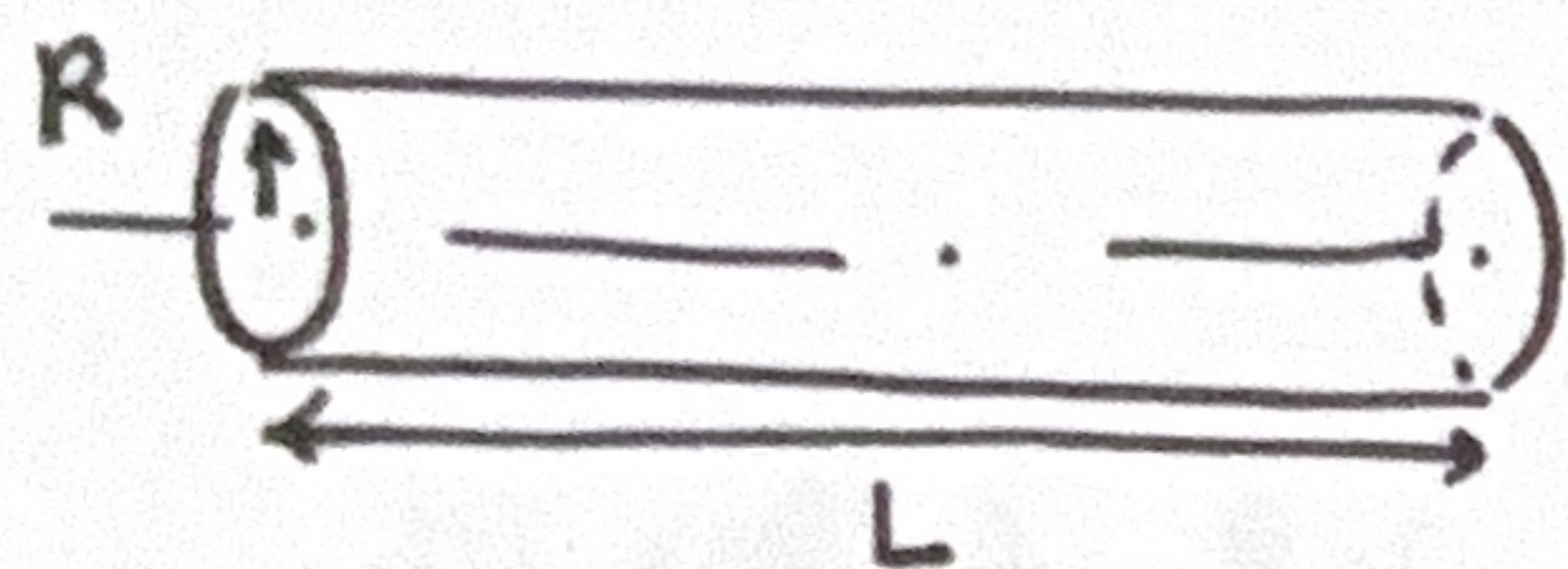


# TP Diffus<sup>2</sup> (thermique) 1D. Analogie élec-thermo et rés<sup>2</sup> num.

①

I. 1). éq<sup>o</sup> de la diffus<sup>2</sup> thermique cas 1D :  $\frac{\partial T}{\partial t} = D \cdot \Delta T$  avec  $D = \frac{\lambda}{\rho c}$   
 en  $k \cdot s^{-1}$       coeff. de diffus<sup>2</sup> en  $m^2 \cdot s^{-1}$       Laplacien de T en  $k \cdot m^{-2}$



geom. cartésienne et  $T(M,t) = T(x,t)$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

