– Interro n°03 – Sujet A –

– Vendredi 26 septembre 2025 –

1. Donner le développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
2. Calculer pour $q \neq 1$ et $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} q^k$.
3. Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{x} \sin(2x) \mathrm{d}x$
4. Montrer l'existence et calculer : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \ln(x)$
5. Déterminer la nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{n-1}{n^3 - 3n^2 + 2n} \qquad v_n = \frac{\sin n}{3^n} \qquad w_n = \frac{\mathrm{e}^{n}}{n^3 + \ln n + 1}$$

6. On pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2, N(x, y) = \left|x^3 + y^3\right|$. N est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
7. On pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2, N(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$. N est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
8. On pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x, y) = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$. N est-elle une norme ? Justifier.
9. Calculer pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, et $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \cos(n\theta)$

– Interro n°03 – Sujet B –

– Vendredi 26 septembre 2025 –

1. Donner le développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.
2. Calculer pour $q \neq 1$ et $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} q^k$.
3. Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{x} \cos(2x) \mathrm{d}x$
4. Montrer l'existence et calculer : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (1 - \cos(1/x)) \ln(x)$
5. Déterminer la nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{n-1}{n^4 - 3n^3 + 2n} \qquad v_n = \frac{\cos n}{2^n} \qquad w_n = \frac{\mathrm{e}^{2n}}{n^5 + \ln n + 2}$$

6. On pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2, N(x,y) = \left|x^5 + y^5\right|$. N est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
7. On pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2, N(x,y) = \sqrt{x^4 + y^2}$. N est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
8. On pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x,y) = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$. N est-elle une norme ? Justifier.
9. Calculer pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, et $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \sin(n\theta)$

– Interro n°03 – Sujet A –

– Vendredi 26 septembre 2025 –

1. $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$.
2. Pour $q \neq 1$ et $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} q^k = q\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{x}\sin(2x)\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1+2\mathrm{i}}\left(-\mathrm{e}^{\pi/2}-1\right)\right) = 2\frac{\mathrm{e}^{\pi/2}+1}{5}$.
4. $1-\cos(1/x^2) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x^4}$ et $\ln x\left(1-\cos(1/x^2)\right) \sim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{2x^4} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
5. $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$. $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de t g u_n converge.

   $|v_n| \leqslant \dfrac{1}{3^n}$. La série de terme général $\dfrac{1}{3^n}$ est une série géométrique convergente. Par TCPSTP, la série $\sum |v_n|$ converge. La série $\sum v_n$ est alors absolument convergente donc convergente.

   $w_n \sim \dfrac{\mathrm{e}^{n} n^3}{\xrightarrow[n\to+\infty]{}} +\infty$. La série $\sum w_n$ diverge grossièrement.
6. On constate que $N(1,-1)=0$ mais $(1,-1)$ n'est pas le vecteur nul. N n'est donc pas une norme sur $\mathbb{R}^2$.
7. On constate que $N(0,1)=1$ mais $N(0,2)=4$. Ainsi $N(2\cdot(0,1)) \neq 2N(0,1)$, ce qui contredit l'homogénéîte. N n'est donc pas une norme sur $\mathbb{R}^2$.
8. $N(1,0)=N(0,1)=1$ mais $N(1,1)=4$. Ainsi $N(1,1) > N((1,0)+(0,1))$. N n'est donc pas une norme sur $\mathbb{R}^2$.
9. $$S_N = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}n\theta}\right)$$

   Or, $T_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}n\theta} = \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(N+1)\theta}-1}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}-1}$ car $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta} \neq 1$.

   Alors, $T_N = \dfrac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{N+1}{2}\theta}}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}} \dfrac{2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{(N+1)}{2}\theta\right)}{2\mathrm{i}\sin\dfrac{\theta}{2}} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{N}{2}\theta}\dfrac{\sin\left(\dfrac{N+1}{2}\theta\right)}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$. D'où $S_N = \cos\left(\dfrac{N}{2}\theta\right)\dfrac{\sin\left(\dfrac{N+1}{2}\theta\right)}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$.

– Interro n°03 – Sujet B –

– Vendredi 26 septembre 2025 –

1. $\dfrac{1}{1-x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$.
2. Pour $q \neq 1$ et $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} q^k = q^2 \frac{1-q^n}{1-q}$.
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin(2x)\mathrm{d}x = \Re\left(\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}\mathrm{d}x\right) = \Re\left(\frac{1}{1+2\mathrm{i}}\left(-\mathrm{e}^{\pi/2} - 1\right)\right) = -\frac{\mathrm{e}^{\pi/2}+1}{5}$.
4. $1-\cos(1/x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x^2}$ et $\ln x\,(1-\cos(1/x)) \sim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{2x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
5. $u_n \sim \dfrac{1}{n^3}$. $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de t g u_n converge.

   $|v_n| \leqslant \dfrac{1}{3^n}$. La série de terme général $\dfrac{1}{3^n}$ est une série géométrique convergente. Par TCPSTP, la série $\sum |v_n|$ converge. La série $\sum v_n$ est alors absolument convergente donc convergente.

   $w_n \sim \dfrac{\mathrm{e}^{2n} n^5}{\xrightarrow[n\to+\infty]{}} +\infty$. La série $\sum w_n$ diverge grossièrement.
6. On constate que $N(1,-1) = 0$ mais $(1,-1)$ n'est pas le vecteur nul. N n'est donc pas une norme sur $\mathbb{R}^2$.
7. On constate que $N(1,0) = 1$ mais $N(2,0) = 4$. Ainsi $N(2\cdot(1,0)) \neq 2N(1,0)$, ce qui contredit l'homogénéîte. N n'est donc pas une norme sur $\mathbb{R}^2$.
8. $N(1,0) = N(0,1) = 1$ mais $N(1,1) = 4$. Ainsi $N(1,1) > N((1,0)+(0,1))$. N n'est donc pas une norme sur $\mathbb{R}^2$.
9. $$S_N = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)$$

   Or, $T_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N+1)\theta} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1}$ car $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$.

   Alors, $T_N = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{N+1}{2}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}} \dfrac{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{(N+1)}{2}\theta\right)}{2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{N}{2}\theta} \dfrac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$. D'où $S_N = \sin\left(\dfrac{N}{2}\theta\right) \dfrac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$.