de pression.

□ 12 — Appliquer le premier principe de la thermodynamique à cette tranche, établir, en régime permanent, la relation entre W' , Q et les variations d'énergie massique de la tranche considérée.

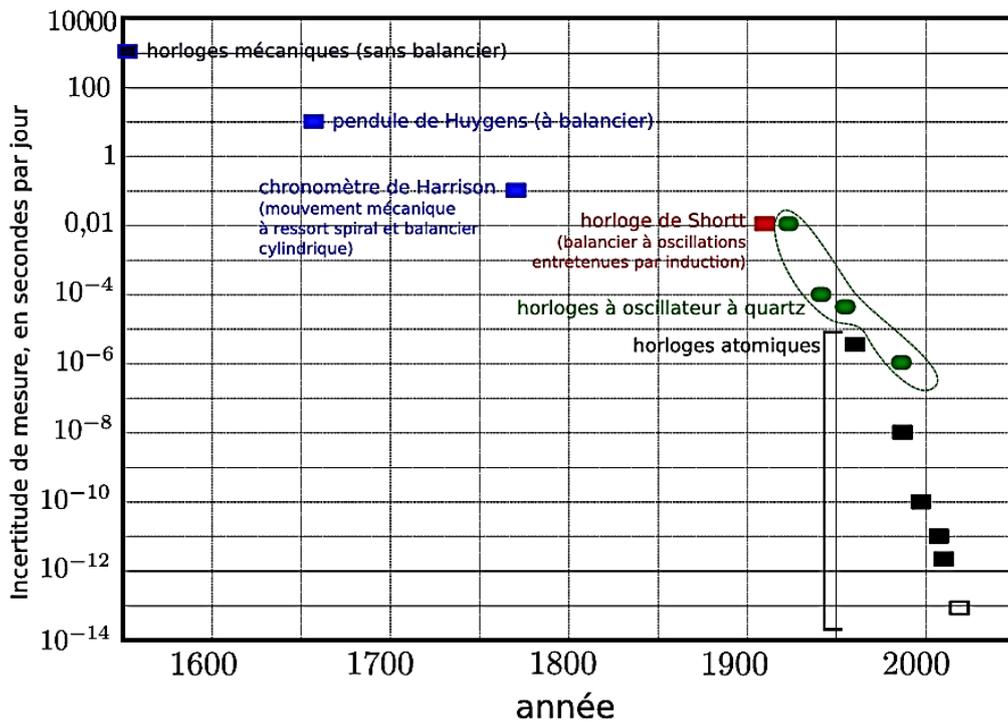
On se place dans la tuyère d'un moteur fusée, lorsque l'écoulement est permanent et s'effectue à altitude constante sans travail autre que celui des forces de pression. Le gaz éjecté est considéré comme parfait, de masse molaire M , d'indice adiabatique $\gamma = 1,4$. Il provient d'une chambre de combustion, où ses température et pression sont notées T_c et P_c . Le gaz est initialement au repos, $v_c = 0$. Par ailleurs, on considère que le transit du gaz dans la tuyère est suffisamment rapide et les échanges suffisamment lents pour que l'on puisse négliger les transferts thermiques.

□ 13 — Exprimer la vitesse maximale atteinte par le gaz en sortie de la tuyère en fonction de γ , R , T_c et M . On négligera la température de sortie devant T_c .

□ 14 — Les ergols utilisés pour la propulsion sont du dihydrogène et du dioxygène, leur réaction stœchiométrique permet d'obtenir une température de combustion de l'ordre de $T_c = 3,0 \cdot 10^3$ K. Calculer la vitesse maximale d'éjection des gaz issus de la tuyère et l'impulsion spécifique correspondante.

Ex 2 : Etude d'un circuit à quartz

La mesure du temps s'est faite par des moyens divers au cours de l'histoire de l'humanité : cadrans solaires, sabliers, pendules, circuits électroniques... La précision de cette mesure s'est sans cesse améliorée, pour atteindre celle des horloges atomiques d'aujourd'hui (voir graphique ci-dessous).



