TP 4A – Diffusion 1D

Analogie thermo-électrique & Résolution numérique

Problématiques :

- Comment étudier expérimentalement de façon simple la diffusion thermique par analogie thermo-électrique ?
- Comment résoudre numériquement l'équation de la chaleur pour un problème unidimensionnel ?

Compétences expérimentales au programme :

Régime stationnaire. Résistance thermique.	Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique.
Équation de la diffusion thermique.	A l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.

Objectifs :

- Exploiter des mesures électriques pour étudier la diffusion *thermique* en régime stationnaire et une onde *thermique* sinusoïdale.
- Résoudre numériquement l'équation de la diffusion thermique avec la méthode des différences finies.

A faire pour la séance de TP :

- Lire entièrement le sujet et répondre aux questions ✎.

Dans tout ce TP, on s'intéresse au problème de la diffusion thermique dans une barre d'axe (Ox), de section S et de longueur L très supérieure à $\sqrt{S}$. On fait l'hypothèse que la barre est parfaitement calorifugée latéralement. On introduit D le **coefficient de diffusion thermique** du matériau :

$$D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

avec ρ sa **masse volumique**, c sa **capacité thermique massique** *et* λ sa **conductivité thermique**.

1e partie : Etude expérimentale par analogie thermo-électrique

1) Analyse théorique : Modélisation - Circuit électrique analogue

✎➲ 1. Rappeler l'équation de la diffusion thermique sans source. Comment se simplifie-t-elle dans le cas 1D en géométrie cartésienne ?

✎➲ 2. Montrer que l'évolution spatiale de la température en régime stationnaire est de la forme :

$$T(x) = \alpha x + \beta$$

✎➲ 3. On considère les conditions aux limites suivantes :

$$T(x = 0) = T_0 = 10\ °C \text{ et } T(x = L) = T_L = 0\ °C$$

Déterminer le profil de température $T(x)$ et en déduire l'expression du flux Φ et de la résistance thermique R_{th} de la barre.

✎➲ 4. Donner les analogies électrocinétique/thermique dans l'ARQS :

Electrocinétique	***Thermique***
Potentiel électrique V et tension $\Delta V = U$	
Courant électrique d'intensité I	
Résistance électrique : R	
Capacité d'un condensateur : C	

Pour étudier la diffusion thermique, on relève la température au sein de la barre au cours du temps, cf TP 4B. On divise l'intervalle $[0, L]$, en $N + 2$ points, numérotés de 0 à $N + 1$, régulièrement espacés de dx (figure 2) ; dx est appelé le « pas d'espace ». A l'intérieur de la barre (frontières intérieure et extérieure exclues) se trouvent donc N points. On cherche à obtenir la température en ces points particuliers à chaque instant.

Le temps est discrétisé en intervalles de durée dt et on ne s'intéresse au profil de températures qu'aux instants particuliers $t_i = i.dt$.

On note :

$$T[k][i] = T(x_k, t_i)\ ; T[k \pm 1][i] = T(x_k \pm dx, t_i)\ ; T[k][i+1] = T(x_k, t_i + dt)$$

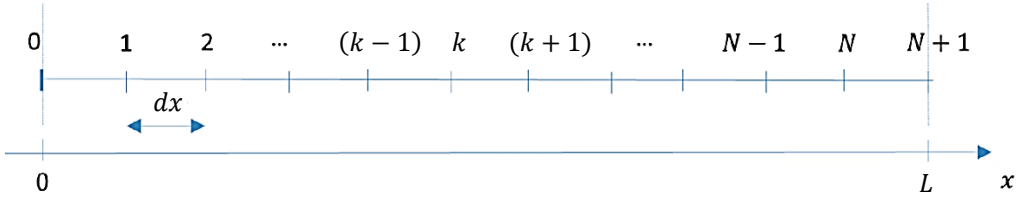


Figure 2 - Discrétisation spatiale dans la direction x.

Le modèle électrocinétique équivalent est le suivant :

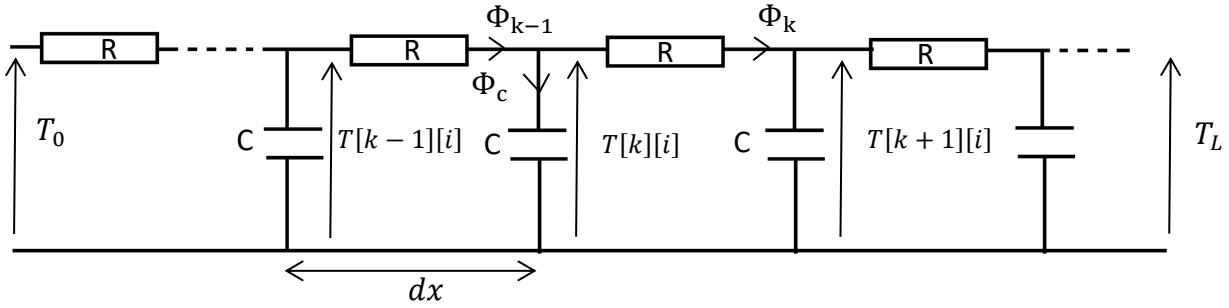


Figure 3 – Modèle électrocinétique équivalent
R représente la résistance thermique de la tranche d'épaisseur dx, de section S de la barre.
C représente la capacité thermique de la tranche de section S, d'épaisseur dx de la barre.