2). rég. stationnaire  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha$

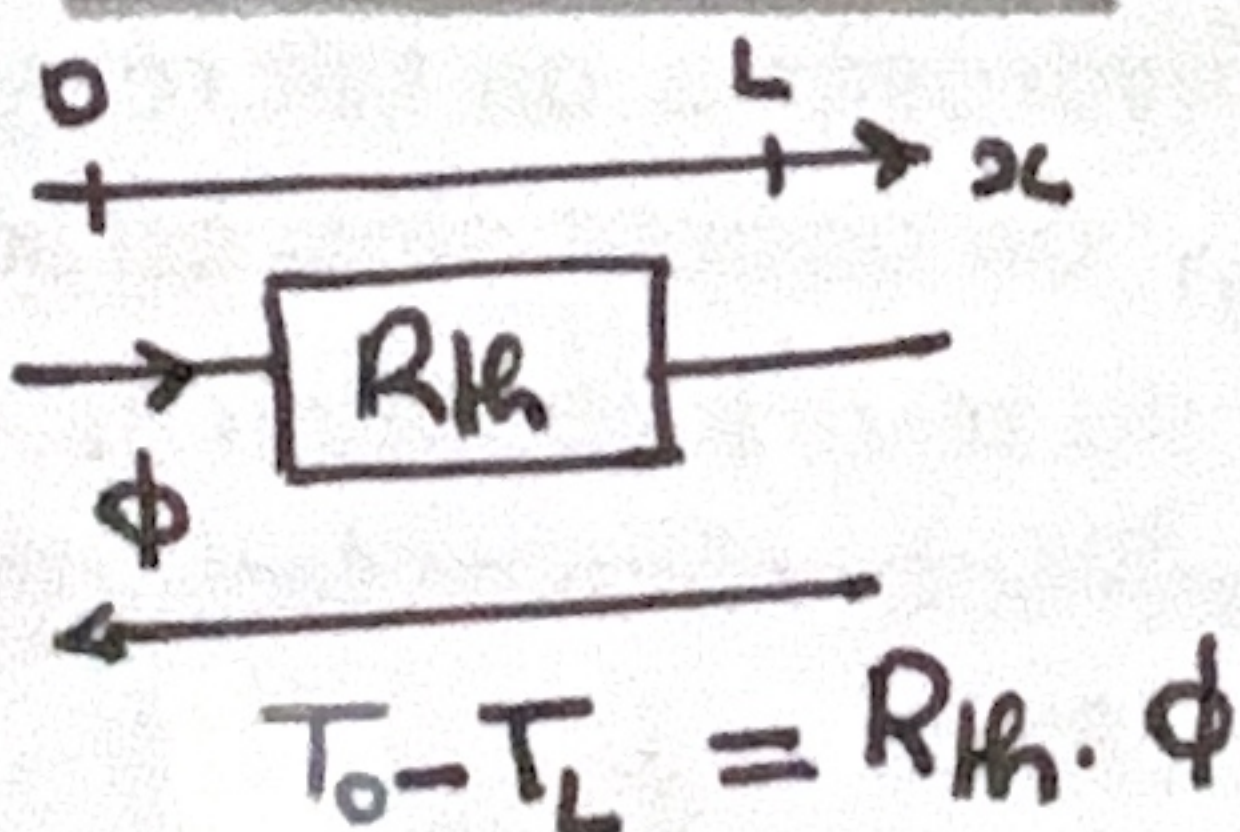
$$\Rightarrow T(x) = \alpha x + \beta$$

3). CL:  $\begin{cases} T(x=0) = T_0 = \beta \\ T(x=L) = T_L = \alpha L + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = T_0 \\ \alpha = \frac{T_L - T_0}{L} \end{cases} \Rightarrow T(x) = \frac{T_L - T_0}{L} \cdot x + T_0$

$$\Phi = \iint_S \vec{j}_H(x) \cdot dS \vec{u}_x = \iint_S -\lambda \text{grad} T \cdot dS \vec{u}_x = \iint_S -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x \cdot dS \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \Phi = -\lambda \cdot \alpha \cdot S = -\lambda \cdot \frac{T_L - T_0}{L} \cdot S$$

résistance thermique:

