

Durée 4h

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la **clarté**, à la **précision** et à la **concision** de la **rédaction**. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un **stylo noir ou bleu foncé non effaçable** pour la rédaction de votre composition ; **d'autres couleurs, excepté le vert**, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les **schémas** et la **mise en évidence des résultats**.
- **Ne pas utiliser de correcteur**.
- **Numéroter les copies** : "i/nombre total".
- **Respecter les notations** de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la **numérotation de la question posée**.
- Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition.

Le sujet comprend un document réponse p.1 à rendre avec la copie.

DOCUMENT REPONSE à RENDRE AVEC LA COPIE

NOM :

Ex 1 – Moteur de Stirling

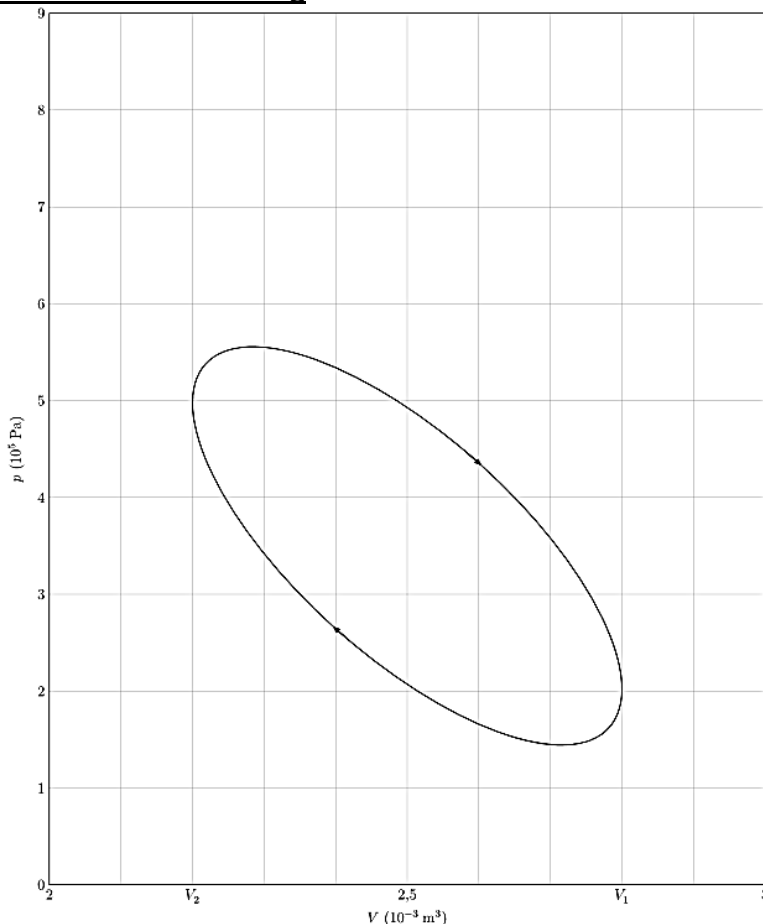


Figure B Allure du cycle réel d'un moteur Stirling dans le diagramme (p, V)

Ex 1 : Moteur Stirling

Le projet KRUSTY, dont le nom est l'acronyme de « Kilopower Reactor Using Stirling Technology », est un projet de la NASA qui vise à développer des réacteurs nucléaires pour l'exploration spatiale

Au début du XIX^e siècle, les chaudières des machines à vapeur, soumises à de trop fortes pressions, explosent assez souvent. Robert Stirling a ainsi imaginé en 1816 un moteur dépourvu de chaudière où la chaleur est apportée de l'extérieur de la machine (moteur à « air chaud »). L'utilisation de ce moteur restera limitée, en particulier en raison de la trop faible puissance des modèles proposés, insuffisante pour concurrencer la machine à vapeur et le moteur à combustion interne.

Le moteur Stirling bénéficie actuellement d'un nouvel intérêt car il présente de nombreux avantages. Il peut utiliser n'importe quelle source d'énergie produisant de la chaleur, combustion de tout matériau mais également énergie solaire, nucléaire, géothermique, etc. Il produit peu de vibrations et est silencieux (pas d'explosion interne ni d'échappement gazeux, absence de valves et soupapes). Grâce à l'utilisation de matériaux modernes qui supportent de grands écarts de température et qui améliorent les transferts thermiques, son rendement est comparable, voire supérieur à celui des moteurs à combustion interne. Son entretien est facile et il s'use moins que les moteurs à explosion.

