

Contenu :

5/2 - Ex 1 : Croissance hivernale de l'épaisseur de la glace de la banquise1
Transferts thermiques

3/2 - Ex 1 : Croissance de la glace PT 20223
Transferts thermiques

Ex 2 : Le rayonnement thermique des instruments5
Transferts thermiques par rayonnement

5/2 - Ex 1 : Croissance hivernale de l'épaisseur de la glace de la banquise

Pour étudier la croissance de la couche de glace en hiver, on modélise l'océan sous la banquise en formation de la manière suivante (cf. fig. 5) : en profondeur, la température de l'eau est maintenue constante à $T_1 = 4^\circ\text{C}$ par les courants océaniques. Sur une hauteur constante e sous la banquise, l'eau se refroidit progressivement jusqu'à atteindre $T_0 = 0^\circ\text{C}$ à l'altitude $z = 0$ de formation de la glace (on néglige tout effet de salinité de l'eau). La couche de glace a une épaisseur croissante $z_g(t)$ qu'il s'agit de déterminer ; au-dessus de celle-ci, l'air est à la température constante $T_2 = -40^\circ\text{C}$. On notera λ_e et λ_g les conductivités thermiques et c_e et c_g les capacités thermiques massiques de l'eau liquide et de la glace, ρ_g et l_f la masse volumique et l'enthalpie massique de fusion de la glace ; toutes ces grandeurs sont des constantes.

L'épaisseur de glace $z_g(t)$ augmente régulièrement du fait de la cristallisation de l'eau refroidie à $T_0 = 0^\circ\text{C}$ à la base de la couche de glace. Toutes les études pourront être faites pour un système défini par un cylindre vertical de surface S unité (cf. fig. 5) au sein duquel les transferts thermiques unidimensionnels sont régis par la loi de Fourier.

□ 17 — Par une étude des échanges thermiques de l'épaisseur δz prise à l'intérieur de la glace, établir une équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T_g(z,t)$ au sein de la glace.

□ 18 — Déterminer une expression donnant l'ordre de grandeur de la durée Δt de la diffusion thermique au sein de la glace sur une hauteur Δz . Quelle durée doit-on attendre afin de pouvoir considérer que, pour des évolutions assez lentes, la température T_g ne dépend pratiquement plus du temps ? Préciser ce que l'on entend par « assez lentes ».

On se place dans ce cas dans toute la suite : dans l'eau comme dans la glace, les répartitions de température seront supposées quasi-statiques.

□ 19 — Définir et exprimer les résistances thermiques R_g et R_e , pour une aire donnée S , des couches de glace et d'eau refroidie sous la glace.

