

Durée 4h

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la **clarté**, à la **précision** et à la **concision** de la **rédaction**. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un **stylo noir ou bleu foncé non effaçable** pour la rédaction de votre composition ; **d'autres couleurs, excepté le vert**, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les **schémas** et la **mise en évidence des résultats**.
- **Ne pas utiliser de correcteur**.
- **Numéroter les copies** : "i/nombre total".
- **Respecter les notations** de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la **numérotation de la question posée**.
- Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition.

Le sujet comprend un document réponse p.1 à rendre avec la copie.

DOCUMENT REPONSE à RENDRE AVEC LA COPIE

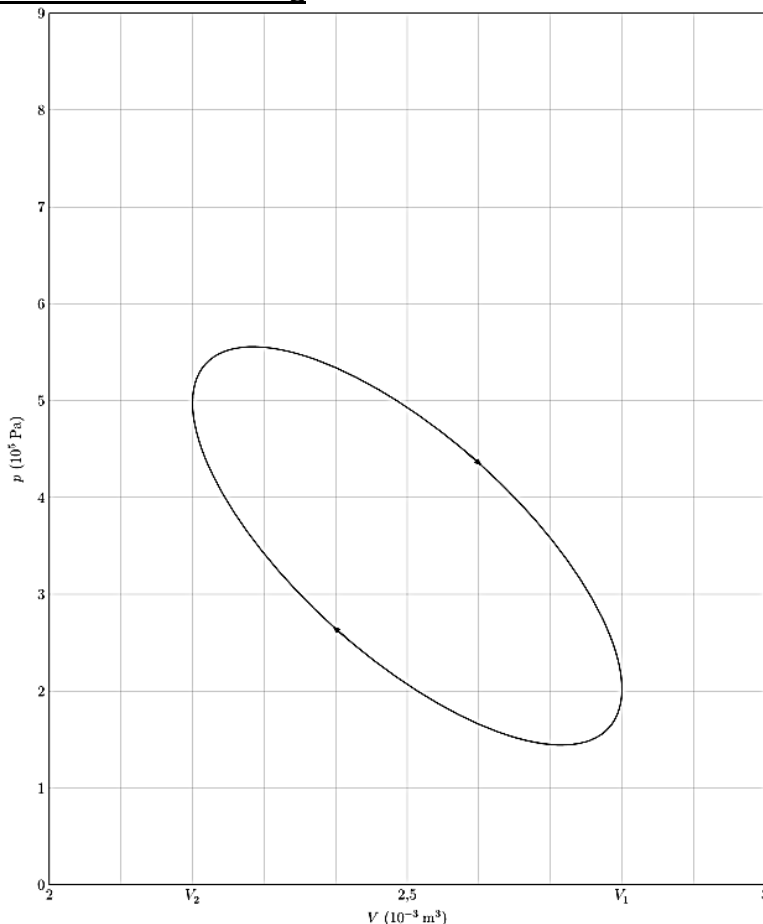
NOM :Ex 1 – Moteur de Stirling

Figure B Allure du cycle réel d'un moteur Stirling dans le diagramme (p, V)

Ex 1 : Moteur Stirling

Le projet KRUSTY, dont le nom est l'acronyme de « Kilopower Reactor Using Stirling Technology », est un projet de la NASA qui vise à développer des réacteurs nucléaires pour l'exploration spatiale

Au début du XIX^e siècle, les chaudières des machines à vapeur, soumises à de trop fortes pressions, explosent assez souvent. Robert Stirling a ainsi imaginé en 1816 un moteur dépourvu de chaudière où la chaleur est apportée de l'extérieur de la machine (moteur à « air chaud »). L'utilisation de ce moteur restera limitée, en particulier en raison de la trop faible puissance des modèles proposés, insuffisante pour concurrencer la machine à vapeur et le moteur à combustion interne.

Le moteur Stirling bénéficie actuellement d'un nouvel intérêt car il présente de nombreux avantages. Il peut utiliser n'importe quelle source d'énergie produisant de la chaleur, combustion de tout matériau mais également énergie solaire, nucléaire, géothermique, etc. Il produit peu de vibrations et est silencieux (pas d'explosion interne ni d'échappement gazeux, absence de valves et soupapes). Grâce à l'utilisation de matériaux modernes qui supportent de grands écarts de température et qui améliorent les transferts thermiques, son rendement est comparable, voire supérieur à celui des moteurs à combustion interne. Son entretien est facile et il s'use moins que les moteurs à explosion.

La conception d'un moteur Stirling est cependant délicate, en raison des gros écarts de température qu'il doit supporter et de la nécessité d'une excellente étanchéité ; son prix reste donc élevé. Par ailleurs, il est difficile de faire varier son régime. Son emploi reste ainsi cantonné à des utilisations de niches : générateur d'électricité en milieux extrêmes, propulseur pour sous-marins, etc. Sa réversibilité conduit à l'utiliser comme pompe à chaleur capable de refroidir à -200°C ou de chauffer à plus de 700°C .

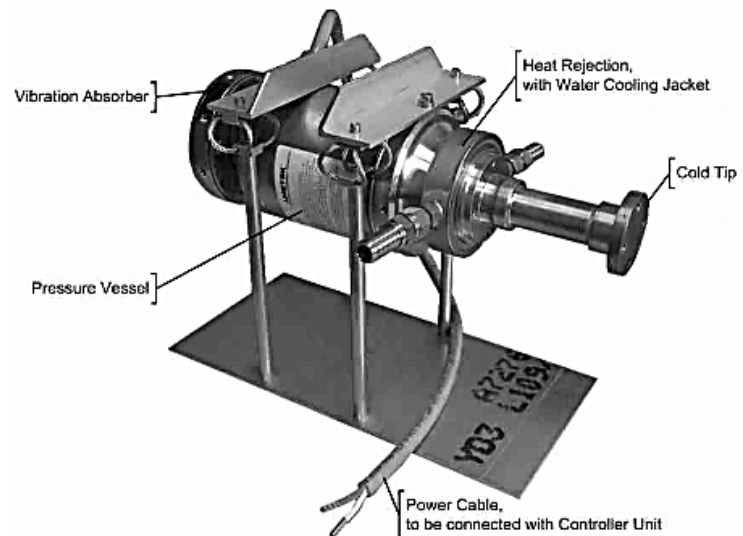
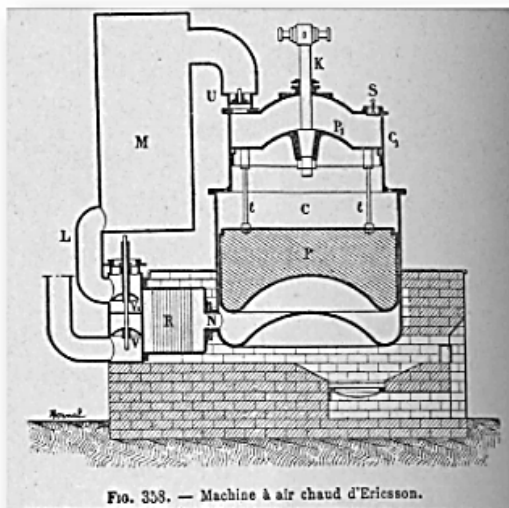


