

**Contenu :**

**5/2** - Ex 1 : Croissance hivernale de l'épaisseur de la glace de la banquise .....1  
*Transferts thermiques*

**3/2** - Ex 1 : Croissance de la glace PT 2022 .....3  
*Transferts thermiques*

Ex 2 : Production de travail mécanique à partir d'une source chaude .....5  
*Machine thermique à écoulement*

**5/2 - Ex 1 : Croissance hivernale de l'épaisseur de la glace de la banquise**

Pour étudier la croissance de la couche de glace en hiver, on modélise l'océan sous la banquise en formation de la manière suivante (cf. fig. 5) : en profondeur, la température de l'eau est maintenue constante à  $T_1 = 4^\circ\text{C}$  par les courants océaniques. Sur une hauteur constante  $e$  sous la banquise, l'eau se refroidit progressivement jusqu'à atteindre  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  à l'altitude  $z = 0$  de formation de la glace (on néglige tout effet de salinité de l'eau). La couche de glace a une épaisseur croissante  $z_g(t)$  qu'il s'agit de déterminer ; au-dessus de celle-ci, l'air est à la température constante  $T_2 = -40^\circ\text{C}$ . On notera  $\lambda_e$  et  $\lambda_g$  les conductivités thermiques et  $c_e$  et  $c_g$  les capacités thermiques massiques de l'eau liquide et de la glace,  $\rho_g$  et  $l_f$  la masse volumique et l'enthalpie massique de fusion de la glace ; toutes ces grandeurs sont des constantes.

L'épaisseur de glace  $z_g(t)$  augmente régulièrement du fait de la cristallisation de l'eau refroidie à  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  à la base de la couche de glace. Toutes les études pourront être faites pour un système défini par un cylindre vertical de surface  $S$  unité (cf. fig. 5) au sein duquel les transferts thermiques unidimensionnels sont régis par la loi de Fourier.

□ 17 — Par une étude des échanges thermiques de l'épaisseur  $\delta z$  prise à l'intérieur de la glace, établir une équation aux dérivées partielles vérifiée par la température  $T_g(z,t)$  au sein de la glace.

□ 18 — Déterminer une expression donnant l'ordre de grandeur de la durée  $\Delta t$  de la diffusion thermique au sein de la glace sur une hauteur  $\Delta z$ . Quelle durée doit-on attendre afin de pouvoir considérer que, pour des évolutions assez lentes, la température  $T_g$  ne dépend pratiquement plus du temps ? Préciser ce que l'on entend par « assez lentes ».

*On se place dans ce cas dans toute la suite : dans l'eau comme dans la glace, les répartitions de température seront supposées quasi-statiques.*

□ 19 — Définir et exprimer les résistances thermiques  $R_g$  et  $R_e$ , pour une aire donnée  $S$ , des couches de glace et d'eau refroidie sous la glace.