La première horloge à quartz est conçue en 1927 par les laboratoires Bell. La première montre-bracelet est commercialisée en 1969.

Le quartz est un cristal piézoélectrique : lorsqu'il est soumis à une différence de potentiel il se déforme, et inversement s'il est contraint mécaniquement alors une différence de potentiel apparaît entre ses faces.

Un cristal de quartz taillé en diapason – comme sur la figure ci-contre – vibre mécaniquement à une fréquence bien précise. Il est inséré dans un circuit électronique, avec une électrode métallisée sur chacune de ses faces. Cette précision dans la fréquence de vibration, associée au couplage électrique par l'effet piézoélectrique, permet d'obtenir des circuits électroniques résonants avec des facteurs de qualité très élevés, et donc des oscillateurs très précis.



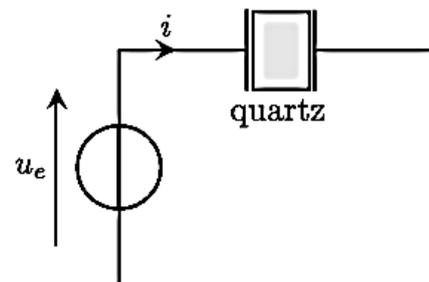
Quartz servant dans une montre.

source : https://en.wikipedia.org/wiki/Quartz_clock

Étude du quartz

Pour étudier la résonance très sélective du quartz, on le place dans le montage ci-contre.

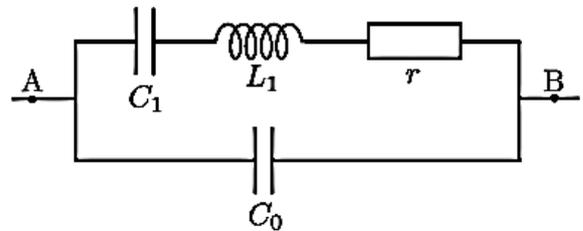
On dispose également d'un dispositif, non représenté, qui délivre une tension U_s égale à l'amplitude du courant i multipliée par une résistance $R = 47\text{ k}\Omega$: si $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$, alors $U_s = R i_0$.



L'étude se fait en régime sinusoïdal forcé, et on utilise le formalisme complexe. On note les grandeurs complexes en les soulignant. Par exemple $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$ est représenté par $\underline{i}(t) = i_0 \exp\{j(\omega t + \varphi)\}$.

15. Justifier que $\underline{i} = \frac{\underline{u}_e}{\underline{Z}_q}$, où \underline{Z}_q est l'impédance électrique du quartz.

Électriquement, le comportement du quartz peut être modélisé par un condensateur C_0 (capacité des électrodes séparées par un diélectrique et des fils de liaisons) en parallèle avec un circuit série r , L_1 et C_1 qui correspond aux grandeurs motionnelles. Ce circuit série r , L_1 , C_1 représente le couplage électromécanique lié à l'effet piézoélectrique.



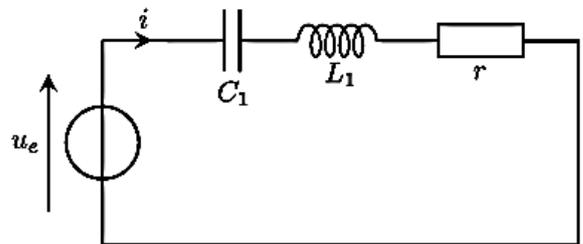
On étudie les résonances, donc la recherche des pulsations ω telles que l'amplitude de i soit importante, donc telles que $1/|Z_q|$ tende vers des valeurs importantes.

Pour repérer la résonance, on néglige d'abord tout effet dissipatif : dans les deux questions qui suivent, $r = 0$.

16. Montrer que l'impédance Z_q équivalente au dipôle A-B vérifie $\frac{1}{Z_q} = jC_{\text{éq}}\omega \frac{1 - \omega^2/\omega_2^2}{1 - \omega^2/\omega_1^2}$, avec $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ et ω_2 et $C_{\text{éq}}$ dont on donnera les expressions en fonction de C_0 , C_1 et L_1 .