Figure 7 Gravure de 1899 d'un Moteur Ericsson M1851 avec régénérateur type Stirling (Wikipedia) et moteur Stirling de l'entreprise Sunpower fournissant le projet KRUSTY (ResearchGate)

III.A – Description du moteur

Une enceinte étanche est séparée en deux chambres, une chambre chaude (chauffée par l'extérieur), de volume maximal V_1 , et une chambre froide équipée d'un dissipateur thermique (ailettes), de volume maximal V_2 . Chaque chambre est dotée d'un piston permettant de faire varier son volume et le fluide peut circuler librement d'une chambre à l'autre. Le piston de la chambre froide est le piston de travail, il entraîne le piston de la chambre chaude appelé « déplaceur » car son rôle est de faire circuler le fluide entre les deux chambres. Lors du transvasement, le fluide passe de la chambre chaude à la température T_3 à la chambre froide à la température $T_1 < T_3$ et réciproquement.

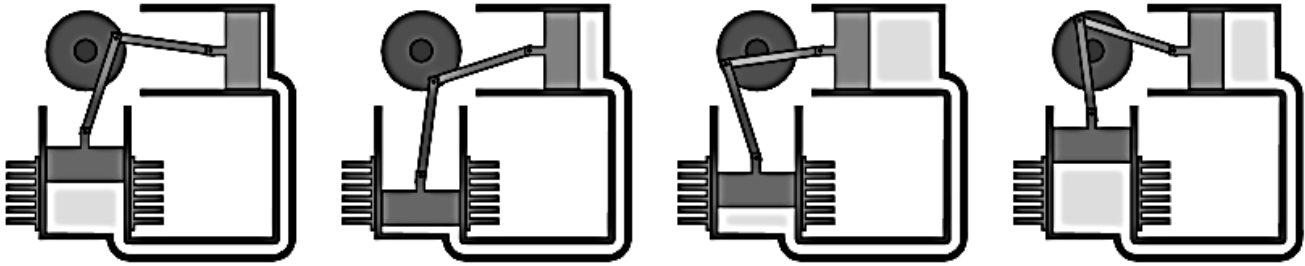


Figure 8 Phases de fonctionnement d'un moteur Stirling de type alpha (d'après Wikipedia)

Le mouvement du gaz peut être décrit par 4 phases plus ou moins distinctes (figure 8) :

- une phase de compression, pendant laquelle le volume de la chambre chaude est minimal, le fluide, entièrement situé dans la zone froide, est comprimé par le piston de travail dans sa course vers le bas ;
- une fois le piston de travail au point mort bas, le déplaceur est ramené à gauche, ce qui a pour effet de transvaser le fluide comprimé, qui passe de la zone froide vers la zone chaude et reçoit un transfert thermique de la source externe ;
- une phase de détente, pendant laquelle le fluide se détend dans le volume d'expansion où il continue d'être chauffé. Cette détente a pour effet de repousser le déplaceur et le piston de travail ;
- une fois que le piston de travail a atteint le point mort haut, le déplaceur est ramené à droite, ce qui a pour effet de transvaser le fluide de la zone chaude (volume d'expansion) vers la zone froide (volume de compression). Au cours de ce transfert, le fluide cède de la chaleur au refroidisseur.

Un cycle réel d'un moteur de Stirling est représenté dans le diagramme (p, V) en figure B du document réponse.

Q 30. Justifier que ce cycle est celui d'un moteur.

Q 31. Estimer la valeur du travail fourni par le moteur pendant un cycle.

III.B – Modélisation du cycle

On étudie le cycle de Stirling idéal. Au cours de celui-ci, n moles de gaz parfait de coefficient adiabatique γ subissent les transformations suivantes :

- une compression $(1 \rightarrow 2)$ isotherme réversible à la température T_1 ,
- un échauffement $(2 \rightarrow 3)$ isochore jusqu'à l'état 3 de température T_3 ,
- une détente $(3 \rightarrow 4)$ isotherme réversible à la température T_3 ,
- un refroidissement $(4 \rightarrow 1)$ isochore jusqu'à l'état 1.

Il n'y a pas d'autre travail que celui des forces de pression.

Q 32. Représenter sur la figure B du document réponse, à rendre avec la copie, l'allure du diagramme correspondant au cycle idéal.

On note $r = \frac{V_1}{V_2}$ le rapport de compression entre les volumes fixés par construction. On rappelle que la capacité

thermique à volume constant d'un gaz de n moles de gaz parfait vaut $C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$ où R est la constante des gaz parfaits.

Q 33. Exprimer W_{12} , le travail reçu par le fluide au cours de la compression, en fonction de n , R , T_1 et r . En déduire le transfert thermique Q_{12} reçu par le fluide au cours de cette compression en fonction de n , R , T_1 et r . Préciser les signes de W_{12} et de Q_{12} .

Q 34. Exprimer Q_{23} , le transfert thermique reçu par le fluide au cours de l'échauffement isochore, en fonction de n , R , T_1 , T_3 et γ . Préciser son signe.

Q 35. Exprimer W_{34} , le travail reçu par le fluide au cours de la détente, en fonction de n , R , T_3 et r . En déduire le transfert thermique Q_{34} reçu par le fluide au cours de cette détente en fonction de n , R , T_3 et r . Préciser les signes de W_{34} et Q_{34} .

Q 36. Exprimer le transfert thermique Q_{41} reçu par le fluide au cours du refroidissement en fonction de n , R , T_1 , T_3 et γ . Préciser son signe.

III.C – Rendement du moteur

Q 37. Définir puis exprimer le rendement idéal du moteur en fonction de T_1 , T_3 , r et γ .

Q 38. Définir et exprimer le rendement de Carnot en fonction de T_1 et T_3 .

En réalité, le moteur de Stirling utilisé dans le projet KRUSTY contient un régénérateur. Dans ce cas, la chaleur perdue par le gaz lors du refroidissement isochore ($4 \rightarrow 1$) est récupérée par le gaz lors du chauffage isochore ($2 \rightarrow 3$). Si le régénérateur est idéal, cette récupération est totale.