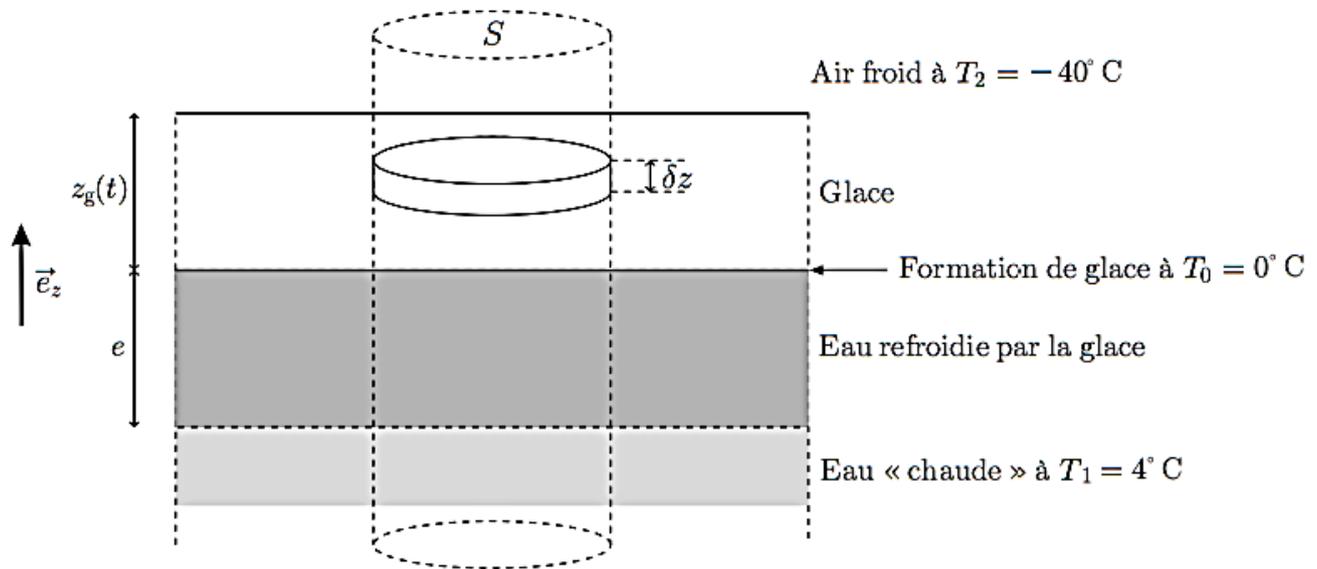


FIGURE 5 – L'océan sous la banquise en formation

Les transferts thermiques à travers la surface supérieure de la banquise sont décrits par la loi de Newton des transferts pariétaux (radiatifs et convecto-conductifs) : la puissance échangée par unité d'aire de cette surface vérifie  $|\mathcal{P}_u| = h|T_s - T_2|$  où  $T_s$  est la température au sommet de la couche de glace ; le coefficient  $h > 0$  de la loi de Newton est supposé connu et constant.

□ 20 — Exprimer la résistance thermique  $R_i$ , pour une aire  $S$ , de l'interface entre l'air et la glace.

□ 21 — Montrer que le régime quasi-permanent de croissance de la couche de glace peut être décrit par le schéma électrique équivalent de la figure 6 et préciser l'expression du « courant »  $\Phi$  du « générateur de courant » en fonction notamment de  $l_f$ ,  $\rho_g$  et de la vitesse de croissance  $v_g = \frac{dz_g}{dt}$  de la couche de glace.

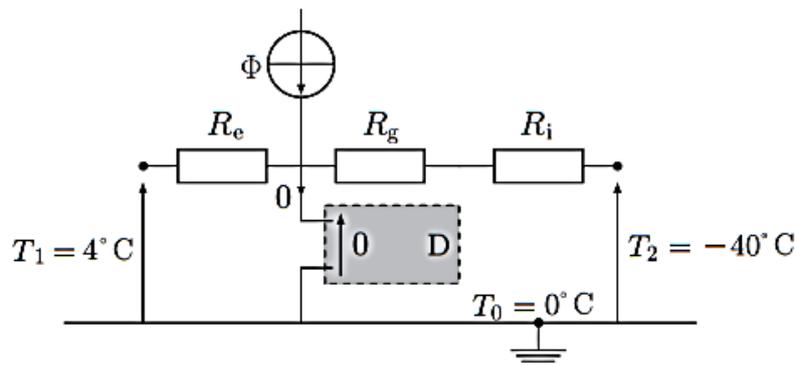


FIGURE 6 – Circuit électrique équivalent à la croissance de la couche de glace. Le dipôle D représenté sur cette figure permet d'assurer une différence de potentiel nulle sans appel de courant dans cette branche du circuit.