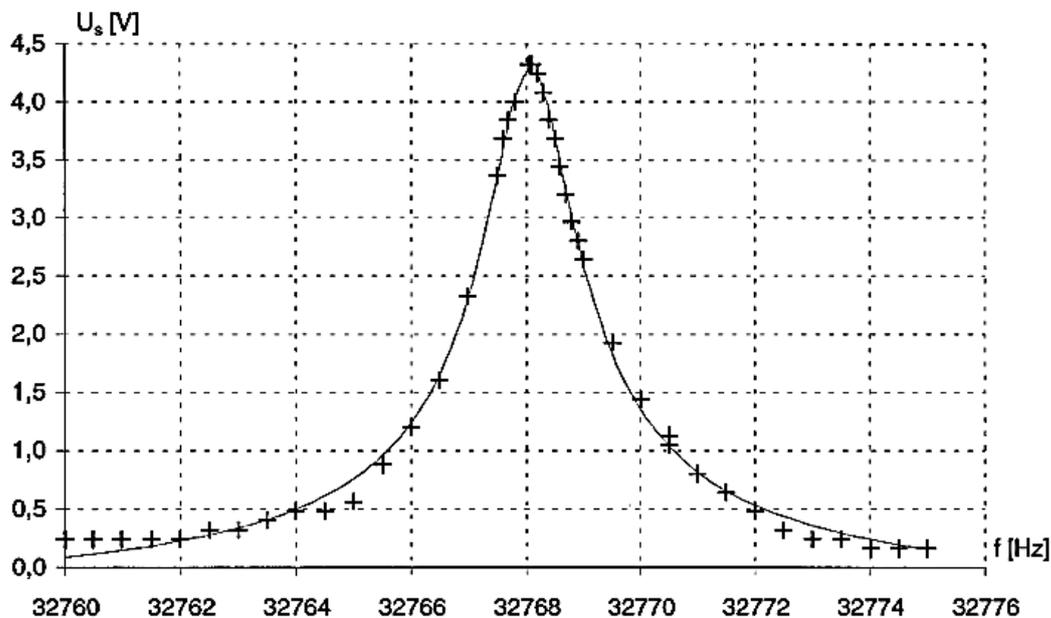
17. En déduire l'expression de la fréquence f_1 de résonance en intensité du circuit d'étude du quartz.

Les questions qui précèdent montrent que c'est la branche L_1 , C_1 , r qui est responsable de la résonance. Pour simplifier, on étudie donc le quartz en enlevant dans le modèle la capacité C_0 . On obtient alors le circuit ci-contre.



18. Montrer que $i = \frac{u_e/r}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega} \right)}$ avec $Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ et $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$.

La courbe ci-dessous donne, pour chaque point, la valeur de U_s pour une fréquence f donnée du signal $u_e(t)$. On rappelle que $U_s = R \times i_0$. L'amplitude du signal u_e est $u_0 = 0,20$ V.



source : Deiber et al., Bull. U. Phys. 799, 1997

On donne également l'expression de l'acuité d'une résonance dans le cas étudié ici : $Q = \frac{f_r}{\Delta f}$, où Q est le facteur de qualité, f_r est la fréquence de résonance et Δf la largeur de la bande passante. Cette dernière est définie comme $\Delta f = |f_2 - f_1|$, avec f_2 et f_1 les deux fréquences telles que l'amplitude de sortie soit égale à l'amplitude de sortie maximale divisée par $\sqrt{2}$.

19. En exploitant ce graphique, donner une valeur de la résistance r .
20. Donner également une valeur du facteur de qualité Q .

On retiendra les valeurs approchées $r = 2 \text{ k}\Omega$, $Q = 20\,000$ et $\omega_1 = 2 \times 10^5 \text{ rad/s}$.

21. Donner les expressions de L_1 et C_1 en fonction de Q , r et ω_1 .
22. En déduire la valeur de L_1 . Commentaire ?

Utilisation dans une montre

Le quartz permet ainsi de concevoir un circuit filtre passe-bande avec un facteur de qualité très élevé.