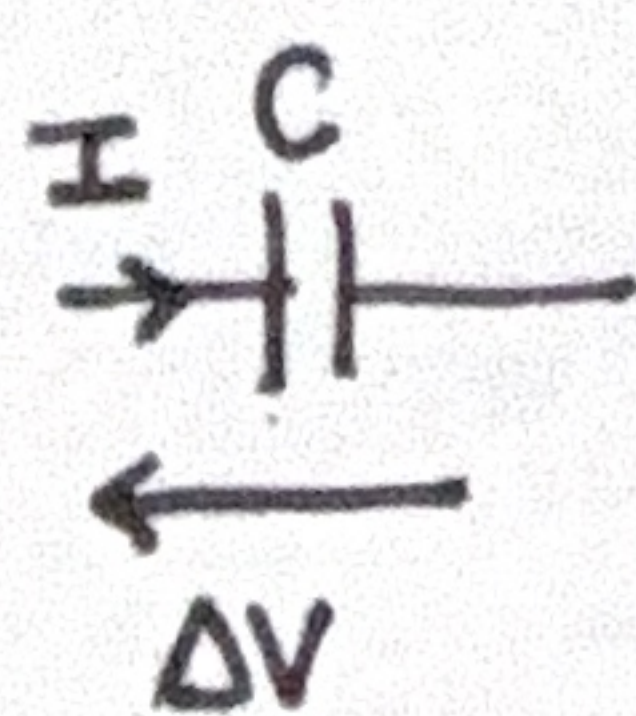


$$\text{d'où } R_{th} = \frac{T_0 - T_L}{-\lambda \cdot \frac{T_L - T_0}{L} \cdot S}$$

$$\Rightarrow R_{th} = \frac{L}{\lambda \cdot S}$$

4). Analogie

| Elec                              | thermique            |
|-----------------------------------|----------------------|
| V et $\Delta V$                   | T et $\Delta T$      |
| I                                 | $\Phi$               |
| R                                 | $R_{th}$             |
| C capacité d'un cond. $\parallel$ | C capacité thermique |



$$I = C \frac{d(\Delta V)}{dt}$$

$$\Phi = C \cdot \frac{d(\Delta T)}{dt}$$

$$\Phi = \frac{\delta Q}{dt} = \frac{\delta U}{dt} = \frac{C dT}{dt} = C \frac{d}{dt} (T - 0)$$

1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ports de cylindre  $\{x, x+dx\}$   $\begin{cases} \text{PCI} \\ \text{fermé} \\ \text{macro! au départ} \end{cases}$  cf réseau thermique

5). syst {port? entre  $x$  et  $x+dx$ } caract. par  $\rho, \epsilon$  et  $\lambda$

- $mass = \rho \cdot S dx$
- $capa. thermique = \rho \cdot S dx \cdot c$
- $résistance thermique en ARQS = \frac{dx}{\lambda \cdot S}$

ici cellule R-C caract. par  $\begin{cases} \text{capacité } C \\ \text{résistance } R \end{cases}$

en ARQS loi des noeuds  $\rightarrow \Phi_{R-1}(\text{traversant } R_{R-1}) = \Phi_R + \Phi_C$   
 une partie est transmise  $\rightarrow$  à  $R_i$   $\rightarrow$  l'autre passe ds  $C_{i-1}$   
 $\hookrightarrow$  conduc<sup>o</sup> chaleur  $\lambda$   $\hookrightarrow$  pour y être stockée  $\hookrightarrow$  accumulat<sup>o</sup> chaleur  $c$

6).  $R = \frac{dx}{\lambda \cdot S}$  (idem Q3 avec  $L \rightarrow dx$ ) ;  $C = \frac{\rho S dx \cdot c}{\text{volume}} = \frac{\rho S dx \cdot c}{\text{masse}}$

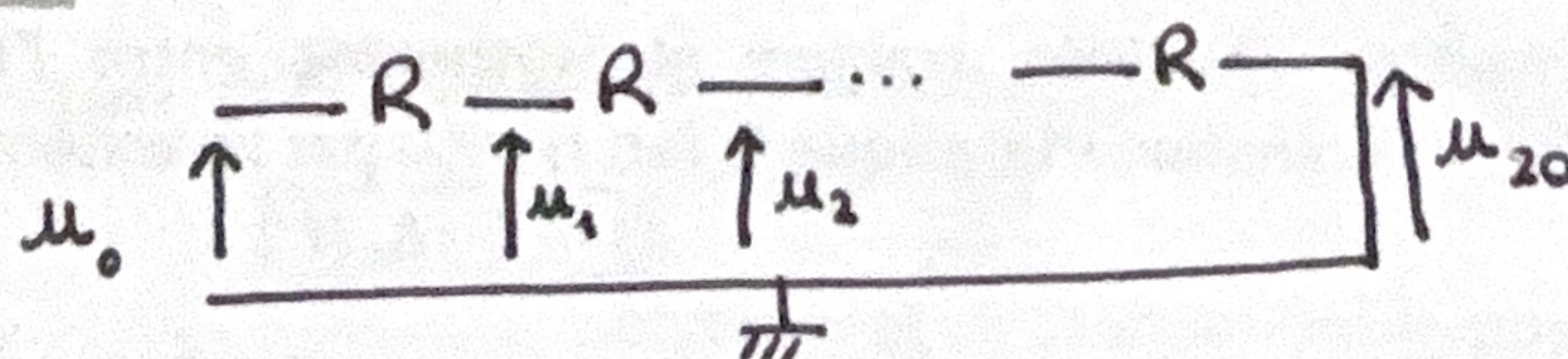
7).  $D = \frac{\lambda}{\rho c} = \frac{dx / (R \cdot S)}{C / (S \cdot dx)} \Rightarrow D = \frac{dx^2}{R \cdot C}$  on peut introduire  $\tau = RC$  analogie élec  
 $D = \frac{dx^2}{\tau}$