□ 22 — Établir l'équation différentielle vérifiée par  $z_g(t)$ . On suppose que pour toutes les valeurs de  $t$  considérées on a  $\frac{e}{\lambda_e} \gg \frac{z_g}{\lambda_g} + \frac{1}{h}$ , en déduire la loi d'évolution de l'épaisseur de la couche de glace sous la forme  $\tau_g [l_g z_g(t) + z_g^2(t)] = \ell_g^2 t$  où l'exprimera les grandeurs  $\tau_g$  et  $\ell_g$  en fonction des paramètres du modèle. L'instant  $t = 0$  correspond au début de la formation de la banquise.

□ 23 — Tracer et commenter l'allure de la courbe donnant  $z_g$  en fonction de  $t$ . On montrera notamment l'existence de deux régimes successifs.

### 3/2 - Ex 1 : Croissance de la glace

On s'intéresse au lac de Joux situé en Suisse.

Nous sommes en hiver et la température extérieure est de  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$  ; le lac gèle et devient la plus grande patinoire naturelle d'Europe.

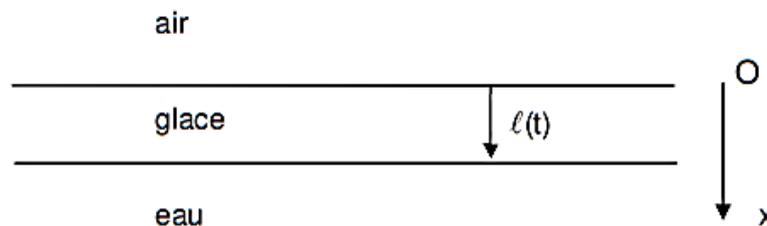


On se propose de modéliser la croissance de la couche de glace à la surface du lac, en régime quasi stationnaire. On note  $H = 30\text{ m}$  la profondeur du lac, et  $S = 10\text{ km}^2$  sa surface.

On suppose que l'eau est en permanence à la température de fusion  $T_e = 273\text{ K}$ .

L'air au-dessus du lac est à la température constante et uniforme  $T_a = 263\text{ K}$  et à la pression atmosphérique  $P_0 = 1\text{ bar}$ .

Libre de glace à l'instant  $t=0$ , le lac se couvre progressivement d'une couche de glace dont l'épaisseur à l'instant  $t$  est  $\ell(t)$  ; comme le montre la figure suivante, la position d'un point du lac est repérée par son abscisse  $x$ , l'axe  $Ox$  étant vertical descendant et l'origine  $O$  étant au niveau de la surface du lac.



Les caractéristiques de la glace sont les suivantes :

- masse volumique  $\mu = 990\text{ kg.m}^{-3}$ .
- conductivité thermique  $\lambda = 2,1\text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ .
- enthalpie massique de fusion (à  $T_e = 273\text{ K}$ )  $\Delta h_f = 335\text{ kJ.kg}^{-1}$ .
- capacité thermique massique  $c_g = 2,1\text{ kJ.kg}^{-1}\text{.K}^{-1}$ .

On fait les deux hypothèses suivantes relatives aux transferts thermiques convectifs :

- Le transfert thermique par convection à l'interface glace-air, pour une surface  $S$  de glace, pendant la durée  $dt$ , est donné par la relation  $\delta Q_c = h(T_0(t) - T_a) \cdot S \cdot dt$ , où  $T_0(t) = T(x=0, t)$  est la température de la glace en  $x=0$ . La température  $T_0$  est comprise entre  $T_a$  et  $T_e$  ( $T_a < T_0 < T_e$ ) de sorte que ce transfert s'effectue de la glace vers l'air. On donne  $h = 42\text{ W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$ .

- Le transfert thermique par convection à l'interface eau-glace est négligé, de sorte que la température à cette interface est constamment à la température de l'eau :  $T(x=\ell, t) = T_e$ .

On rappelle l'équation de diffusion thermique dans la glace :  $\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mu c_g \frac{\partial T}{\partial t}$ .