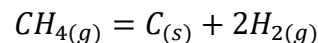
Q 39. Que devient le rendement du cycle idéal dans ce cas ?

Dans les conclusions du test de la NASA du dispositif KRUSTY réalisé en 2018, les ingénieurs indiquent que l'efficacité des moteurs a évolué pendant l'expérience entre 30 % et 50 % de l'efficacité de Carnot. De plus, pour les deux moteurs combinés, la puissance électrique obtenue est d'environ 180 W.

Q 40. En prenant une température chaude de 640°C et une température froide de 60°C et en supposant la conversion du travail mécanique en travail électrique parfaite, estimer numériquement la puissance thermique fournie par la source chaude aux deux moteurs de Stirling combinés.

Ex 2 : Transport du méthane

Le méthane $\text{CH}_{4(g)}$ est acheminé sur plusieurs milliers de kilomètres via des gazoducs le long desquels la pression est constamment maintenue égale à $P = 70 \text{ bar}$ et à température ambiante. Lors de cet acheminement, une partie du méthane se dissocie en carbone et dihydrogène selon la réaction :



La constante d'équilibre de la réaction vaut $K^\circ = 4 \cdot 10^{-9}$ à température ambiante.

On considère une quantité de matière n de méthane pur introduite dans un gazoduc. On suppose le gazoduc suffisamment long pour qu'à sa sortie le système ait cessé d'évoluer chimiquement et ait pu atteindre un état d'équilibre. On note ξ_f l'avancement de la transformation dans l'état final.

Données : Masses molaires $M_C = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_H = 1,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

- 1) Exprimer la quantité de matière totale de gaz $n_{\text{gaz},f}$ du mélange gazeux à l'état final en fonction de n et ξ_f .
- 2) On note $\alpha = \frac{\xi_f}{n}$ le taux de dissociation du méthane. Montrer que les pressions partielles à l'état final en méthane et en dihydrogène sont données par les expressions suivantes :

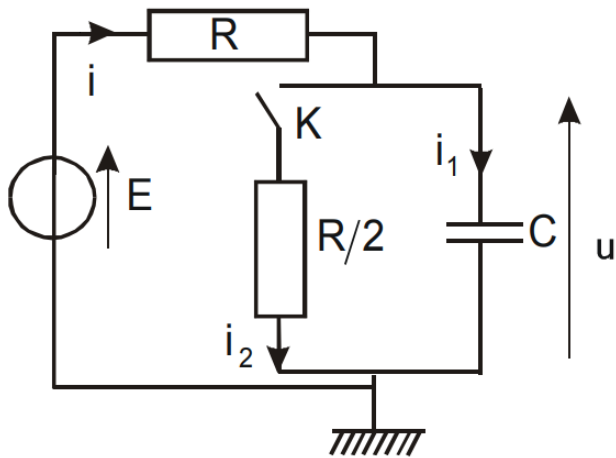
$$P_{\text{CH}_4,f} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \cdot P \quad \text{et} \quad P_{\text{H}_2,f} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha} \cdot P$$

- 3) Déterminer l'expression de α en fonction de K° , P et P° avec P° la pression standard. Faire l'application numérique pour donner un ordre de grandeur de α . Commenter le résultat.
- 4) Déterminer l'expression de la masse de carbone solide m_C qui se dépose chaque fois d'une tonne de méthane transite dans le gazoduc. Faire l'application numérique pour donner un ordre de grandeur de m_C . Commenter le résultat.

Ex 3 : Etude d'un circuit électrique

1. Régime transitoire

Nous considérons le circuit ci-dessous. Nous noterons i , l'intensité dans le résistor de résistance R , i_1 l'intensité dans le condensateur de capacité C , i_2 l'intensité dans le résistor de résistance $R/2$ et $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur. L'interrupteur est ouvert depuis très longtemps.



A l'instant $t = 0$, pris pour origine des temps, nous fermons l'interrupteur K .

B.1.1. Préciser i , i_1 , i_2 et u à l'instant $t = 0^-$, juste avant la fermeture de l'interrupteur.

B.1.2. Préciser i , i_1 , i_2 et u à l'instant $t = 0^+$.

B.1.3. Même question quand t tend vers l'infini.

B.1.4. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.

B.1.5. Résoudre cette équation.

B.1.6. Tracer l'allure de $u(t)$.

2. Régime sinusoïdal forcé

L'interrupteur est fermé et nous remplaçons le générateur de f.e.m constante par une source idéale de tension de f.e.m. $e(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t)$ où ω représente la pulsation du générateur et E , la tension efficace. On associe le complexe $\underline{u} = U\sqrt{2} \exp(j(\omega t + \varphi)) = \underline{U} \exp(j\omega t)$ à la tension $u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ où $\underline{U} = U\sqrt{2} \exp(j\varphi)$. De même, $\underline{E} = E\sqrt{2}$.

B.2.1. Calculer la fonction de transfert, $\underline{H} = \frac{\underline{U}}{\underline{E}}$ que l'on écrira sous la forme $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\omega/\omega_0}$.