La conception d'un moteur Stirling est cependant délicate, en raison des gros écarts de température qu'il doit supporter et de la nécessité d'une excellente étanchéité ; son prix reste donc élevé. Par ailleurs, il est difficile de faire varier son régime. Son emploi reste ainsi cantonné à des utilisations de niches : générateur d'électricité en milieux extrêmes, propulseur pour sous-marins, etc. Sa réversibilité conduit à l'utiliser comme pompe à chaleur capable de refroidir à -200°C ou de chauffer à plus de 700°C .

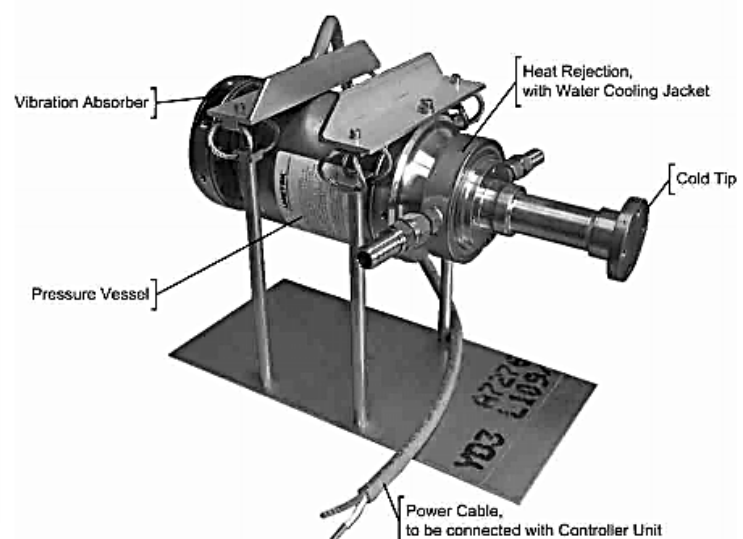
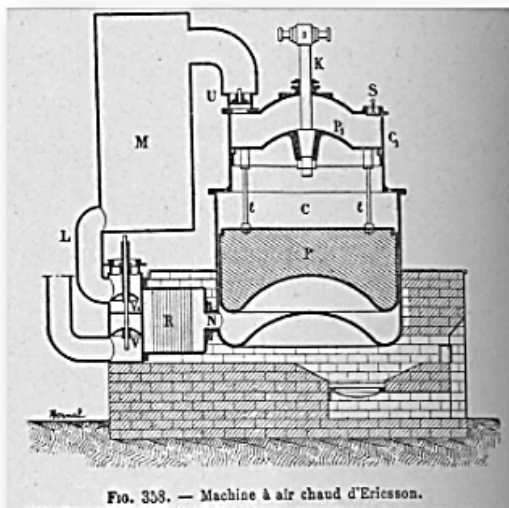


Figure 7 Gravure de 1899 d'un Moteur Ericsson M1851 avec régénérateur type Stirling (Wikipedia) et moteur Stirling de l'entreprise Sunpower fournissant le projet KRUSTY (ResearchGate)

III.A – Description du moteur

Une enceinte étanche est séparée en deux chambres, une chambre chaude (chauffée par l'extérieur), de volume maximal V_1 , et une chambre froide équipée d'un dissipateur thermique (ailettes), de volume maximal V_2 . Chaque chambre est dotée d'un piston permettant de faire varier son volume et le fluide peut circuler librement d'une chambre à l'autre. Le piston de la chambre froide est le piston de travail, il entraîne le piston de la chambre chaude appelé « déplaceur » car son rôle est de faire circuler le fluide entre les deux chambres. Lors du transvasement, le fluide passe de la chambre chaude à la température T_3 à la chambre froide à la température $T_1 < T_3$ et réciproquement.