39. Calculer le rapport  $\ell_0 = \lambda / h$  en précisant son unité.

40. Le gel de l'eau induit un transfert thermique de l'eau vers l'air.

Que vaut ce transfert thermique  $q$  lors du gel de 1 kg de glace ?

41. Que vaudrait le transfert thermique  $Q$  cédé par la glace lors du gel de la totalité du lac ? On donnera le résultat sous forme d'une puissance de 10.

42. Dans l'hypothèse où  $T_0(t)$  varie lentement (régime quasi-stationnaire), justifier que la température  $T(x)$  dans la glace (pour  $x$  variant de 0 à  $\ell$ ) peut s'écrire sous la forme :

$$T(x) = a x + b \quad \text{où les constantes } a \text{ et } b \text{ sont à exprimer en fonction de } T_0, T_e \text{ et de } \ell.$$

43. Entre les instants  $t$  et  $t+dt$ ,  $\ell(t)$  varie de  $d\ell$ . Exprimer, pour cet intervalle de temps  $dt$ , le transfert thermique  $\delta Q_1$  cédé par l'eau lors de sa solidification, en fonction notamment de  $q$ .

44. Exprimer, pour ce même intervalle de temps, le transfert thermique conductif  $\delta Q_2$  dans la couche de glace du bas vers le haut, en fonction notamment de la différence  $(T_e - T_0(t))$ .

45. La continuité du flux thermique à l'interface glace-air impose :  $\delta Q_c = \delta Q_2$ .

En déduire l'expression de  $T_0(t)$  en fonction de  $T_e$ ,  $T_a$ ,  $\ell_0$  et de  $\ell(t)$ .

46. La continuité du flux thermique à l'interface eau-glace impose :  $\delta Q_c = \delta Q_1$ .

En déduire que  $\ell(t)$  vérifie l'équation différentielle de la forme suivante :  $\frac{d\ell}{dt} + \frac{\ell}{\ell_0} \frac{d\ell}{dt} = v_0$  où  $v_0$  est une constante homogène à une vitesse, que l'on exprimera en fonction de  $h$ ,  $\mu$ ,  $q$ ,  $T_e$  et  $T_a$ .

47. Intégrer l'équation précédente et montrer que  $\ell(t)$  vérifie une équation du second degré.

48. En déduire l'expression de  $\ell(t)$  tant que le lac n'est pas gelé dans sa totalité.

49. En fonction de  $\ell_0$  et  $v_0$ , exprimer un temps caractéristique  $\tau$  de l'évolution de  $\ell(t)$ , et en donner un ordre de grandeur sachant que  $v_0$  est de l'ordre de  $10^{-6} \text{ m.s}^{-1}$ .

50. En fonction de  $\ell_0$ ,  $\lambda$ ,  $c_g$  et  $\mu$ , exprimer un temps caractéristique  $\tau'$  de la diffusion dans la glace sur la longueur  $\ell_0$ , et en donner un ordre de grandeur. Conclure sur l'hypothèse du régime quasi-stationnaire faite à la question 42.

## Ex 2 : Production de travail mécanique à partir d'une source chaude

La production d'électricité est en majeure partie réalisée dans des centrales où une source chaude (combustion de charbon, de gaz, de fioul, de bois... ou nucléaire) fournit un transfert thermique à un fluide caloporteur, qui ensuite met en rotation une turbine, qui à son tour entraîne une génératrice électrique.



Exemple de la centrale à gaz de Martigues, France.  
Puissance totale de 930 MW.

### III.1 Étude du cycle à vapeur à partir du diagramme $T-s$

Nous étudions ici le cycle thermodynamique suivi par le fluide, dans un exemple simplifié et typique de ce qui est mis en œuvre dans une centrale thermique de puissance moyenne (5 à 20 MW). Le fluide caloporteur est de l'eau. Il évolue selon les étapes décrites dans le document 11.