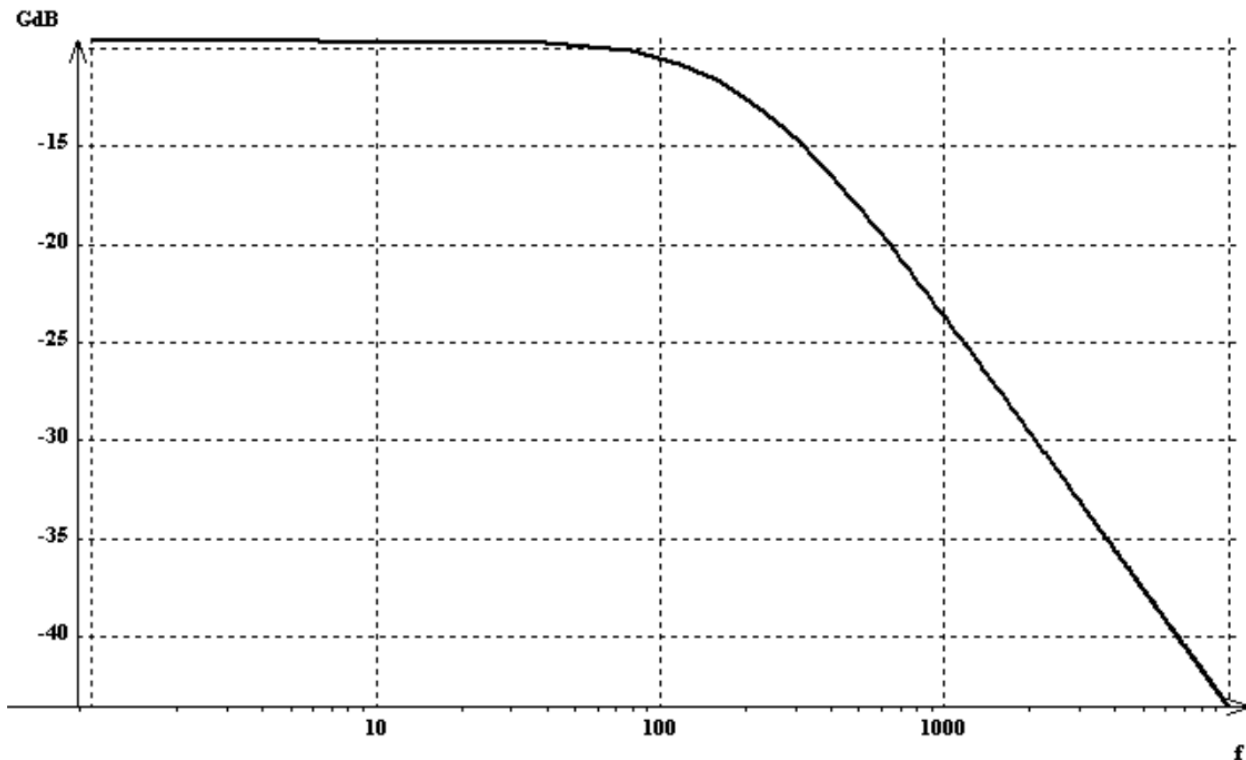
Préciser le module H et le déphasage φ .

B.2.2. Etablir l'expression littérale de la fréquence de coupure f_c en fonction de R et C .

B.2.3. Nous traçons le diagramme de Bode en fonction de la fréquence f en échelle semi-log.

B.2.3.1. On obtient le graphe ci-dessous. Déterminer graphiquement la valeur de f_c en précisant la méthode utilisée.

B.2.3.2. En déduire la valeur de la capacité C si $R = 1,0 \text{ k}\Omega$.



Ex 4 : Température du mouton

Cet exercice s'intéresse à un mammifère particulier, le mouton, un des tous premiers domestiqués par l'homme, entre le 11^e et le 9^e siècle avant J.-C. en Mésopotamie. C'est un animal clé dans l'histoire de l'agriculture.

On appelle bélier le mâle adulte, brebis la femelle adulte, agneau le jeune mâle et agnelle la jeune femelle.

Comme tous les ruminants, leur système digestif complexe leur permet de transformer la cellulose de leur alimentation en acides gras volatils et en glucides simples. À la belle saison, ils se nourrissent dans les pâturages d'herbe broutée au ras du sol et on leur donne du foin en hiver.

Jusqu'à nos jours, le mouton est utilisé pour ses produits laitiers, sa viande, sa laine et son cuir, de façon artisanale ou semi-industrielle. Sa viande et son lait ont été les premières sources de protéines consommées par l'homme dans le passage de la chasse-cueillette à l'agriculture.

Cet exercice étudie comment l'animal maintient sa température et son comportement social.

Données

- L'opérateur gradient d'une fonction $A(M,t)$ en situation unidimensionnelle vaut en coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{\text{grad}}(A(z,t)) = \frac{\partial A(z,t)}{\partial z} \vec{e}_z$ et en coordonnées sphériques $\overrightarrow{\text{grad}}(A(r,t)) = \frac{\partial A(r,t)}{\partial r} \vec{e}_r$.
- En coordonnées cartésiennes, l'opérateur divergence en situation unidimensionnelle vaut $\text{div}(\overrightarrow{A(z)}) = \frac{dA(z)}{dz}$.

Document (vigiferme.org, pour le bien-être de l'animal et de l'éleveur, consulté en 2018)

Exposition à de basses températures

Les moutons sont naturellement adaptés pour supporter de très basses températures mais leur résistance au froid dépend de plusieurs facteurs : la race, l'âge, l'état du pelage...

Un mouton qui a une épaisse toison et qui est protégé de l'humidité pourra supporter des températures qui descendent en dessous de $-15\text{ }^{\circ}\text{C}$, un mouton tondu doit être protégé du froid. [...] Lorsque le temps est humide, que les températures sont basses et qu'il y a du vent, la situation est critique pour les moutons. Le plus important est qu'ils ne soient pas mouillés jusqu'à la peau. La laine de certaines races, lorsqu'elle est épaisse, peut repousser l'humidité plusieurs jours. C'est le cas des races de montagne mais pour d'autres, à la laine très fine, le pelage est moins protecteur.

Les moutons qui ont froid se serrent les uns contre les autres.

Les agneaux nouveau-nés sont très sensibles aux basses températures, au vent et à l'humidité. Leur fine couche de laine et de graisse ne les protège que très peu. Les brebis prêtes à mettre bas doivent être isolées en bergerie et y rester au moins deux semaines après la naissance. Le taux de mortalité des agneaux qui viennent de naître atteint plus de 25 % dans certains élevages. Ils succombent le plus souvent dans les heures qui suivent leur naissance par hypothermie plutôt que par maladie.

.../...

Exposition à de hautes températures

Les moutons supportent mieux le froid que les températures élevées. Ils peuvent mourir d'un coup de chaleur. Ce risque est beaucoup plus élevé chez les moutons qui ne sont pas tondus, car la laine empêche la sueur de s'évaporer. C'est une des raisons pour laquelle il faut tondre les moutons au printemps.

Cas de la brebis non tondue	Confort sans adaptation ou adaptation facile	Adaptation difficile	Adaptation très difficile	Inadaptation pouvant entraîner la mort
Température extérieure	de -8 °C à 25 °C	de -15 °C à -8 °C et de 25 °C à 35 °C	de -30 °C à -15 °C et de 35 °C à 40 °C	en dessous de -30 °C et au-dessus de 40 °C

La température d'un mouton en bonne santé se situe entre $38,5$ et $39,5\text{ °C}$.

Sa longueur moyenne va de 1 m à $1,50\text{ m}$.

La tonte a lieu 1 à 2 fois par an produisant 2 à 8 kg de laine par an.

Fin document

Nous allons essayer de construire un modèle thermodynamique pour expliquer comment la brebis maintient sa température de consigne $\theta_{eq} = 39\text{ °C}$ et mieux comprendre les éléments du **document ci-dessus**.