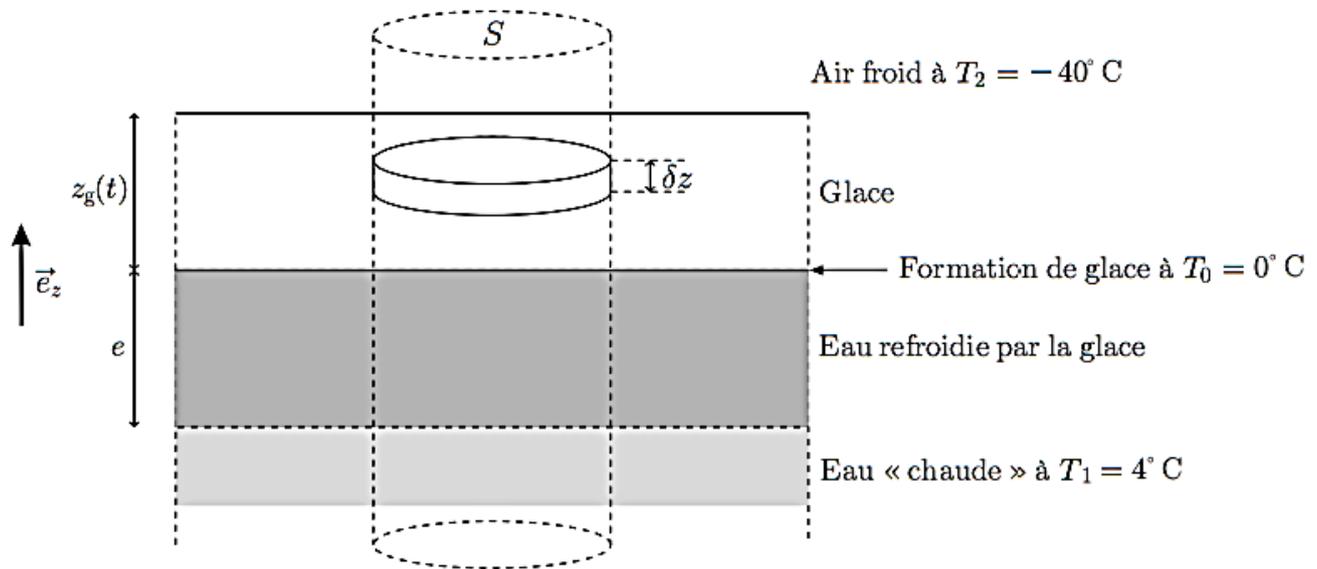


FIGURE 5 – L’océan sous la banquise en formation

Les transferts thermiques à travers la surface supérieure de la banquise sont décrits par la loi de Newton des transferts pariétaux (radiatifs et convecto–conductifs) : la puissance échangée par unité d’aire de cette surface vérifie $|\mathcal{P}_u| = h|T_s - T_2|$ où T_s est la température au sommet de la couche de glace ; le coefficient $h > 0$ de la loi de Newton est supposé connu et constant.

□ 20 — Exprimer la résistance thermique R_i , pour une aire S , de l’interface entre l’air et la glace.

□ 21 — Montrer que le régime quasi–permanent de croissance de la couche de glace peut être décrit par le schéma électrique équivalent de la figure 6 et préciser l’expression du « courant » Φ du « générateur de courant » en fonction notamment de l_f , ρ_g et de la vitesse de croissance $v_g = \frac{dz_g}{dt}$ de la couche de glace.

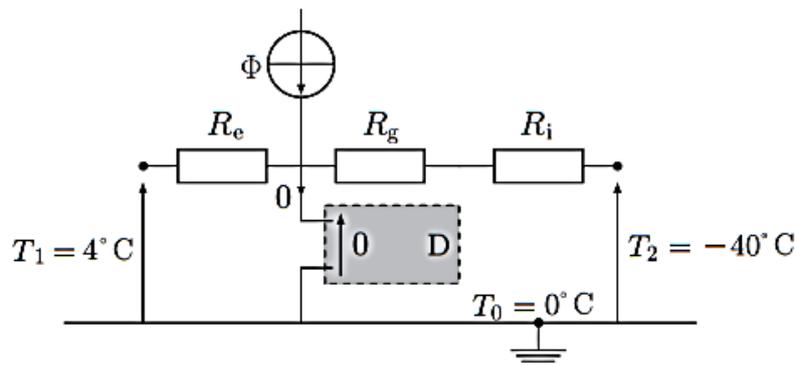


FIGURE 6 – Circuit électrique équivalent à la croissance de la couche de glace. Le dipôle D représenté sur cette figure permet d’assurer une différence de potentiel nulle sans appel de courant dans cette branche du circuit.

□ 22 — Établir l’équation différentielle vérifiée par $z_g(t)$. On suppose que pour toutes les valeurs de t considérées on a $\frac{e}{\lambda_e} \gg \frac{z_g}{\lambda_g} + \frac{1}{h}$, en déduire la loi d’évolution de l’épaisseur de la couche de glace sous la forme $\tau_g [l_g z_g(t) + z_g^2(t)] = \ell_g^2 t$ où l’exprimera les grandeurs τ_g et ℓ_g en fonction des paramètres du modèle. L’instant $t = 0$ correspond au début de la formation de la banquise.

□ 23 — Tracer et commenter l’allure de la courbe donnant z_g en fonction de t . On montrera notamment l’existence de deux régimes successifs.

3/2 - Ex 1 : Croissance de la glace

On s'intéresse au lac de Joux situé en Suisse.

Nous sommes en hiver et la température extérieure est de $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$; le lac gèle et devient la plus grande patinoire naturelle d'Europe.

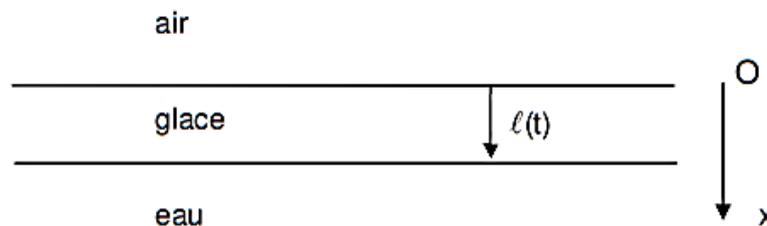


On se propose de modéliser la croissance de la couche de glace à la surface du lac, en régime quasi stationnaire. On note $H = 30\text{ m}$ la profondeur du lac, et $S = 10\text{ km}^2$ sa surface.

On suppose que l'eau est en permanence à la température de fusion $T_e = 273\text{ K}$.

