# – Interro n°02 – Sujet A –

**– Mercredi 17 septembre 2025 –**

1. Donner le développement limité à l'ordre $n$ en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$.
2. Calculer (si elles existent) les limites suivantes

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} (\mathrm{sh}\,(x) + \cos(x))^{1/x}$.

   (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(2x)}{x(\mathrm{e}^x - 1)}$

3. Montrer l'existence et calculer la dérivée première de $f : x \mapsto \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2}$
4. Trouver un équivalent simple quand $n$ tend vers $+\infty$ de : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n+2}}$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.
5. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.

# – Interro n°02 – Sujet B –

**– Mercredi 17 septembre 2025 –**

1. Donner le développement limité à l'ordre $n$ en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.
2. Calculer (si elles existent) les limites suivantes
   (a) $\lim\limits_{x \to 0} (\sin(x) + \mathrm{ch}\,(x))^{1/x}$.
   (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(3x) - 1}{x(\mathrm{e}^{x} - 1)}$
3. Montrer l'existence et calculer la dérivée première de $f : x \mapsto \dfrac{\ln\left(2 + x^2\right)}{2 + x^2}$
4. Trouver un équivalent simple quand $n$ tend vers $+\infty$ de : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}}$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.
5. Soit, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.

# – Interro n°02 – Sujet A – – Corrigé –

1. $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n)$
2. Calculer (si elles existent) les limites suivantes

   (a) $\lim_{x\to 0} (\mathrm{sh}\,(x) + \cos(x))^{1/x}$.

   Pour $x$ au voisinage de 0, $(\mathrm{sh}\,(x)+\cos(x))^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(\mathrm{sh}\ x + \cos x)\right)$.

   Or, $\mathrm{sh}\ x + \cos x = 1 + x + \mathrm{o}(x)$ donc $\ln(\mathrm{sh}\ x + \cos x) = x + \mathrm{o}(x)$.

   Alors, $\frac{1}{x}\ln(\mathrm{sh}\ x + \cos x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 \xrightarrow[x\to 0]{}$ et par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

   $$(\mathrm{sh}\,(x)+\cos(x))^{1/x} \xrightarrow[x\to 0]{} \mathrm{e}$$

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x(\mathrm{e}^{x}-1)}$

   $1-\cos(2x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}(2x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} 2x^2$.

   $x(\mathrm{e}^{x}-1) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$. On en déduit $\frac{1-\cos(2x)}{x(\mathrm{e}^{x}-1)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x^2}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} 2$. Alors, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x(\mathrm{e}^{x}-1)} = 2$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 > 0$. La fonction $f$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$f'(x) = \frac{(1+x^2)\frac{2x}{1+x^2} - 2x\ln(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}(1-\ln(1+x^2))$$

4. Soit $n \neq 1$,

   $$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+2}} &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} - \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + 1 - \frac{1}{2n} - 2 + \frac{2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\sim \frac{3}{2n\sqrt{n}} \end{aligned}$$

   Comme $3/2 > 1$, par TCPSTP, la série $\sum u_n$ converge.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

   On pose $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $w_n = u_n - v_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

La série de terme général $v_n$ est une série alternée. La suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ décroît et converge vers 0. D'après le CSSA, $\sum v_n$ converge.
De plus, $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$. Or, la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge. Par critère spécial des séries alternées, il en est de même de la série de terme général $w_n$.
On en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.

# – Interro n°02 – Sujet B – – Corrigé –

1. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n)$
2. Calculer (si elles existent) les limites suivantes
   (a) $\lim_{x\to 0}(\sin(x)+\mathrm{ch}\,(x))^{1/x}$.

   Pour $x$ au voisinage de 0, $(\sin(x)+\mathrm{ch}\,(x))^{1/x} = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln(\sin x + \mathrm{ch}\ x)\right)$.

   Or, $\sin x + \mathrm{ch}\ x = 1 + x + \mathrm{o}(x)$ donc $\ln(\sin x + \mathrm{ch}\ x) = x + \mathrm{o}(x)$.

   Alors, $\dfrac{1}{x}\ln(\sin x + \mathrm{ch}\ x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 \xrightarrow[x\to 0]{}$ et par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

   $$(\sin(x)+\mathrm{ch}\,(x))^{1/x} \xrightarrow[x\to 0]{} \mathrm{e}$$

   (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x)-1}{x(\mathrm{e}^x-1)}$

   $\cos(3x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2}(3x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{9}{2}x^2$.

   $x(\mathrm{e}^x-1) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$. On en déduit $\dfrac{\cos(3x)-1}{x(\mathrm{e}^x-1)} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{9}{2}\dfrac{x^2}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{9}{2}$. Alors, $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(3x)-1}{x(\mathrm{e}^x-1)} = -\dfrac{9}{2}$.
3. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $2+x^2>0$. La fonction $f$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables.
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

   $$f'(x) = \frac{(2+x^2)\dfrac{2x}{2+x^2} - 2x\ln(2+x^2)}{(2+x^2)^2} = \frac{2x}{(2+x^2)^2}(1-\ln(2+x^2))$$
4. Soit $n \neq 1$,

   $$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} - 2\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{2n} - 2 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &\sim -\frac{3}{2n\sqrt{n}}\end{aligned}$$

   Comme $3/2>1$, par TCPSTP, la série $\sum u_n$ converge.
5. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

   $$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\frac{1}{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

   On pose $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $w_n = u_n - v_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

La série de terme général $v_n$ est une série alternée. La suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ décroît et converge vers 0. D'après le CSSA, $\sum v_n$ converge.
De plus, $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$. Or, la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge. Par critère spécial des séries alternées, il en est de même de la série de terme général $w_n$.
On en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.