23. Si on laisse le circuit précédent osciller de façon libre, donner une estimation du temps pendant lequel les oscillations perdurent. Ceci est-il raisonnable pour fabriquer une horloge ?

Le quartz est en réalité inséré dans un circuit dit "oscillateur", qui entretient ses oscillations. Le facteur de qualité élevé permet d'avoir un signal quasi-harmonique dont la fréquence est précisément contrôlée et vaut, dans le cas présent, 32 768 Hz.

24. On peut remarquer que $32\,768 = 2^{15}$. Quelle peut-être la raison d'un tel choix pour la fabrication d'une montre ?

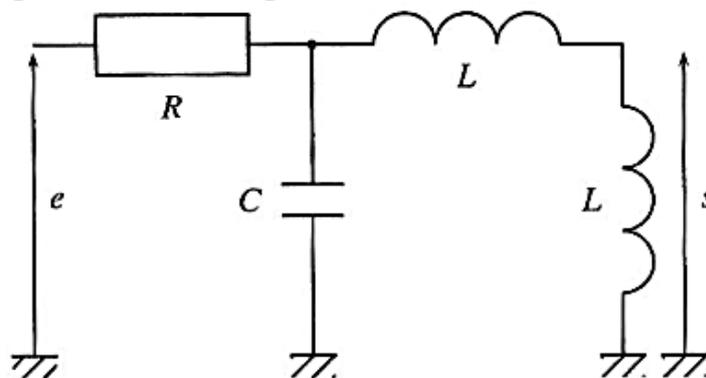
Précision

La fréquence de résonance du quartz varie en fonction de la température, avec typiquement une variation relative $\frac{\Delta f}{f} \simeq 10^{-6}$ pour un écart de 10°C .

25. Quel est alors l'imprécision en seconde cumulée sur une journée de fonctionnement ?
26. Comparer ceci aux données de la figure de début d'énoncé. Sachant que les précisions reportées sur cette figure sont pour des horloges de laboratoire de précision, quelle précaution simple a-t-elle pu être mise en œuvre pour pallier aux variations de température ?

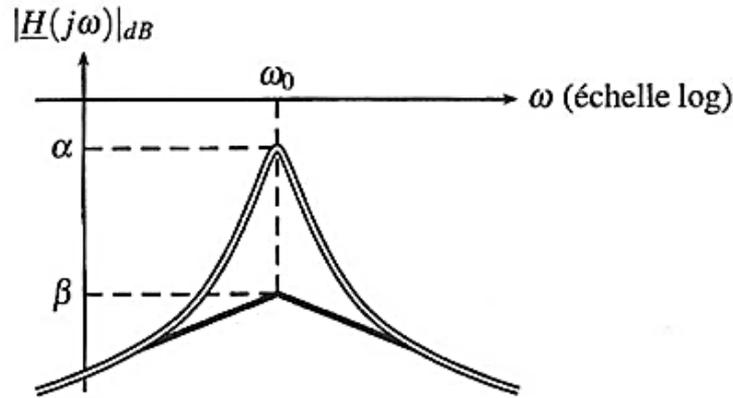
Ex 3 : Etude du filtre de Hartley

On réalise le montage décrit sur la figure suivante :



1. Etablir sa fonction de transfert sous la forme $\underline{H}(j\omega) = H_0 \cdot \frac{j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$. On exprimera H_0 , ω_0 et Q en fonction de R , L et C .

2. Dans le cas où $R = 10,0 \text{ k}\Omega$, $L = 1,0 \text{ mH}$ et $C = 100,0 \text{ nF}$, le diagramme de Bode en amplitude a l'allure présentée sur la figure suivante :



Identifier les pentes des asymptotes, les valeurs de α et β . En déduire l'allure du diagramme de Bode en phase.

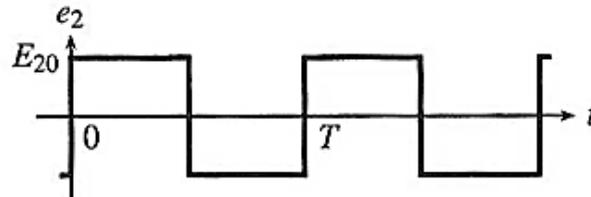
3. Le montage peut-il servir d'intégrateur, ou de dérivateur ? Si oui, dans quelle bande de fréquence ?