ex:  $\tau = RC$  correspond à la durée caract. du phé. de diffus<sup>o</sup> sur la distance  $dx$ .  
 $\tau = RC = \tau_D$  sur  $dx$ .  
 $\tau = 1.10^{-4} s = 0.1 ms$

8). rég. stationnaire  $\mu(x=0) = \mu_0$   
 $\mu(x=L) = 0 = \mu_{20}$

$\mu_k = \alpha k + \beta$   $\begin{cases} \alpha \approx -0.5 V \\ \beta \approx 10 V \end{cases}$  profil affine c<sup>o</sup> Q2.

rég. stationnaire  $\rightarrow$  réseau = associ<sup>o</sup> série de résistances



PDT:  $\mu_1 = \frac{19 \cdot R}{20 \cdot R} \cdot \mu_0 = \frac{19}{20} \cdot \mu_0$  ;  $\mu_2 = \frac{18}{20} \cdot \mu_0 \dots$   
 $\mu_k = \frac{20-k}{20} \cdot \mu_0 = \left(1 - \frac{k}{20}\right) \mu_0 = -\frac{\mu_0}{20} \cdot k + \mu_0$

$\rightarrow \alpha$  à comparer à  $(-\mu_0/20)$  et  $\beta$  à comparer à  $\mu_0$ .

9).  $\frac{\partial T}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

avec  $T(x,t) = \theta(x,t) + T_0$

$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$  et  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$

avec  $\theta(x,t) = f(x) \cdot e^{j\omega t}$

$\frac{\partial \theta}{\partial t} = j\omega \cdot \theta(x,t)$  et  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dx^2} \cdot e^{j\omega t}$

d'où  $j\omega \cdot f(x) \cdot e^{j\omega t} = D \frac{d^2 f}{dx^2} \cdot e^{j\omega t}$

$\Rightarrow \left[ \frac{d^2 f}{dx^2} = j \frac{\omega}{D} f(x) \right] \xrightarrow{\text{eq. caract.}} r^2 = j \frac{\omega}{D} = e^{j\pi/2} \cdot \frac{\omega}{D} \rightarrow r = \pm e^{j\pi/4} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{D}}$

$\Rightarrow r = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (1+j) \sqrt{\frac{\omega}{D}}$

d'où  $f(x) = A e^{\sqrt{\frac{\omega}{2D}} (1+j)x} + B e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} (1+j)x}$

$\downarrow x \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow A = 0$

$f(x) = B \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} x} e^{-j\sqrt{\frac{\omega}{2D}} x}$

$\Rightarrow \theta(x,t) = B \cdot e^{-x/\delta} e^{-jx/\delta} e^{j\omega t}$  avec  $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$

$\Rightarrow \theta(x,t) = B \cdot e^{-x/\delta} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$

justification a posteriori de l'app. ligne semi- $\infty$ .  
 $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \sqrt{\frac{2}{\omega} \frac{dx^2}{RC}} = \sqrt{\frac{2}{RC\omega}} \cdot dx$  \*