I.1 - Propriétés de la toison de laine

La laine, matière première renouvelable, est une fibre aux propriétés uniques : flexible, légère, élastique, solide protégeant du chaud comme du froid, difficilement inflammable (s'enflamme à 600 °C), isolant phonique, absorbeur d'humidité, facile à teindre et 100 % biodégradable. La fibre de laine est à croissance continue avec de grandes écailles qui en font le tour. Les écailles se recouvrent peu et sont très saillantes. La section est circulaire. Sa substance est de la kératine, matière complexe association d'une vingtaine d'acides aminés. La laine a des affinités différentes avec l'eau qui font que la fibre s'enroule en frises. Ces dernières enferment une grande quantité d'air, ce qui limite la conduction. De plus, la kératine est hydrophile pour la vapeur d'eau mais hydrophobe pour l'eau liquide. L'adsorption d'eau (désorption d'eau) s'accompagne d'une production (dégagement) de chaleur par la fibre. Les fils de laine ont un diamètre qui varie de $20\text{ }\mu\text{m}$ pour les moutons Mérinos à $40\text{ }\mu\text{m}$ pour les races écossaises.

Une toison de laine va être caractérisée par une valeur de conductivité thermique λ_{laine} supposée homogène et une valeur de capacité thermique massique c_{laine} . On considérera par la suite une laine « moyenne » caractérisée par une conductivité thermique $\lambda_{laine} = 0,040\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

Q1. La loi de Fourier, relative à la diffusion thermique, traduit le lien entre la densité volumique de transfert thermique et le gradient de température : $\vec{j}_Q = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad } T}$.

Quelle est la dimension de la conductivité thermique λ ?

On considère un parallélépipède, de longueur L , de hauteur H et d'épaisseur e petite ($e \ll \min(L, H)$), constitué d'un matériau homogène de conductivité λ , de masse volumique μ et de capacité thermique massique c (**figure 1**). Le problème est supposé unidimensionnel, la température ne dépend que de la variable z et du temps t .

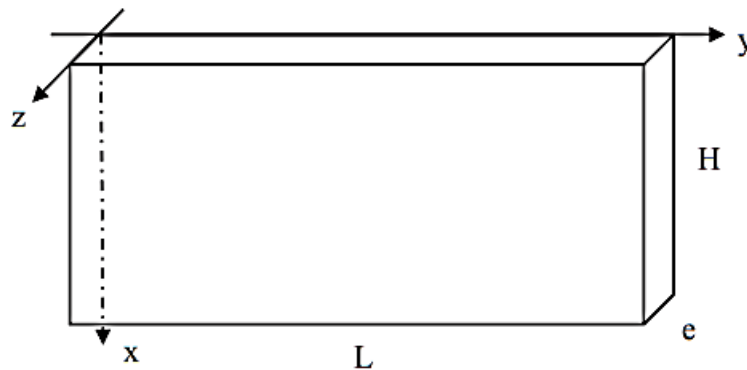


Figure 1 - Géométrie du conducteur thermique

Q2. Sur quelle direction est le vecteur densité $\vec{j}_Q$ de courant thermique ? De quelles variables dépend-il ?

Les températures, sauf avis contraire, sont en $^{\circ}\text{C}$.

Q3. Faire un bilan énergétique sur la tranche de matériau comprise entre z et $z + dz$ et en déduire l'équation différentielle à laquelle obéit la température $T(z,t)$.

Q4. Que devient-elle en régime stationnaire ? Le vecteur $\vec{j}_Q$ dépend-il de z ?

Q5. On suppose que le matériau est en présence de thermostats qui imposent à tout moment une température $T_{\text{entrée}}$ en $z = 0$ et T_{sortie} en $z = e$. Que vaut la puissance thermique φ qui traverse le matériau en fonction de $e, \lambda, H, L, T_{\text{entrée}}$ et T_{sortie} ?

Q6. Définir puis exprimer la résistance thermique du matériau en fonction de ses caractéristiques géométriques et de sa conductivité. Que signifie, du point de vue thermique, mettre des résistances en parallèle et mettre des résistances en série ?

On peut mesurer expérimentalement la conductivité thermique de la laine à partir d'un échantillon de celle-ci par la méthode de la plaque chaude gardée (**figure 2**). L'échantillon est formé de deux « plaques » de laine identiques d'épaisseur e et de surface S séparées par une plaque chaude. Un même flux thermique φ , engendré par effet Joule dans un conducteur électrique inséré dans la plaque chaude, traverse les échantillons. Les plaques d'échantillon sont encadrées chacune par une plaque froide. Les températures T_c, T_f des plaques chaude et froides sont mesurées en régime permanent par des thermocouples.

Q7. Exprimer l'expression de la conductivité λ_{laine} de l'échantillon en fonction de φ , e , S , T_c et T_f .

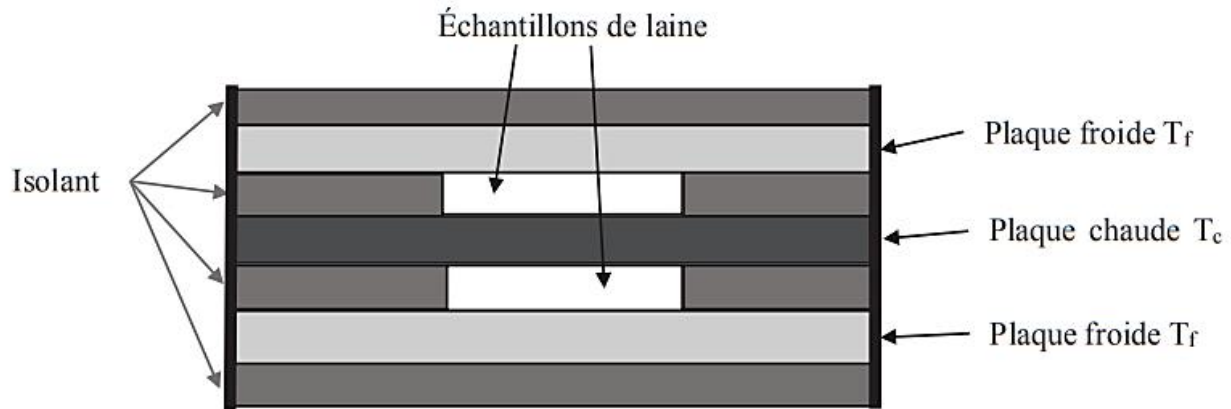


Figure 2 - Principe de la plaque chaude gardée

I.2 - Équilibre thermique d'une brebis (situation de confort)

On modélise la brebis debout par un parallélépipède plein, de température uniforme $\theta_{\text{eq}} = 39^\circ\text{C}$, de longueur $L = 100\text{ cm}$ et de section carrée de côté $H = 30\text{ cm}$. Le corps de la brebis est entouré d'une épaisseur qui peut varier de $e = e_M = 10\text{ cm}$ de laine avant la tonte à $e = e_m = 0,5\text{ cm}$ après la tonte. La situation est représentée en **figure 3** et en **figure 4**.