Répondre aux trois questions suivantes en s'aidant du diagramme  $T-s$  du document 11. Pour répondre, il est nécessaire d'y tracer le cycle. Toutefois ce diagramme n'est pas à rendre avec la copie, seules les réponses aux questions qui suivent sont évaluées.

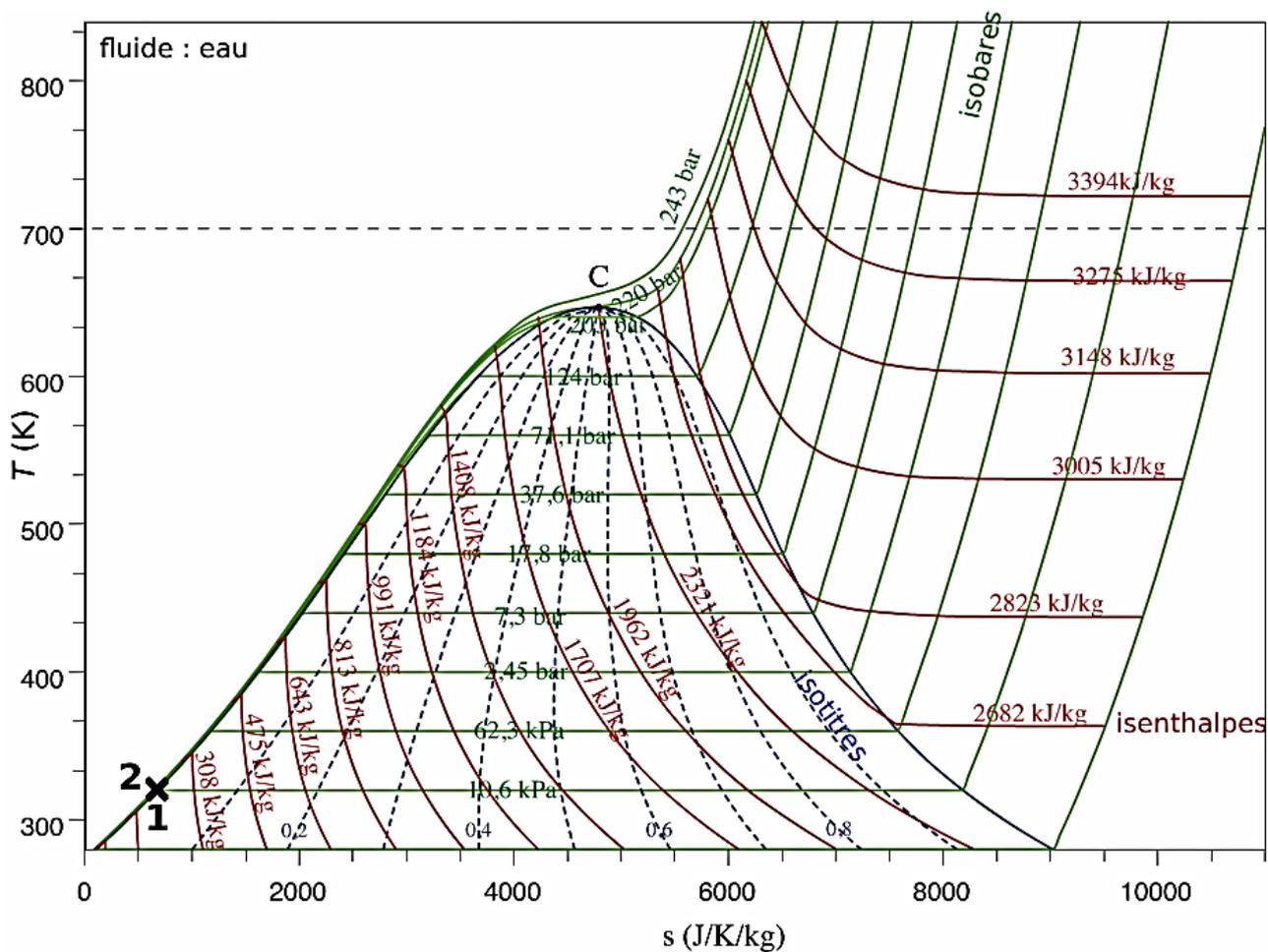
- 27 - Au point 3 : donner les valeurs approchées de l'enthalpie massique  $h_3$  et de l'entropie massique  $s_3$  du fluide.
- 28 - Au point 4 : donner les valeurs approchées de l'enthalpie massique  $h_4$  et de l'entropie massique  $s_4$  du fluide.
- 29 - Donner également les valeurs approchées du titre en vapeur  $x_4$  et de la température  $T_4$ .