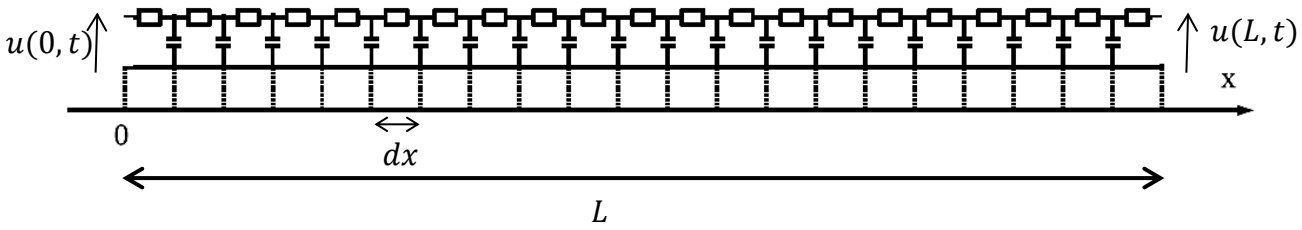
✎➲ 5. Justifier succinctement cette modélisation.

✎➲ 6. Exprimer R en fonction de dx, λ et S puis C en fonction de dx, S, ρ et c.

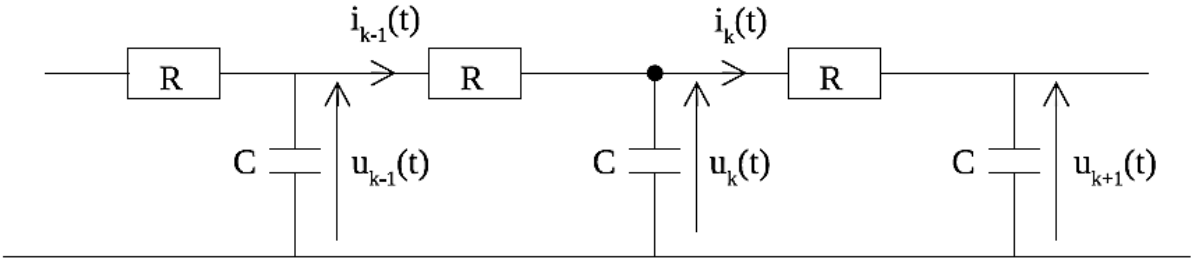
✎➲ 7. En déduire l'expression du coefficient de diffusion D en fonction de dx, R et C.

2) Etude expérimentale pour diverses conditions imposées en x = 0

Dans ce TP, on utilise la maquette constituée de 20 cellules R-C, celle-ci est analogue à la barre en aluminium étudiée au TP4C. On a $R = 1\ k\Omega$ et $C = 100\ nF$.



Pour une cellule et ses voisines :



a) Etude en régime stationnaire

✋ Grâce au GBF (« utility » puis « DC ON »), appliquer une tension constante $u_0 = U_0 = 10\ V$ en $x = 0$.
✋Court-circuiter l'extrémité en $k = 20$ (donc $u_{20} = 0\ V$).
✋Relever les tensions $u_k = u(x_k)$ dans un tableau et tracer u_k en fonction de k.
➲ 8. Evaluer la pente. Interpréter par une étude théorique du circuit en régime stationnaire.

b) Etude en régime sinusoïdal forcé – Onde thermique *(cf TDT2/4 ex Onde thermique)*

On applique une tension sinusoïdale en $x = 0 : u_0(t) = U_m.\cos(\omega t)$. L'extrémité située en $k = 20$ n'est pas court-circuité et on supposera la ligne « semi-infinie » (i.e. qu'elle s'étend sur l'intervalle $[0, +\infty[$).
Une situation analogue est obtenue pour la diffusion thermique dans la barre si l'on impose :

$$T(0,t) = T_0 + \alpha.\cos(\omega t)\,, avec\ T_0 = 0°C$$

On pose $\theta(x,t) = T(x,t) - T_0$

✐➲ 9. $T(x,t)$ vérifie l'équation de la chaleur $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D.\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$. On cherche une solution sous la forme : $\theta(x,t) = f(x).\cos(\omega t)$ et on utilise la méthode des complexes. Montrer que $\theta(x,t)$ s'écrit :

$$\theta(x,t) = \alpha.\, e^{-\frac{x}{\delta}}.\cos(\omega t - \frac{x}{\delta})$$

Expliciter δ en fonction de D et ω.
✐➲ 10. Expliquer le phénomène mis en évidence par la présence du terme exponentiel. Quelle est l'unité de δ, comment nommer cette grandeur ?