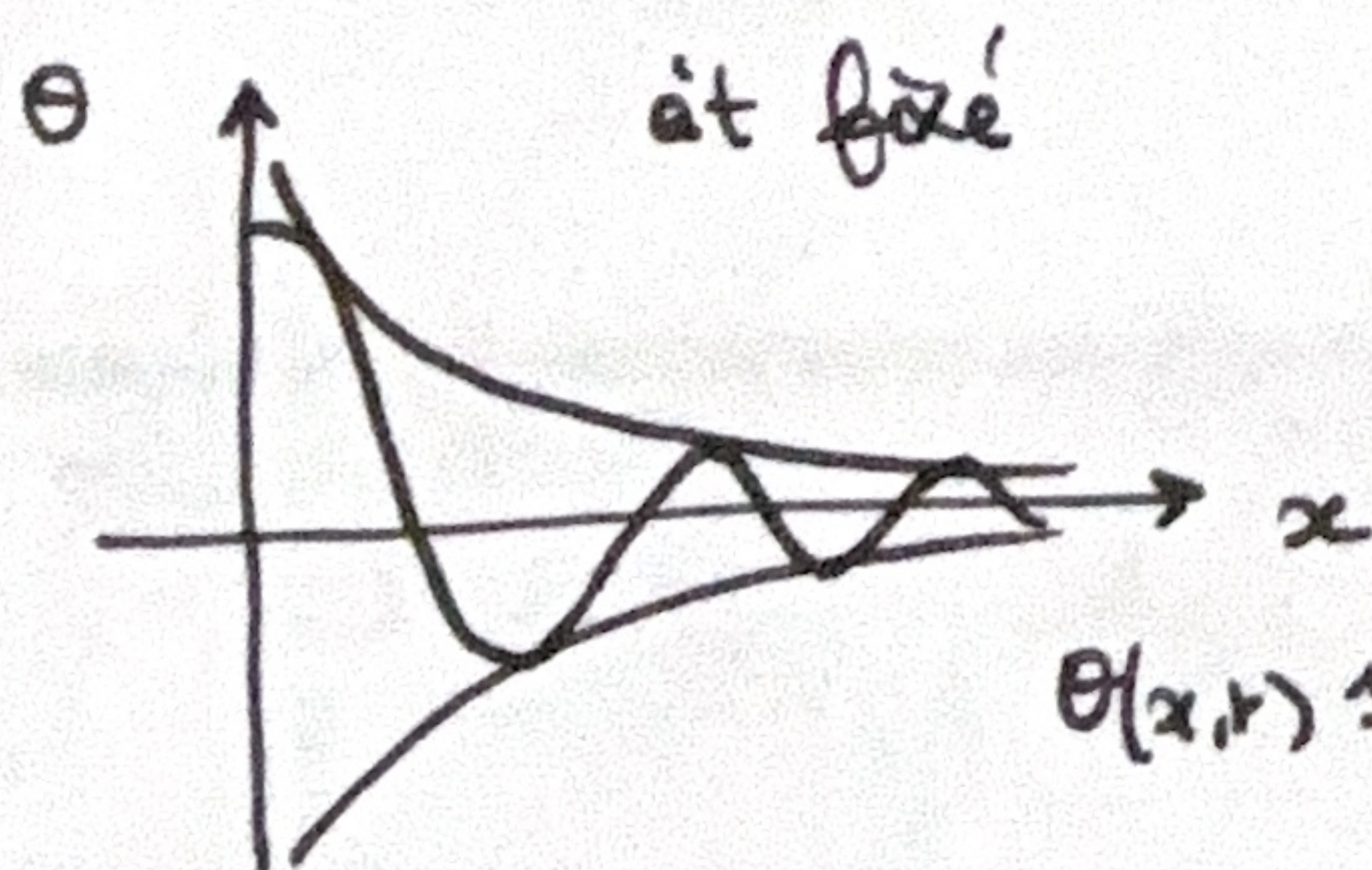
10).  $B e^{-x/\delta}$  amplitude de l'onde thermique en x

$\rightarrow$  amplitude  $\searrow$  avec x: atténuation de l'onde au cours de sa pénétration dans le milieu.