4. On étudie la sortie $s_1(t)$ associée à l'entrée $e_1(t) = E_0 + E_1 \cos(\omega_1 t)$, où $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$.

Comment réaliser expérimentalement ce signal en TP ?

5. Calculer l'expression littérale de la sortie $s_1(t)$, observée sur l'oscilloscope en régime permanent.

On étudie maintenant la sortie $s_2(t)$ associée au signal créneau $e_2(t)$, de période $T_2 = 6\pi\sqrt{2LC}$, d'amplitude $E_{2,0} = 1 \text{ V}$, représenté sur la figure suivante :



On donne sa décomposition en série de Fourier :

$$e_2(t) = \frac{4E_{2,0}}{\pi} \left[\sin(\omega_2 t) + \frac{\sin(3\omega_2 t)}{3} + \frac{\sin(5\omega_2 t)}{5} + \dots + \frac{\sin[(2n+1)\omega_2 t]}{2n+1} + \dots \right]$$

6. Calculer numériquement les amplitudes des 3 premières harmoniques du signal de sortie s_2 .

Justifier alors le nom de "tripleur de fréquence" donné au montage.

Ex 4 : Moteur à essence turbocompressé

Le moteur qui équipe les automobiles thermiques peut être décrit comme une machine ditherme à air (on néglige la quantité de carburant et les gaz brûlés devant l'air au niveau des pistons) fonctionnant de manière pseudo-cyclique (l'air rejeté par la ligne d'échappement n'est évidemment pas le même que celui qui est admis dans le filtre à air, mais il est en même quantité). On caractérise un tel moteur par les températures de la « source froide » T_f (en pratique c'est celle de l'air ambiant et on prendra $T_f = 27^\circ\text{C}$) et de la « source chaude » T_c (au moins égale à celle du point le plus chaud du cycle, après la combustion du carburant).

II.A Rendement du moteur

- – 8. Définir le rendement η d'un tel moteur thermique ditherme.

Énoncer et démontrer avec soin le théorème de CARNOT.

Certains véhicules sont mus par un moteur à essence à quatre temps ; le carburant utilisé est de l'Eurosuper 95 produisant, par combustion totale, une énergie $W_v = 3,6 \cdot 10^7 \text{ J} \cdot \text{L}^{-1}$ (joules produits par litre de carburant consommé). En circulant à la vitesse stabilisée $v = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ sur route horizontale, le moteur du véhicule étudié ici développe la puissance $\mathcal{P} = 18 \text{ kW}$ (pour vaincre essentiellement les frottements aérodynamiques) et consomme une quantité q égale à 5,4 litres de carburant pour parcourir 100 km.

- – 9. Déduire des données ci-dessus le rendement réel η_r du moteur.

Quelle inégalité concernant T_c peut-on déduire du théorème de CARNOT ?

Cette inégalité est-elle vérifiée en pratique, sachant que dans le moteur étudié la température est $T_c \simeq 2000 \text{ K}$?

II.B Thermodynamique des gaz

Une quantité donnée de gaz est caractérisé par ses fonctions d'état énergie interne U et enthalpie H et par leurs dérivées $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ et $C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$ qui sont les capacités thermiques du gaz. On définit le rapport adiabatique $\gamma = C_P/C_V$; dans ce qui suit ce rapport γ est supposé constant.

- – 10. De quel(s) paramètre(s) thermodynamique(s) dépendent les fonctions U et H dans le cadre du modèle du gaz parfait ?

En déduire les expressions de C_P et C_V en fonction de la quantité de matière n , du rapport adiabatique γ et d'une constante fondamentale.

On admettra l'expression de l'entropie molaire $s_m(T, V)$ d'un gaz parfait de température T et de volume V :

$$s_m(T, V) = s_m(T_0, V_0) + \frac{R}{\gamma - 1} \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0} \quad (1)$$

- – 11. En déduire la relation de LAPLACE qui relie les variations de pression P et de volume V d'un gaz parfait évoluant de manière isentropique depuis un état initial (P_0, V_0) .