✋Appliquer une tension sinusoïdale d'amplitude $U_m = 7{,}5\ V$ et de fréquence $f = 100\ Hz$ en $x = 0$.
➲ 11. Justifier a posteriori l'hypothèse du modèle théorique : ligne « semi-infinie ».
➲ 12. Observer $u_0(t), u_4(t), u_8(t)$ et $u_{12}(t)$ à l'oscilloscope et commenter les courbes.
➲ 13. Mesurer les amplitudes de ces tensions et tracer $ln\left(\frac{U_k}{U_m}\right)$ en fonction de k et analyser les résultats obtenus *(on utilisera l'analogie thermo-électrique et les résultats des questions 7 et 9 pour exprimer δ en fonction de dx, R, C et ω)*.
➲ 14. Mesurer les déphasages entre les tensions $u_k(t)$ et $u_0(t)$ et analyser les résultats obtenus.

2e partie : Etude numérique

1) Méthode des différences finies

On cherche la solution $T(x,t)$ pour $x \in [0,L]$ et pour $t \in [0,tf]$ de l'équation de la diffusion thermique dans le cas 1D en géométrie cartésienne :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Pour résoudre numériquement cette équation, il faut la discrétiser.

On introduit T un tableau qui rassemble les températures en différents points de la barre et à différents instants. T a $nx \times nt$ éléments avec $\boldsymbol{nx}$ **le nombre de points** sur l'intervalle $[0,L]$ et $\boldsymbol{nt}$ **le nombre d'instants** sur l'intervalle $[0,tf]$ où on cherche la température.

On introduit un **pas d'espace :** $\boldsymbol{dx = \frac{L}{nx-1}}$ et un **pas de temps :** $\boldsymbol{dt = \frac{tf}{nt-1}}$.

Pour une expérience, dx correspond à la distance entre deux capteurs de température et dt correspond à la période d'échantillonnage. On a :

$\boldsymbol{T[k][i] = T(x_k, t_i) = T(k.dx, i.dt)}$ avec $k \in [\![0, nx-1]\!]$ et $i \in [\![0, nt-1]\!]$;

$T[k] = T(x_k, t)$ qui donne l'évolution temporelle de la température en x_k ;

$T[:,i] = T(x, t_i)$ qui donne le profil de température à l'instant t_i.

On peut utiliser la **méthode des différences finies** qui dérive de la méthode d'Euler explicite.

✎➲ 15. Selon cette méthode, donner les expressions approchées de la dérivée partielle 1e temporelle de la température et de la dérivée partielle 2e spatiale de la température. Réécrire l'équation de diffusion avec ces résultats et en déduire la relation de récurrence qui donne $\boldsymbol{T[k][i+1]}$ **en fonction de** $\boldsymbol{T[k][i]}$**,** $\boldsymbol{T[k-1][i]}$ **et** $\boldsymbol{T[k+1][i]}$.

On admet que l'erreur associée à ce schéma numérique d'une itération à la suivante conduit au **critère de stabilité** (de von Neumann) suivant :

$$\frac{D.dt}{dx^2} \leq \frac{1}{2}$$

2) Mise en œuvre

On s'intéresse à une barre en aluminium de coefficient de diffusion $D = 1.10^{-4}\, m^2.s^{-1}$ et de longueur $L = 15{,}4\, cm$, de section $S = 2\, cm^2$. On fait l'hypothèse que la barre est parfaitement calorifugée latéralement. On note (Ox) l'axe de la barre.

La barre est initialement à l'équilibre thermique à $20\ °C$.

A l'instant t = 0, les extrémités de la barre sont mises en contact avec deux thermostats tels que les conditions aux limites sont :

$$\forall\, t > 0, T(0,t) = 65\ °C \quad et\ T(L,t) = 20\ °C$$

<u>Rq</u> : il s'agit de conditions aux limites de Dirichlet.

On choisit une période d'échantillonnage T_e et pendant $800\ s$, on mesure régulièrement la température avec 8 sondes placées sur la barre tous les $2{,}2\ cm$.

➲ 16. Avec $T_e = 1\ s$, la condition de stabilité de la résolution numérique est-elle vérifiée ?