On s'intéresse ensuite au rendement du cycle.

- 30 - Exprimer le transfert thermique massique  $q_{23}$  reçu par l'eau lors de l'étape  $2 \rightarrow 3$ , en fonction des enthalpies massiques. On justifiera la réponse.  
Faire l'application numérique approchée.
- 31 - Exprimer le travail indiqué massique  $w_{i,34}$  reçu par l'eau lors de la détente  $3 \rightarrow 4$  dans la turbine, en fonction des enthalpies massiques.  
Faire l'application numérique approchée et commenter son signe.
- 32 - Exprimer également le travail indiqué massique  $w_{i,12}$  reçu par l'eau lors de la compression  $1 \rightarrow 2$ , en fonction des enthalpies massiques.  
Faire l'application numérique approchée.
- 33 - Définir le rendement  $\eta$  de ce cycle en fonction de grandeurs prises parmi  $q_{23}$ ,  $q_{41}$ ,  $w_{i,34}$  et  $w_{i,12}$ .
- 34 - Faire l'application numérique approchée pour  $\eta$ .

Dans les deux questions qui suivent, on prendra pour simplifier  $\eta = 1/3$  et  $|w_{i,34}| = 1000 \text{ kJ/kg}$ . On souhaite produire une puissance mécanique  $\mathcal{P} = 50 \text{ MW}$  en sortie de turbine.

- 35 - Estimer la valeur du débit massique à imposer à l'eau dans le circuit.
- 36 - Estimer la valeur de la puissance thermique  $\mathcal{P}_{\text{th}}$  que doit recevoir l'eau lors de l'étape  $2 \rightarrow 3$ .



### Description du cycle

Les points 1 et 2 sont déjà représentés sur le diagramme  $T-s$  (ils sont quasiment confondus). Le fluide est de l'eau.

- Dans l'état 1, il est à l'état liquide saturé, de température  $T_1 = 320\text{ K}$ , pression  $p_1 = 10,6\text{ kPa}$  et enthalpie massique  $h_1 = 197\text{ kJ/kg}$ .
- $1 \rightarrow 2$  : compression adiabatique réversible.  
On donne  $T_2 = 320\text{ K}$ ,  $p_2 = 124\text{ bar}$ ,  $h_2 = 209\text{ kJ/kg}$ .
- $2 \rightarrow 3$  : apport de chaleur isobare ( $p_3 = p_2 = 124\text{ bar}$ ) et sans parties mobiles, c'est-à-dire que l'eau reçoit un transfert thermique massique en circulant dans un échangeur thermique au contact de la source chaude (là où le combustible est brûlé). Dans l'état 3 l'eau est sous forme de vapeur sèche à  $T_3 = 700\text{ K}$ .
- $3 \rightarrow 4$  : détente de l'eau dans une turbine jusqu'à être ramenée à la pression  $p_4 = p_1 = 10,6\text{ kPa}$ . Une partie du travail produit par cette turbine sert à faire fonctionner le compresseur qui réalise l'étape  $1 \rightarrow 2$ , le reste étant le travail utile (utilisé pour ensuite entraîner la génératrice électrique). On suppose la détente adiabatique et réversible. L'état 4 est diphasique et on note  $x_4$  le titre en vapeur au point 4.
- $4 \rightarrow 1$  : le fluide cède un transfert thermique vers le milieu extérieur afin de se condenser et de retourner dans l'état 1. Il le fait en circulant dans un échangeur thermique isobare et sans parties mobiles.