II.C Le cycle moteur à quatre temps

Le moteur à quatre temps a été décrit pour la première fois en 1862 par l'ingénieur ALPHONSE BEAU. Ce cycle est décrit par l'air (pris à l'extérieur à la pression atmosphérique p_0), assimilé à un gaz parfait diatomique, qui évolue entre un volume minimal V_1 et un volume maximal

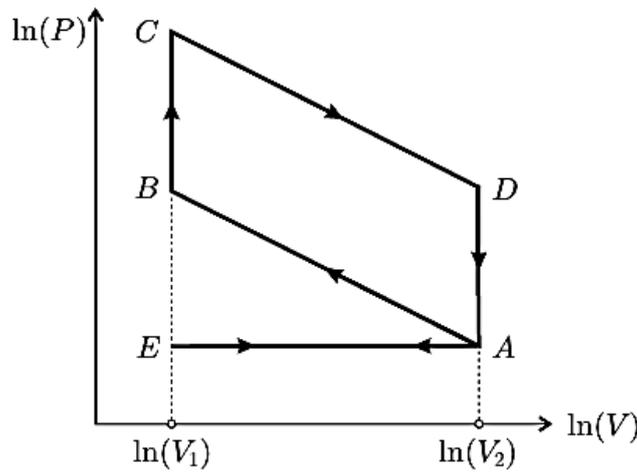


FIGURE 3 – Cycle moteur de Beau à quatre temps en échelle logarithmique

$V_2 = \alpha V_1$ avec le taux de compression $\alpha > 1$. Il est représenté sur la figure 3 en échelle doublement logarithmique dans le diagramme de CLAPEYRON.

Ce cycle comporte :

- Une phase d'admission EA de l'air extérieur dans les cylindres du moteur ;
- Une phase de compression adiabatique AB de l'air enfermé dans le piston (mêlé avec un peu d'essence) suivie de la combustion BC quasiment instantanée provoquée par une étincelle produite par le système électrique d'allumage ;
- Une phase motrice de détente adiabatique CD de l'air (et du combustible brûlé) jusqu'à l'ouverture en D des soupapes d'échappement avec chute brutale DA de la pression ;
- Une phase d'échappement AE évacuant les gaz brûlés avant la reprise du cycle.

Dans toute la suite de l'étude les phases d'échappement AE et d'admission EA ne jouent aucun rôle et on pourra donc les ignorer.

- – 12. On considère d'abord que toutes les évolutions au sein du cycle $ABCDAEA$ sont réversibles. Montrer que les transformations AB et CD sont décrites par deux droites parallèles et déterminer leur pente commune $p_{rv} < 0$.
- – 13. Reproduire sur votre copie le diagramme de la figure 3 en y ajoutant les isothermes de températures T_f (température minimale du cycle) et T_c (température maximale du cycle).
- – 14. Exprimer les transferts thermiques sur les phases AB , BC , CD et DA en fonction des températures T_A , T_B , T_C et T_D aux divers points du cycle.
En déduire l'expression η_{rv} du rendement du cycle moteur de la figure 3 en fonction des températures puis en déduire que $\eta_{rv} = 1 - \alpha^{1-\gamma}$.
- – 15. Pour le moteur étudié ici $\alpha = 9$ et on prendra pour l'air $\gamma = 1,4$. Calculer η_{rv} et commenter.

En réalité l'hypothèse de réversibilité des transformations adiabatiques AB et CD n'est pas réaliste ; pour s'approcher du rendement réel on la remplace par un modèle amélioré, toujours adiabatique mais non réversible, dans lequel le cycle devient $AB'C'D'A$, mais on suppose toujours que AB' et $C'D'$ sont des droites de pentes (négatives) respectives p'_{comp} et p'_{det} pour la compression AB' et la détente $D'A$.

- – 16. En application du second principe montrer que $p'_{comp} < p_{rv} < p'_{det}$.