Q8. Exprimer la résistance R_{diff} de cette carapace de laine en négligeant les effets de bords, en fonction de L , H , e et λ_{laine} . Évaluer son ordre de grandeur pour les deux épaisseurs limites.

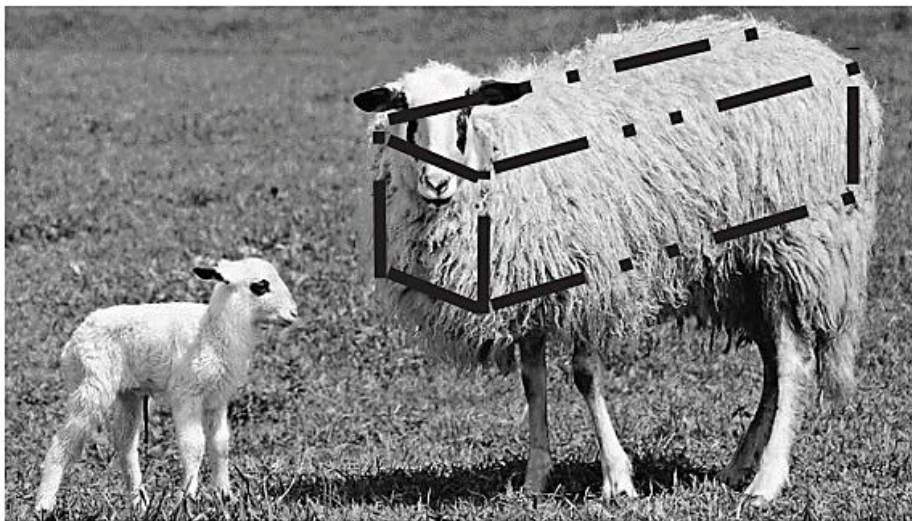


Figure 3 - Modélisation de la brebis

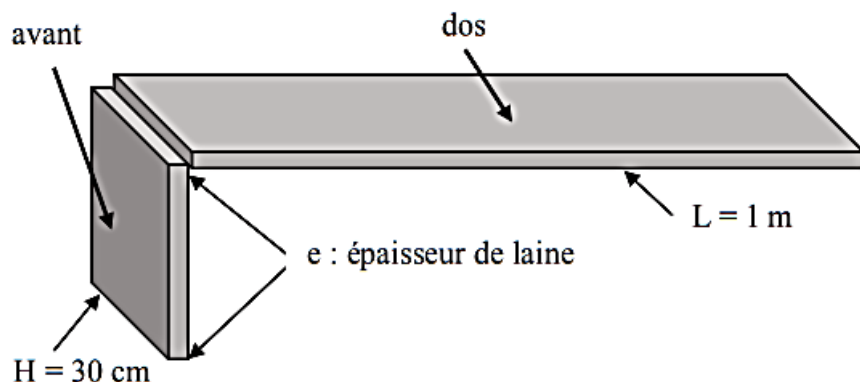


Figure 4 - Modélisation de la toison
Seules les parties lainières du dos et de l'avant ont été schématisées.

On doit tenir compte de deux autres phénomènes d'échanges thermiques : la conducto-convection (d'autant plus importante que le vent est fort) et le rayonnement thermique toujours présent.

- Q9.** La loi de Newton, relative au phénomène de conducto-convection, correspond à un vecteur de densité thermique reçu par la brebis égal à

$$\vec{J}_Q = -h \cdot (T_{\text{ext}} - T_{\text{air}}) \vec{n}$$

avec T_{ext} la température de la surface extérieure de la brebis en contact avec l'air de température T_{air} et le vecteur unitaire normal $\vec{n}$ orienté de la brebis vers l'extérieur.

On prendra un coefficient de Newton laine/air égal à $h = 4,0 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$.

En déduire en fonction de h , L et H la résistance de conducto-convection R_{cc} à introduire dans notre modèle de brebis. Évaluer son ordre de grandeur.

Le phénomène de rayonnement introduit une résistance supplémentaire R_r . Comme la température de l'air est assez proche de celle de l'animal, la puissance P_r due au rayonnement thermique sortant de la surface extérieure de la brebis s'exprime sous la forme

$$P_r = KA(T_{\text{ext}} - T_{\text{air}})$$

avec A l'aire de la surface extérieure de la brebis, T_{ext} la température de cette surface en contact avec l'air de température T_{air} . La constante K a pour valeur $K = 5,0 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$.

- Q10.** Exprimer la résistance thermique de rayonnement R_r en fonction de K , L et H .

- Q11.** Faire un schéma du montage de ces trois résistances placées entre la température interne de la brebis $T_{\text{int}} = \theta_{\text{eq}} = 39 \text{ °C}$ et la température de l'air T_{air} . Évaluer numériquement les deux valeurs R_1 et R_2 des résistances équivalentes de la brebis non tondue et de la brebis tondue.

La brebis non tondue est dans un confort climatique pour la température de l'air égale à $T_0 = 5 \text{ °C}$. En plus des phénomènes de diffusion, conducto-convection et rayonnement, il y a évaporation d'eau par sudation.

La brebis émet de la vapeur d'eau par les voies respiratoires en toute situation :

$$\dot{m} = 5,8 \cdot 10^{-6} \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Elle en émet deux fois plus par sa surface cutanée quand elle vient d'être tondue :

$$\dot{m}' = 2\dot{m}$$

et que la température extérieure est supérieure à $5,1 \text{ °C}$.

L'enthalpie massique standard de vaporisation de l'eau, supposée indépendante de la température, vaut $\Delta H^0_{\text{vap}} = 2\,500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Q12. En déduire la puissance p_{m0} apportée à la brebis par son métabolisme dans une situation de confort juste avant la tonte. On l'exprimera en fonction de $\dot{m}$, L , R_1 , T_{int} et T_{air} , puis on en fera l'évaluation numérique pour $T_{\text{air}} = T_0 = 5 \text{ }^\circ\text{C}$.

Q13. Répondre à la même question pour la brebis juste après la tonte pour la température de confort $T_0 = 5 \text{ }^\circ\text{C}$.