On néglige toute variation d'énergie cinétique ou potentielle de l'eau.

**Document 11** : diagramme température  $T$  – entropie massique  $s$  de l'eau et description du cycle modèle. Sur le diagramme sont également tracés les isobares, isenthalpes et isotitres.

### III.2 Étude du cycle à vapeur sans le diagramme et rôle de $p_3$ et $T_3$

Cette sous-partie vise à aboutir à une expression du rendement du cycle en se basant non pas sur une lecture du diagramme  $T$ - $s$ , mais sur des expressions établies sous des hypothèses simplificatrices :

- la vapeur est décrite comme un gaz parfait ;
- on donne  $c_p = 2,0 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  la capacité thermique massique à pression constante de la vapeur d'eau, supposée constante.

Par ailleurs, on note  $h_0 = 2590 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  l'enthalpie massique de la vapeur d'eau à  $T_0 = 320 \text{ K}$  et  $p_0 = 10,6 \text{ kPa}$ , et  $s_0 = 8150 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  l'entropie massique en ce même point.

**37** - Établir l'expression de l'enthalpie massique  $h_3$  dans l'état 3, en fonction de  $c_p$ ,  $T_3$ ,  $T_0$  et  $h_0$ .

Étant donnés  $p_3 = 124 \text{ bar}$  et  $T_3 = 700 \text{ K}$ , on peut utiliser l'expression de l'entropie massique du gaz parfait pour obtenir  $s_3 = s_0 + c_p \ln(T_3/T_0) - (R/M) \ln(p_3/p_0) = 6450 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

**38** - Quelle est alors la valeur de l'entropie massique  $s_4$  au point 4 sous l'hypothèse d'une détente adiabatique et réversible ?

On admet que l'état 4 est diphasique, avec  $T_4 = 320 \text{ K}$  et  $s_4$  connu. On note  $h_v$  et  $s_v$  l'enthalpie massique et l'entropie massique de la vapeur saturée à  $T_4$ , et  $h_l$  et  $s_l$  celles du liquide saturé à  $T_4$ .

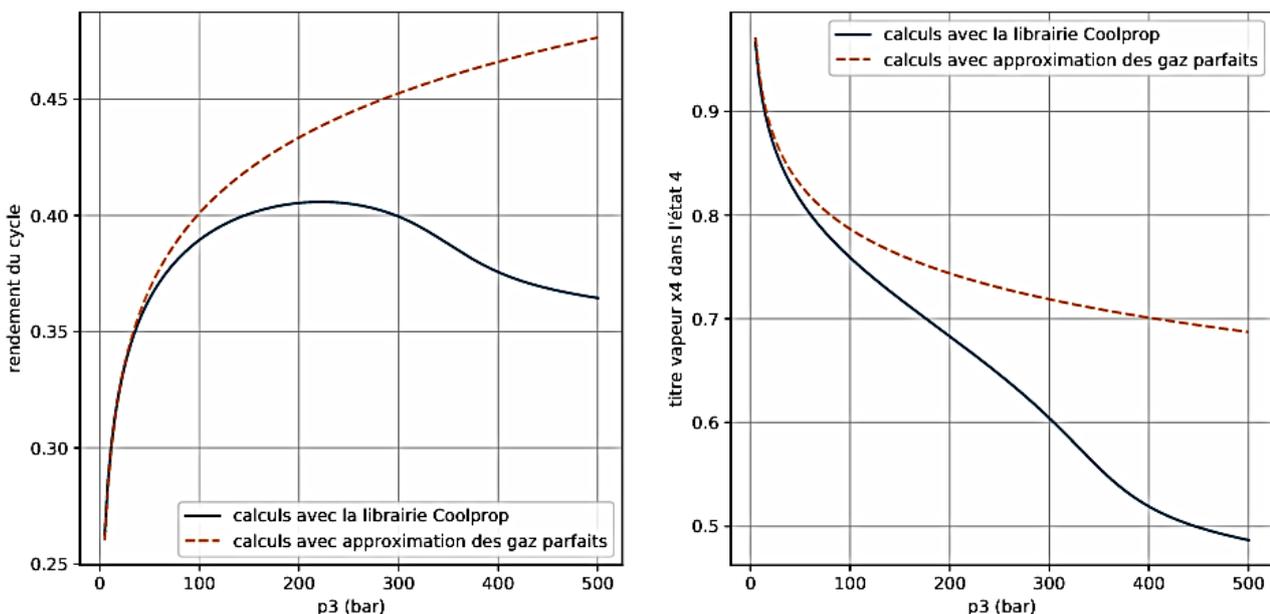
**39** - Donner l'expression du titre massique en vapeur  $x_4$  au point 4, en fonction de grandeurs parmi celles ci-dessus.