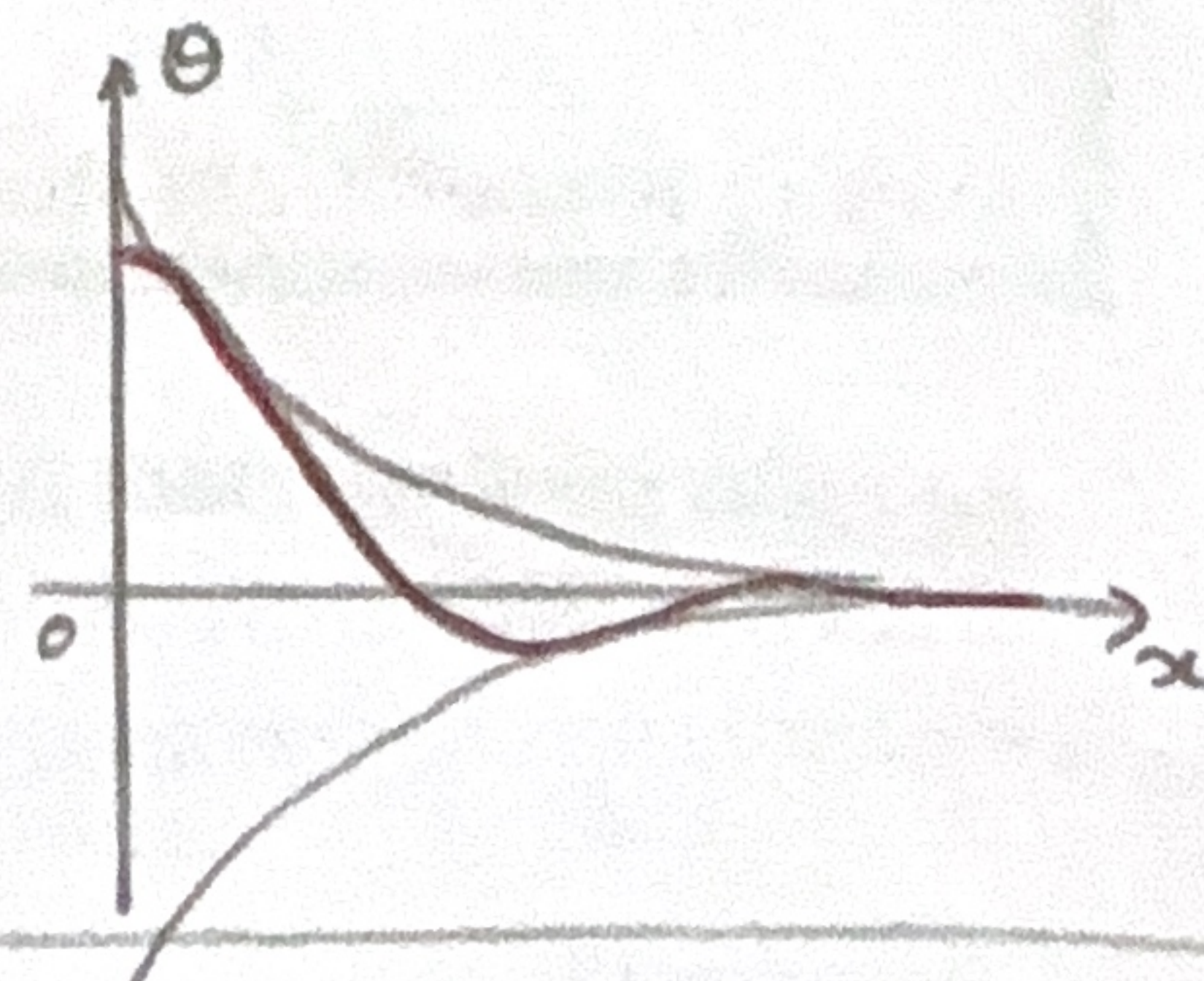
$\delta$  dist. caract. de l'atténuation de l'onde, au bout de qqs  $\delta$  onde  $\approx 0$ .

$\hookrightarrow [\delta] = \sqrt{\left[\frac{D}{\omega}\right]} = \sqrt{\frac{L^2 \cdot T^{-1}}{T^{-1}}} = \sqrt{L^2} = L$  (so épaisseur de peau EM)

$\hookrightarrow$  USI de  $\delta$  : m.