I.3 - Déséquilibre thermique d'une brebis (situations de stress et de danger)

La thermorégulation est due à des productions internes de chaleur (thermogenèse liée au métabolisme et à l'activité physique) et à des déperditions de chaleur au niveau de la respiration et de la peau (thermolyse).

Dans une situation où l'air environnemental est en dehors de la zone de confort, la brebis va se réchauffer ou se refroidir et éventuellement transpirer. On négligera la capacité thermique de la toison devant celle du corps de la brebis. On assimile la brebis à un volume d'eau de masse volumique $\mu = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de capacité thermique massique $c = 4\,200 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. On admet que les variations de température sont suffisamment lentes pour utiliser les notions de résistances. On note p_m la puissance apportée par le métabolisme.

Q14. a) En appliquant le premier principe de la thermodynamique à la brebis non tondue dans une situation (1) où la température T_{air} de l'environnement est différente de $T_0 = 5 \text{ }^\circ\text{C}$, montrer que l'équation différentielle relative à la température $T(t)$ de la brebis s'écrit :

$$\frac{dT(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_1} (T(t) - T_{\text{air}}) = \frac{(T_1 - T_{\text{air}})}{\tau_1}.$$

On exprimera τ_1 en fonction de μ , c , L , H , R_1 et $(T_1 - T_{\text{air}})$ en fonction de θ_{eq} , T_0 , R_1 et $(p_m - p_{m0})$.

b) Exprimer la température $T(t)$ en fonction de t , T_1 , τ_1 et θ_{eq} en supposant que la température initiale de la brebis est $T(t=0) = \theta_{\text{eq}}$.

c) Calculer τ_1 . Calculer T_1 en $^\circ\text{C}$ pour $p_m = p_{m0}$ avec une température d'environnement égale à $T_{\text{air}} = 17 \text{ }^\circ\text{C}$.

Q15. D'après les données du **document** (pages 3 et 4), la brebis non tondue reste dans sa zone d'adaptation pour une température extérieure variant de $-8 \text{ }^\circ\text{C}$ à $+15 \text{ }^\circ\text{C}$. En déduire entre quelles limites peut varier la puissance apportée par le métabolisme de l'animal dans cette situation (1) sans qu'il y ait danger pour lui. On suppose donc que la brebis reste à sa température d'équilibre $\theta_{\text{eq}} = 39 \text{ }^\circ\text{C}$.

Ex 5 : Oscillations au sein de l'atome de Thomson

Données

- Masse d'un électron : $m_e \approx 10^{-30} \text{ kg}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- La permittivité du vide ϵ_0 est telle que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 10^{10} \text{ SI}$ et $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \approx 2 \cdot 10^{-28} \text{ J} \cdot \text{m}$

Afin de donner une vision classique de l'émission d'un atome préalablement excité, nous allons étudier la réponse mécanique d'un électron à une excitation de l'atome.



Le modèle de l'atome d'hydrogène adopté ici est celui élaboré par Joseph Thomson (photo ci-contre), prix Nobel en 1906 pour avoir découvert l'électron en 1897. Il proposa en 1904 un modèle dit du « pudding aux électrons ».

Il s'agit :

- d'une boule de centre O et de rayon a , avec $a \approx 10^{-10} \text{ m}$, uniformément chargée en volume, de densité volumique de charge (uniforme à l'intérieur de la boule) notée ρ , de charge totale $+e$, considérée tout d'abord immobile dans le référentiel du laboratoire,
- et d'un électron ponctuel (masse m , charge $-e$) libre de se déplacer sans frottement dans l'espace de la boule.

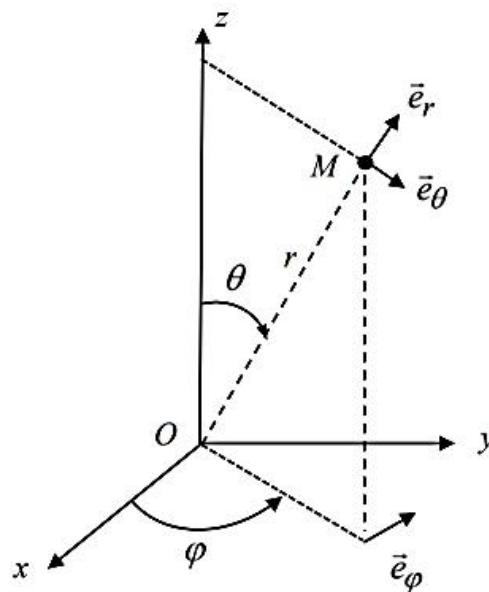


Figure 1 – Coordonnées et base sphériques

La position d'un point M de l'espace est parfois repérée par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) (sur la base $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$), ou par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) , associées à la base $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

II.1 - Force électrostatique ressentie par l'électron

Q2. Donner l'expression de la densité volumique de charge ρ .

Soit M un point quelconque de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques : $M(r, \theta, \varphi)$.

Q3. Montrer que le champ électrostatique en M s'écrit : $\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r$.

Q4. Déterminer en tout point M intérieur à la boule, le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par la distribution de charge caractérisée par ρ .

L'électron se situe en un point $M(r, \theta, \varphi)$ **intérieur à la boule**. On le repère par son vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$. On suppose ici l'atome isolé et on néglige toute attraction gravitationnelle.

Q5. Donner la force ressentie par l'électron. Mettre cette force sous la forme $\vec{F} = -m_e \omega_0^2 \overrightarrow{OM}$ où on donnera l'expression de ω_0 . Commenter l'expression de cette force.

II.4 - Modélisation du mouvement de l'électron par une méthode numérique

La position instantanée $r(t)$ de l'électron dans le repère défini sur la **figure 1** vérifie une équation différentielle dont la difficulté de résolution dépend de la modélisation physique choisie. Pour résoudre des équations différentielles complexes, on peut utiliser une méthode numérique. Pour illustrer cette méthode de résolution, on considère que $r(t)$ obéit à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + 2\lambda \cdot \frac{dr}{dt} + \omega_0^2 \cdot r = 0$$

avec λ et ω_0^2 des constantes positives non nulles.

L'objectif est d'obtenir une représentation graphique de la fonction $r(t)$, la plus proche possible de la réalité.

On utilise une méthode numérique simple (connue sous le nom de « méthode d'Euler explicite ») que l'on programme en langage PYTHON.

Dans ce langage :

- la fonction `np.arange(N)` renvoie une liste de nombres entiers compris entre 0 et N-1, de type « array ».
- la fonction `np.zeros(N)` renvoie une liste de N valeurs toutes nulles, de type « array ».

Pour des raisons de commodité, les valeurs numériques utilisées ne correspondent pas à la réalité physique ; les valeurs obtenues pour $r(t)$ seront donc arbitraires (en revanche la forme de la courbe est réaliste).