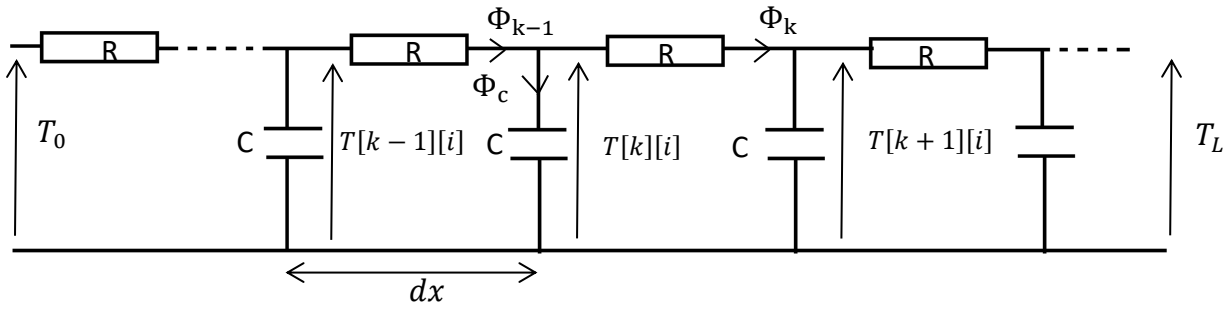
✋ Compléter le programme nommé «TP4A_Resolution num_barre alu_à compléter » (fichier disponible sur cahier de prépa) permettant de résoudre l'équation de diffusion avec la méthode explicite par différences finies.

Le programme permet de tracer l'évolution temporelle de la température au niveau des différents capteurs et les profils de températures aux instants suivants : $0\ s$; $8\ s$; $40\ s$; $80\ s$ *et* $800\ s$.

➲ 17. Commenter les courbes obtenues.

3) Discrétisation de l'équation de diffusion via l'analogie thermo-électrique

Rappel de la modélisation à l'instant t_i :

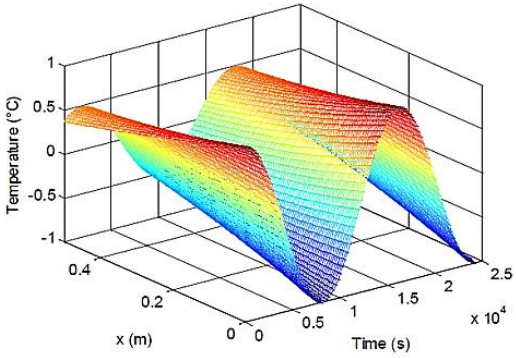


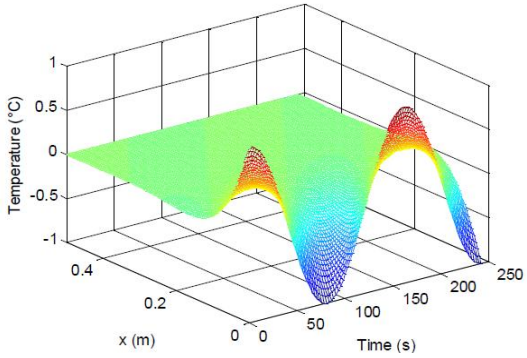
✎➲ 18. Quelle loi de Kirchhoff appliquée au réseau électrique traduit le bilan thermique du « réseau thermique » ? Appliquer cette loi pour montrer que :

$$C\frac{dT[k][i]}{dt} = \frac{T[k-1][i] - 2.T[k][i] + T[k+1][i]}{R}$$

✎➲ 19. En écrivant qu'à l'ordre 1 en dt, $\frac{dT[k][i]}{dt} \simeq \frac{T[k][i+1]-T[k][i]}{dt}$, déterminer la relation de récurrence qui donne $T[k][i+1]$ en fonction de $T[k][i]$, $T[k-1][i]$ et $T[k+1][i]$.
Vérifier que l'on retrouve bien le schéma numérique du § 1.

Pour les conditions imposées au § 2.b (RSF) de la 1e partie, une simulation informatique permet de visualiser $\theta(x,t)$ pour deux matériaux différents :





✎➲ 20. Pour quel matériau la valeur de δ est-elle la plus grande ?
✎➲ 21. Conclure sur la comparaison de la diffusivité des deux matériaux.

Rotation TP4 :

	01-oct	08-oct	15-oct
Laura - Romain - Antony	C	B	A
Albin - Aubin - Nolann	C	B	A
Loane - Roman - Raphaël A.	B	A	C
Nathan - Max - Salahaddin	A	C	B
Eglantine - Nolan - Raphaël B.	A	C	B

	01-oct	08-oct	15-oct
Lazare - Antoine D.	C	B	A
Antoine V. - Stanislas	C	B	A
Zaccharie - Camille	B	A	C
Robin - Ilyès	A	C	B
Gabriel	A	C	B