$\theta(x,t) \approx 0$  pour  $x > 5 \cdot \delta \rightarrow$  ap. 1 oscillation  $\rightarrow N = \frac{5\delta}{2\pi\delta}$



11)  $\delta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 \cdot 10^3 \times 100 \cdot 10^{-9} \times 2\pi \times 100}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 10^{-2}}} dx \approx 5,6 \cdot dx$

or la ligne compte 20 cellules  $\Rightarrow L = 3,6 \cdot \delta$   
 $L = 20 dx$

12). à  $x_k$  fixé  $u(x_k, t) = U_k \cdot \cos(\omega t + \varphi_k)$

$x_k = k \cdot \Delta x$

→ signal sinusoïdal de freq  $f = \frac{\omega}{2\pi}$

d'amplitude  $U_k = B \cdot e^{-x_k/\delta}$

de phase initiale  $\varphi_k = -\frac{x_k}{\delta}$

on a  $\cos(\omega t + \varphi_k) = \cos(\omega(t + \frac{\varphi_k}{\omega}))$

$-\frac{x_k}{\delta\omega}$

retard / à  $u_0(t)$ .

13).  $\ln \frac{U_k}{U_0} = \ln \frac{B e^{-k \Delta x / \delta}}{B} = -k \frac{\Delta x}{\delta}$

$\Rightarrow B = U_0$

$\ln \frac{U_k}{U_0}$  en f<sup>o</sup> de  $k$  à modéliser par une droite → ord. à l'o.  $\approx 0$   
pente =  $-\frac{\Delta x}{\delta}$

on a  $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$  et  $D = \frac{\Delta x^2}{RC}$  (1)  $\Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2 \Delta x^2}{\omega RC}} = \Delta x \cdot \sqrt{\frac{2}{\omega RC}}$

$\Rightarrow$  pente =  $-\frac{\Delta x}{\Delta x} \sqrt{\frac{\omega RC}{2}} = -\sqrt{\pi f RC} = -\sqrt{\pi f \tau}$  avec  $\tau = RC$

-0,18 OK avec  $\alpha = -0,176$

14)  $\Delta t_k = -\frac{k \cdot \Delta x}{\delta \cdot \omega} = -\frac{\Delta x}{\delta \cdot \omega} \cdot k$

$\Delta t_k$  en f<sup>o</sup> de  $k$  à modéliser par une droite → ord. à l'o.  $\approx 0$   
pente =  $-\frac{\Delta x}{\delta \cdot \omega}$

$\rightarrow$  pente =  $-\frac{\sqrt{\pi f \tau}}{2\pi f} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\tau}}{\pi f}$  (19)

$-2,8 \cdot 10^{-4}$  OK avec  $\alpha' = -2,77 \cdot 10^{-4}$

NB :  $\frac{\text{pente}_{13}}{\text{pente}_{14}} = \frac{-\Delta x / \delta}{-\Delta x / (\delta \cdot \omega)} = \omega = 2\pi f$

15) cf cours méth. des différences finies :  $T[k][i+1] = T[k][i] + \frac{D \cdot \Delta t}{\Delta x^2} (T[k+1][i] + T[k-1][i] - 2T[k][i])$

16) loi des nœuds :  $\Phi_k = \Phi_{k-1} = \Phi_c$

$\frac{T[k][i] - T[k+1][i]}{R} = \frac{T[k-1][i] - T[k][i]}{R} - C \frac{d(T[k][i])}{dt} \rightarrow \text{CFD}$

19). idem méth. des différences finies

$$T[k][i+1] = T[k][i] + \frac{dt}{RC} (T[k+1][i] + T[k-1][i] - 2T[k][i]) \rightarrow \text{OK avec d15} \\ \text{avec } D = \frac{dx^2}{RC} (Q7).$$

20). On s'intéresse à la courbe  $T(x, t_0)$   
↳ fixé

l'amplitude des variat. spatiales de  $T(x, t_0)$  est atténuée sur une distance  $\oplus$  courte  
sur la figure de droite  $\Rightarrow \underline{\delta_{\text{droite}} < \delta_{\text{gauche}}}$ .

21). On a  $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} \Rightarrow$  pour une  $\hat{m}$  pulsat. (variatio. temporelle de  $T$ ),  $\delta \uparrow$  avec  $D$   
ainsi  $\underline{\delta_{\text{droite}} < \delta_{\text{gauche}}}$ .