NOM :

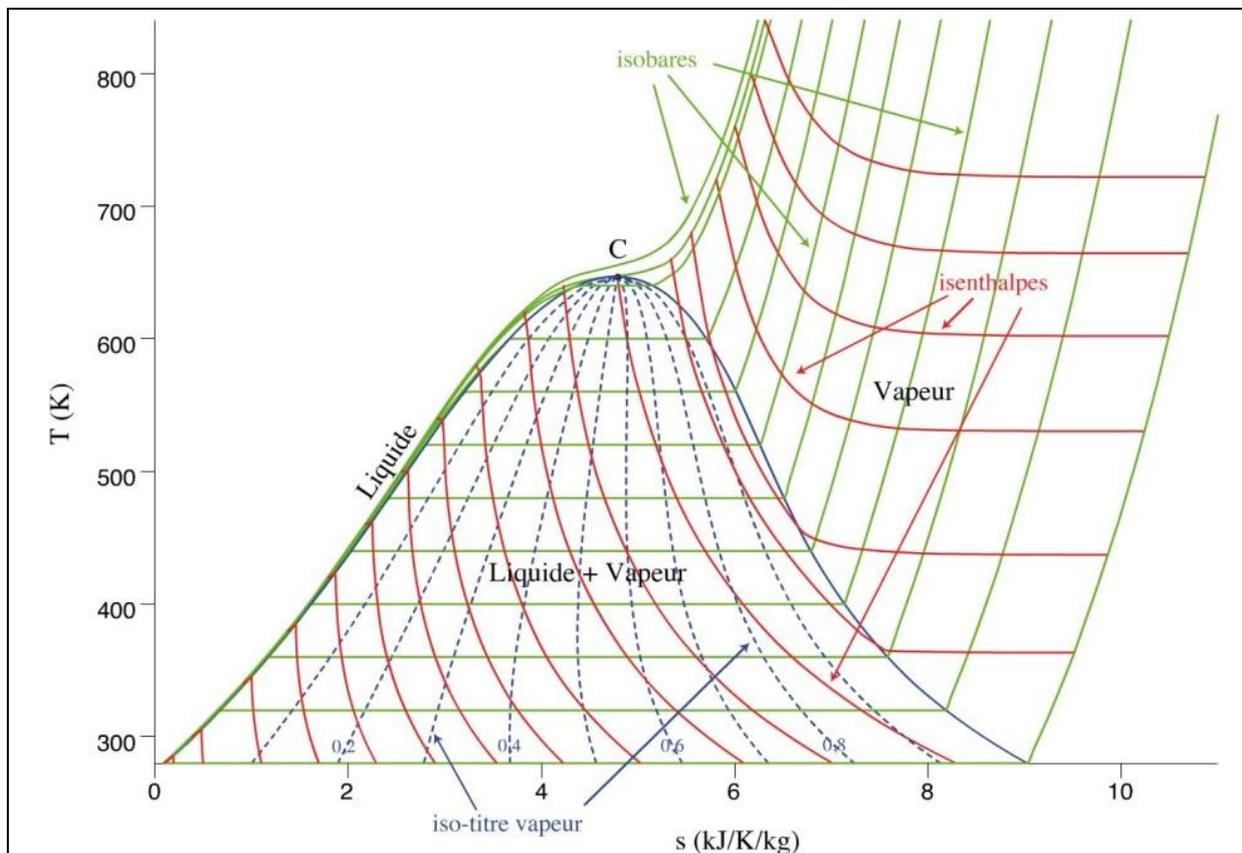
Ex 5 : Détente d'un mélange liquide-vapeur

L'équilibre entre l'eau liquide et sa vapeur est caractérisé, à différentes températures, par les données suivantes :

θ °C	p_s bar	Liquide saturant		Vapeur saturante	
		v_{liq} m ³ .kg ⁻¹	h_{liq} kJ. kg ⁻¹	v_{vap} m ³ . kg ⁻¹	h_{vap} kJ. kg ⁻¹
35	0,056	1,00.10 ⁻³	146,34	25,24	2560,67
50	0,123	1,01.10 ⁻³	208,96	12,04	2587,42
100	1,013	1,04.10 ⁻³	418,42	1,673	2671,44
185	11,238	1,13.10 ⁻³	784,17	0,174	2778,03
285	69,200	1,35.10 ⁻³	1261,11	0,028	2768,83