L'air au-dessus du lac est à la température constante et uniforme $T_a = 263\text{ K}$ et à la pression atmosphérique $P_0 = 1\text{ bar}$.

Libre de glace à l'instant $t=0$, le lac se couvre progressivement d'une couche de glace dont l'épaisseur à l'instant t est $\ell(t)$; comme le montre la figure suivante, la position d'un point du lac est repérée par son abscisse x , l'axe Ox étant vertical descendant et l'origine O étant au niveau de la surface du lac.



Les caractéristiques de la glace sont les suivantes :

- masse volumique $\mu = 990\text{ kg.m}^{-3}$.
- conductivité thermique $\lambda = 2,1\text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$.
- enthalpie massique de fusion (à $T_e = 273\text{ K}$) $\Delta h_f = 335\text{ kJ.kg}^{-1}$.
- capacité thermique massique $c_g = 2,1\text{ kJ.kg}^{-1}\text{.K}^{-1}$.

On fait les deux hypothèses suivantes relatives aux transferts thermiques convectifs :

- Le transfert thermique par convection à l'interface glace-air, pour une surface S de glace, pendant la durée dt , est donné par la relation $\delta Q_c = h(T_0(t) - T_a) \cdot S \cdot dt$, où $T_0(t) = T(x=0, t)$ est la température de la glace en $x=0$. La température T_0 est comprise entre T_a et T_e ($T_a < T_0 < T_e$) de sorte que ce transfert s'effectue de la glace vers l'air. On donne $h = 42\text{ W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$.

- Le transfert thermique par convection à l'interface eau-glace est négligé, de sorte que la température à cette interface est constamment à la température de l'eau : $T(x=\ell, t) = T_e$.

On rappelle l'équation de diffusion thermique dans la glace : $\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mu c_g \frac{\partial T}{\partial t}$.

39. Calculer le rapport $\ell_0 = \lambda / h$ en précisant son unité.

40. Le gel de l'eau induit un transfert thermique de l'eau vers l'air.

Que vaut ce transfert thermique q lors du gel de 1 kg de glace ?

41. Que vaudrait le transfert thermique Q cédé par la glace lors du gel de la totalité du lac ? On donnera le résultat sous forme d'une puissance de 10.

42. Dans l'hypothèse où $T_0(t)$ varie lentement (régime quasi-stationnaire), justifier que la température $T(x)$ dans la glace (pour x variant de 0 à ℓ) peut s'écrire sous la forme :

$$T(x) = a x + b \quad \text{où les constantes } a \text{ et } b \text{ sont à exprimer en fonction de } T_0, T_e \text{ et de } \ell.$$

43. Entre les instants t et $t+dt$, $\ell(t)$ varie de $d\ell$. Exprimer, pour cet intervalle de temps dt , le transfert thermique δQ_1 cédé par l'eau lors de sa solidification, en fonction notamment de q .

44. Exprimer, pour ce même intervalle de temps, le transfert thermique conductif δQ_2 dans la couche de glace du bas vers le haut, en fonction notamment de la différence $(T_e - T_0(t))$.

45. La continuité du flux thermique à l'interface glace-air impose : $\delta Q_c = \delta Q_2$.

En déduire l'expression de $T_0(t)$ en fonction de T_e , T_a , ℓ_0 et de $\ell(t)$.

46. La continuité du flux thermique à l'interface eau-glace impose : $\delta Q_c = \delta Q_1$.

En déduire que $\ell(t)$ vérifie l'équation différentielle de la forme suivante : $\frac{d\ell}{dt} + \frac{\ell}{\ell_0} \frac{d\ell}{dt} = v_0$ où v_0 est une constante homogène à une vitesse, que l'on exprimera en fonction de h , μ , q , T_e et T_a .

47. Intégrer l'équation précédente et montrer que $\ell(t)$ vérifie une équation du second degré.

48. En déduire l'expression de $\ell(t)$ tant que le lac n'est pas gelé dans sa totalité.

49. En fonction de ℓ_0 et v_0 , exprimer un temps caractéristique τ de l'évolution de $\ell(t)$, et en donner un ordre de grandeur sachant que v_0 est de l'ordre de 10^{-6} m.s^{-1} .

50. En fonction de ℓ_0 , λ , c_g et μ , exprimer un temps caractéristique τ' de la diffusion dans la glace sur la longueur ℓ_0 , et en donner un ordre de grandeur. Conclure sur l'hypothèse du régime quasi-stationnaire faite à la question 42.