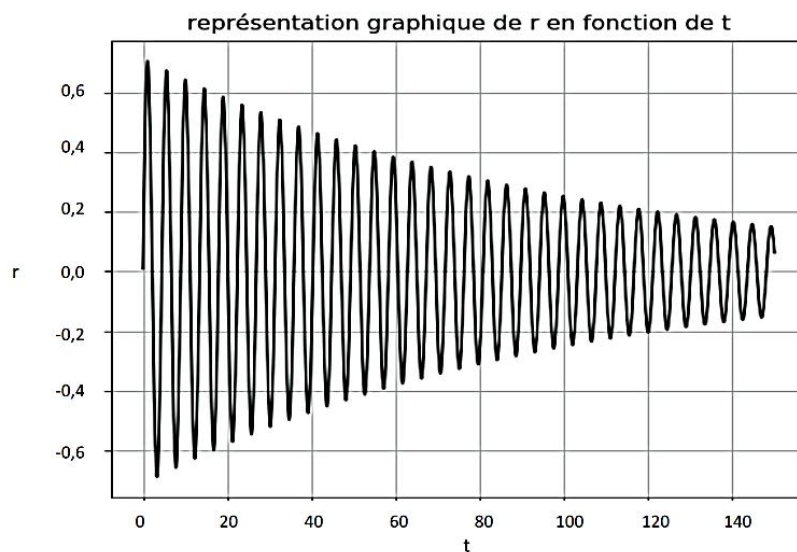
Le programme est le suivant :

```
1 import numpy as np
2 from matplotlib import pyplot as plt
3
4 T=150
5
6 omega = 1.4
7 lamda = 0.03
8
9 def euler(N,x0,v0):
10     x = x0
11     v = v0
12     h = T/N
13     a = -2*lamda*v-omega*omega*x
14     tab_1 = np.zeros(N)
15     tab_2 = np.zeros(N)
16     for i in range(N):
17         (x,v,a)=(x+v*h,v+a*h,-2*lamda*v-omega*omega*x)
18         tab_1[i] = x
19         tab_2[i] = v
20     return tab_1
21
22 def temps(N):
23     h=T/N
24     t = np.arange(N)*h
25     return t
26
27 plt.figure('graphique')
28 plt.plot(temps(15000),euler(15000,0,1),'b')
29 plt.title("représentation graphique de r en fonction de t")
30 plt.xlabel("t")
31 plt.ylabel("r")
32 plt.grid()
33 plt.show()
```

L'exécution de ce programme permet d'obtenir la **courbe** $r(t)$ ci-dessous (les échelles sont arbitraires).

Q14. Décrire, en détaillant les étapes, comment l'algorithme utilisé permet, connaissant les valeurs de la fonction $r(t_n)$ et de sa dérivée $\frac{dr}{dt}(t_n)$ à une date t_n , de calculer ces mêmes valeurs à une date notée t_{n+1} .

Quelle approximation est faite ?



Q15. Afin de tester la fonction *euler*, nous exécutons l'instruction « *euler(3,0,1)* ». Que retourne cette instruction ?

Q16. Les lignes 16 à 19 contiennent une boucle itérative dans laquelle la commande « *for* » est utilisée. Modifier ces lignes de façon à utiliser la commande « *while* » en créant une boucle conditionnelle. La partie de programme écrite avec la boucle « *while* » doit produire exactement les mêmes résultats que la portion de code qu'elle remplace.

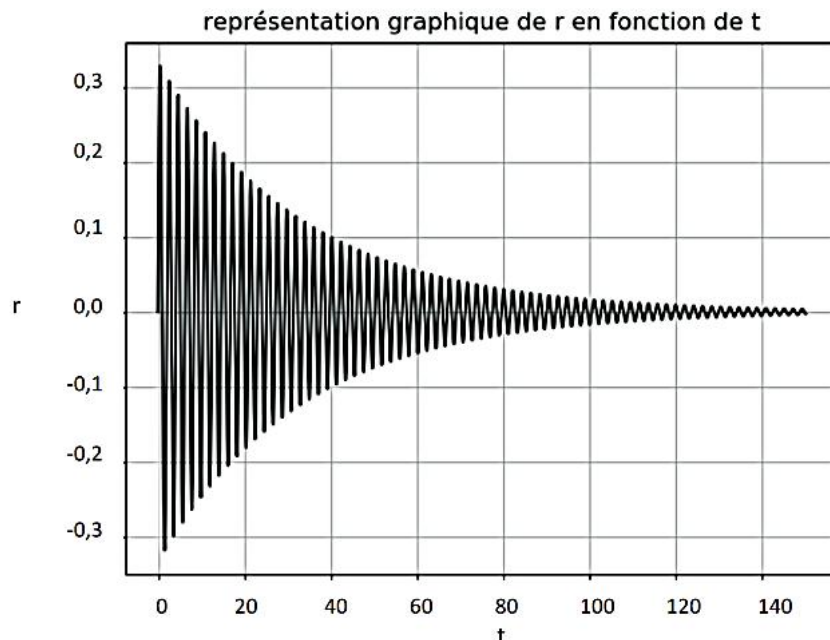
Afin de tester la méthode d'Euler, on rajoute les lignes de code suivantes, qui permettent de tracer la courbe donnant la solution exacte de la solution de l'équation différentielle.

Le programme modifié est donné ci-après (à partir de la ligne 27).

Les lignes 1 à 26 ne sont pas modifiées.

```
27 | omega = # à compléter (voir Q17)
28 | def vraie(N,v0):
29 |     x=0
30 |     v=v0
31 |     h=T/N
32 |     tab_3=temps(N)
33 |     for i in range(N):
34 |         tab_3[i]=np.sin(np.sqrt(omega*omega-lamda*lamda)*h*i)
35 |         *np.exp(-lamda*h*i)*v/(np.sqrt(omega*omega-lamda*lamda))
36 |     return tab_3
37 | plt.figure('graphique')
38 | plt.plot(temps(15000),vraie(15000,1),'b')
39 | plt.title("représentation graphique de r en fonction de t")
40 | plt.xlabel("t")
41 | plt.ylabel("r")
42 | plt.grid()
43 | plt.show()
```

L'exécution de ce programme donne la courbe $r(t)$ ci-dessous (les échelles sont arbitraires) :



Q17. En exploitant la courbe, déterminer la valeur de la variable « *omega* » masquée à la ligne 27.

Q18. La méthode d'Euler donne-t-elle une solution satisfaisante ?

-- FIN DE L'ENONCE --