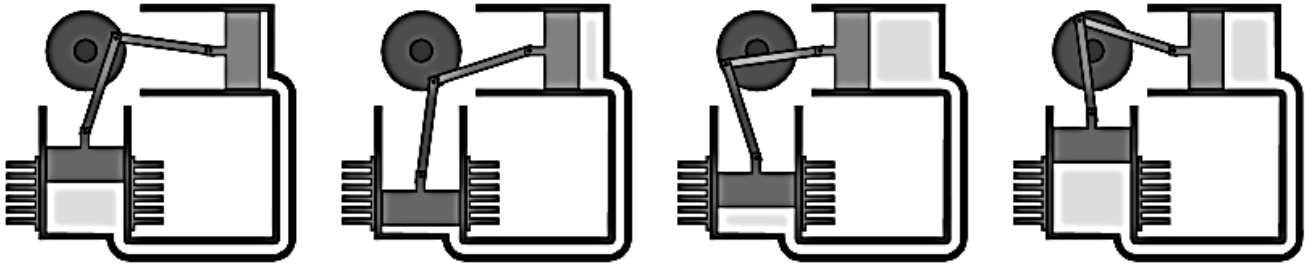


Figure 8 Phases de fonctionnement d'un moteur Stirling de type alpha (d'après Wikipedia)

Le mouvement du gaz peut être décrit par 4 phases plus ou moins distinctes (figure 8) :

- une phase de compression, pendant laquelle le volume de la chambre chaude est minimal, le fluide, entièrement situé dans la zone froide, est comprimé par le piston de travail dans sa course vers le bas ;
- une fois le piston de travail au point mort bas, le déplaceur est ramené à gauche, ce qui a pour effet de transvaser le fluide comprimé, qui passe de la zone froide vers la zone chaude et reçoit un transfert thermique de la source externe ;
- une phase de détente, pendant laquelle le fluide se détend dans le volume d'expansion où il continue d'être chauffé. Cette détente a pour effet de repousser le déplaceur et le piston de travail ;
- une fois que le piston de travail a atteint le point mort haut, le déplaceur est ramené à droite, ce qui a pour effet de transvaser le fluide de la zone chaude (volume d'expansion) vers la zone froide (volume de compression). Au cours de ce transfert, le fluide cède de la chaleur au refroidisseur.

Un cycle réel d'un moteur de Stirling est représenté dans le diagramme (p, V) en figure B du document réponse.

Q 30. Justifier que ce cycle est celui d'un moteur.

Q 31. Estimer la valeur du travail fourni par le moteur pendant un cycle.

III.B – Modélisation du cycle

On étudie le cycle de Stirling idéal. Au cours de celui-ci, n moles de gaz parfait de coefficient adiabatique γ subissent les transformations suivantes :

- une compression $(1 \rightarrow 2)$ isotherme réversible à la température T_1 ,
- un échauffement $(2 \rightarrow 3)$ isochore jusqu'à l'état 3 de température T_3 ,
- une détente $(3 \rightarrow 4)$ isotherme réversible à la température T_3 ,
- un refroidissement $(4 \rightarrow 1)$ isochore jusqu'à l'état 1.

Il n'y a pas d'autre travail que celui des forces de pression.

Q 32. Représenter sur la figure B du document réponse, à rendre avec la copie, l'allure du diagramme correspondant au cycle idéal.

On note $r = \frac{V_1}{V_2}$ le rapport de compression entre les volumes fixés par construction. On rappelle que la capacité

thermique à volume constant d'un gaz de n moles de gaz parfait vaut $C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$ où R est la constante des gaz parfaits.

Q 33. Exprimer W_{12} , le travail reçu par le fluide au cours de la compression, en fonction de n , R , T_1 et r . En déduire le transfert thermique Q_{12} reçu par le fluide au cours de cette compression en fonction de n , R , T_1 et r . Préciser les signes de W_{12} et de Q_{12} .

Q 34. Exprimer Q_{23} , le transfert thermique reçu par le fluide au cours de l'échauffement isochore, en fonction de n , R , T_1 , T_3 et γ . Préciser son signe.

Q 35. Exprimer W_{34} , le travail reçu par le fluide au cours de la détente, en fonction de n , R , T_3 et r . En déduire le transfert thermique Q_{34} reçu par le fluide au cours de cette détente en fonction de n , R , T_3 et r . Préciser les signes de W_{34} et Q_{34} .