**40** - Même question pour l'enthalpie massique  $h_4$  au point 4.

Nous avons alors toutes les grandeurs nécessaires au calcul du rendement  $\eta$ . Les applications numériques donnent  $h_3 = 3350 \text{ kJ/kg}$ ,  $x_4 = 0,77$ ,  $h_4 = 2044 \text{ kJ/kg}$ , et  $\eta = 0,41$ , ce qui n'est pas très éloigné de ce qui est obtenu sans approximation en utilisant le diagramme (partie III.1).

Le graphique du document 12 compare les valeurs du rendement  $\eta$  et du titre  $x_4$  obtenues avec les approximations faites dans cette partie III.2 (gaz parfait, etc.), et obtenues avec un calcul beaucoup plus exact (qui revient à utiliser le diagramme, partie III.1).

**41** - À votre connaissance, dans quel domaine de température et de pression le modèle du gaz parfait est-il approprié ? En quoi ceci se retrouve-t-il ici ?



**Document 12** : rendement du cycle (à gauche) et titre en vapeur dans l'état 4 (à droite) en fonction de la valeur choisie pour la pression  $p_3$ . Ici  $T_3 = 700 \text{ K}$  est fixé et l'état 1 est toujours le même. Courbes en traits pointillés : d'après les expressions approchées établies dans la sous-partie III.2. Courbes en traits pleins : calculs réalisés avec la librairie Coolprop (qui sert aussi au tracé du diagramme  $T$ - $s$  de l'énoncé).

### III.3 Recherche du rendement maximal

Cette sous-partie mobilise des capacités numériques et peut être traitée sans avoir abordé les autres.

On dispose de tableaux qui contiennent les données suivantes :

- $p_3$  contient des valeurs de pression allant de 5 bar à 500 bar avec  $N=150$  valeurs.
- $\eta$  contient les valeurs calculées pour le rendement, c'est-à-dire que  $\eta(i)$  est la valeur du rendement lorsque la pression  $p_3$  vaut  $p_3(i)$ . Ces valeurs correspondent à la courbe en trait plein du graphique de gauche du document 12.
- De même,  $x_4$  contient les valeurs calculées pour le titre en vapeur dans l'état 4 (courbe en trait plein du graphique de droite du document 12).

Il apparaît graphiquement que le tableau  $\eta$  admet une valeur maximale (courbe en trait plein du graphique de gauche du document 12), dont on cherche à déterminer la valeur à l'aide d'un algorithme

**42** - Proposer un programme Python qui affiche

- la valeur maximale du tableau  $\eta$  et l'indice  $i$  correspondant
- les valeurs de la pression  $p_3$  et du titre  $x_4$  correspondant au maximum de  $\eta$ .