θ : température en degré Celsius	v_{liq} : volume massique du liquide saturant	v_{vap} : volume massique de la vapeur saturante
P_s : pression de vapeur saturante	h_{liq} : enthalpie massique du liquide saturant	h_{vap} : enthalpie massique de la vapeur saturante

Diagramme entropique de l'eau :



1. Diagramme de Clapeyron (P, v) du système liquide-vapeur de l'eau

On désigne par P la pression du système liquide-vapeur et par v son volume massique.

1.a) Pour l'eau, représenter l'allure des diagrammes :

- de Clapeyron (P, v) ;
- des frigoristes ($\log P, h$).

On prendra soin de préciser la position du point critique C, les domaines liquide (liq), liquide + vapeur (liq + vap), et vapeur (vap).

1.b) Représenter, sur les diagrammes précédents, l'allure d'une isotherme $T < T_C$ (avec T_C la température critique) et justifier la présence d'un palier sur cette isotherme.

1.c) On désigne, respectivement par : v_M et h_M , le volume massique et l'enthalpie massique d'un système liquide-vapeur dont l'état est représenté par un point M dans les diagrammes précédents.

Montrer que le titre massique en vapeur x_{vap} est donné par l'une quelconque des relations ci-dessous :

$$x_{vap} = \frac{v_M - v_{liq}}{v_{vap} - v_{liq}} \quad x_{vap} = \frac{h_M - h_{liq}}{h_{vap} - h_{liq}}$$

1.d) On désigne par $l_{vap}(T)$ la chaleur latente massique de vaporisation à la température T. Rappeler la relation entre $l_{vap}(T)$, $h_{vap}(T)$ et $h_{liq}(T)$.

2. Détente adiabatique réversible d'un système liquide-vapeur

On dispose d'un cylindre indéformable muni d'un piston. Le cylindre et le piston ont des parois calorifugées.

L'entropie massique d'un système liquide-vapeur, de titre massique en vapeur x_{vap} , en équilibre à la température T (en Kelvin) est donnée par la relation :

$$s(x, T) = c_{liq} \cdot \ln(T) + x_{vap} \cdot \frac{l_{vap}(T)}{T} + cste$$

dans laquelle c_{liq} désigne la capacité thermique massique du liquide saturant.

Le piston est, initialement, fixé dans une position qui délimite un volume $V = 10$ litres dans le cylindre.

L'introduction d'une masse $m = 10$ g d'eau dans le cylindre permet d'obtenir un système liquide-vapeur en équilibre à la température $\theta = 100$ °C.

2.a) Exprimer puis calculer le titre massique en vapeur x_{vap} de ce système.

On fait subir au système liquide-vapeur défini ci-dessus une détente adiabatique réversible de la température θ à la température $\theta' = 50$ °C.

2.b.i) A l'aide du diagramme entropique donné p.10, montrer que la détente conduit à une liquéfaction partielle de la vapeur.

2.b.ii) Sachant que c_{liq} reste constante au cours de cette détente, déterminer l'expression du titre massique en vapeur x_{vap}' du système liquide-vapeur à la fin de la détente en fonction de c_{liq} , x_{vap} , des températures et des données du tableau.

On note x_{vap}'' le titre massique en vapeur, à la température $\theta = 100$ °C, tel qu'au cours de la détente définie ci-dessus, ce titre reste constant.

2.c.i) Donner l'expression de x_{vap}'' en fonction de c_{liq} , des températures et des données du tableau. Faire l'application numérique avec $c_{liq} = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

2.c.ii) Vérifier la cohérence de ce résultat avec le diagramme entropique donné p.10.

2.c.iii) Pour qu'à l'état initial, avec la même masse d'eau $m = 10$ g, le titre en vapeur soit égal à x_{vap}'' , faut-il augmenter ou diminuer le volume initial V du cylindre ?

-- FIN DE L'ENONCE --