Ex 2 : Le rayonnement thermique des instruments

Le télescope JWST est conçu pour observer le rayonnement infrarouge d'objets célestes distants et peu lumineux. La bande de sensibilité spectrale des instruments du télescope est comprise entre $0,6 \mu\text{m}$ et $28 \mu\text{m}$. Afin que les signaux reçus par le télescope ne soient pas perturbés par le rayonnement infrarouge émis par le télescope lui-même, il est nécessaire de maintenir les instruments du télescope à une valeur proche de 39K . Un des détecteurs doit même être maintenu à une température encore inférieure, voisine de 7K .

Dans cette partie, on propose d'estimer de quel facteur est réduite la puissance rayonnée dans le domaine infrarouge par un corps maintenu à une température de 39K par comparaison à un corps de température bien plus élevée. Le modèle retenu est celui du rayonnement du corps noir.

II.B.1) Le rayonnement d'équilibre thermique et la loi de Planck

On considère un cavité vide, de volume V , où est réalisé un équilibre thermodynamique entre les parois matérielles de la cavité et un rayonnement électromagnétique prisonnier de la cavité. L'ensemble est maintenu à la température T . Le rayonnement est décrit par un ensemble de N photons.

L'énergie électromagnétique $d\mathcal{E}$ du rayonnement correspondant à la bande de fréquence $[\nu, \nu + d\nu]$ est donnée par la loi de Planck :

$$d\mathcal{E} = u(\nu)Vd\nu \quad \text{où} \quad u(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}. \quad (\text{II.1})$$

Les constantes c , h et k_B sont respectivement la célérité de la lumière dans le vide et les constantes de Planck et de Boltzmann.

Q 18. Préciser l'unité dans le système international de la densité spectrale d'énergie $u(\nu)$ qui intervient dans l'équation II.1.

Q 19. Rappeler l'expression (relation de Planck-Einstein) du quantum d'énergie ϵ porté par un photon de fréquence associée ν . $\hookrightarrow \epsilon = h\nu$ (cf Ch.MQ1)

Dans les questions qui suivent, on s'intéresse au rayonnement électromagnétique, prisonnier de la cavité, en se limitant à l'intervalle de fréquence $[\nu_1, \nu_2]$ avec $\nu_2 \geq \nu_1$ qui correspond à la bande de sensibilité spectrale des instruments du télescope.

Q 20. Calculer les valeurs des fréquences ν_1 et ν_2 .

Q 21. Montrer que l'énergie \mathcal{E}_{12} du rayonnement électromagnétique prisonnier de la cavité et de fréquences comprises entre ν_1 et ν_2 , s'exprime comme suit, moyennant un changement de variable :

$$\mathcal{E}_{12} = V \frac{8\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^3} I_{[\xi_1, \xi_2]}, \quad (\text{II.2})$$

$$\text{où } I_{[\xi_1, \xi_2]} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\xi^3 d\xi}{\exp(\xi) - 1}.$$

Q 22. Établir que le nombre N_{12} de photons contenus dans la cavité, et dont la fréquence associée est comprise entre ν_1 et ν_2 , s'exprime comme suit :

$$N_{12} = V \frac{8\pi k_B^3 T^3}{h^3 c^3} J_{[\xi_1, \xi_2]}, \quad (\text{II.3})$$

$$\text{où } J_{[\xi_1, \xi_2]} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\xi^2 d\xi}{\exp(\xi) - 1}.$$

Q 23. Dédire des équations II.2 et II.3 une expression de l'énergie moyenne individuelle des photons contenus dans la cavité et dont les fréquences associées sont comprises entre ν_1 et ν_2 . Préciser comment cette énergie moyenne dépend de la température.

II.B.2) Réduction du rayonnement par refroidissement

Une ouverture, de dimensions assez faibles pour ne pas perturber l'équilibre thermodynamique interne, est pratiquée dans les parois de la cavité et permet aux photons de s'échapper. Une telle ouverture constitue un

corps noir et le rayonnement émis est appelé *rayonnement du corps noir*. Par souci de simplicité, on assimile chacun des éléments du télescope à un corps noir de température T .

Q 24. Au regard des résultats établis aux questions 21 à 23, justifier qualitativement que la puissance émise par chacun des éléments du télescope, dans l'intervalle de fréquences considéré, est proportionnelle à sa température à la puissance 4.

Q 25. En déduire une estimation de la valeur du facteur de réduction de la puissance émise dans l'infrarouge par les différents éléments du télescope lorsque la température de celui-ci passe de la valeur 333 K à la valeur 39 K.

Q 26. Le refroidissement a pour effet de réduire à la fois le nombre de photons émis et leur énergie moyenne. Identifier, parmi ces deux effets, celui qui a l'influence la plus importante sur la réduction de la puissance émise.