Q 36. Exprimer le transfert thermique Q_{41} reçu par le fluide au cours du refroidissement en fonction de n , R , T_1 , T_3 et γ . Préciser son signe.

III.C – Rendement du moteur

Q 37. Définir puis exprimer le rendement idéal du moteur en fonction de T_1 , T_3 , r et γ .

Q 38. Définir et exprimer le rendement de Carnot en fonction de T_1 et T_3 .

En réalité, le moteur de Stirling utilisé dans le projet KRUSTY contient un régénérateur. Dans ce cas, la chaleur perdue par le gaz lors du refroidissement isochore ($4 \rightarrow 1$) est récupérée par le gaz lors du chauffage isochore ($2 \rightarrow 3$). Si le régénérateur est idéal, cette récupération est totale.

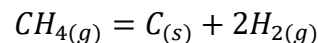
Q 39. Que devient le rendement du cycle idéal dans ce cas ?

Dans les conclusions du test de la NASA du dispositif KRUSTY réalisé en 2018, les ingénieurs indiquent que l'efficacité des moteurs a évolué pendant l'expérience entre 30 % et 50 % de l'efficacité de Carnot. De plus, pour les deux moteurs combinés, la puissance électrique obtenue est d'environ 180 W.

Q 40. En prenant une température chaude de 640°C et une température froide de 60°C et en supposant la conversion du travail mécanique en travail électrique parfaite, estimer numériquement la puissance thermique fournie par la source chaude aux deux moteurs de Stirling combinés.

Ex 2 : Transport du méthane

Le méthane $\text{CH}_{4(g)}$ est acheminé sur plusieurs milliers de kilomètres via des gazoducs le long desquels la pression est constamment maintenue égale à $P = 70 \text{ bar}$ et à température ambiante. Lors de cet acheminement, une partie du méthane se dissocie en carbone et dihydrogène selon la réaction :



La constante d'équilibre de la réaction vaut $K^\circ = 4 \cdot 10^{-9}$ à température ambiante.

On considère une quantité de matière n de méthane pur introduite dans un gazoduc. On suppose le gazoduc suffisamment long pour qu'à sa sortie le système ait cessé d'évoluer chimiquement et ait pu atteindre un état d'équilibre. On note ξ_f l'avancement de la transformation dans l'état final.

Données : Masses molaires $M_C = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_H = 1,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

- 1) Exprimer la quantité de matière totale de gaz $n_{\text{gaz},f}$ du mélange gazeux à l'état final en fonction de n et ξ_f .
- 2) On note $\alpha = \frac{\xi_f}{n}$ le taux de dissociation du méthane. Montrer que les pressions partielles à l'état final en méthane et en dihydrogène sont données par les expressions suivantes :

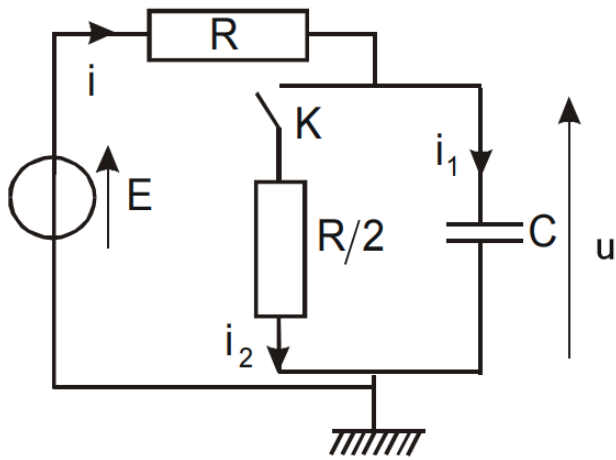
$$P_{\text{CH}_4,f} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \cdot P \quad \text{et} \quad P_{\text{H}_2,f} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha} \cdot P$$

- 3) Déterminer l'expression de α en fonction de K° , P et P° avec P° la pression standard. Faire l'application numérique pour donner un ordre de grandeur de α . Commenter le résultat.
- 4) Déterminer l'expression de la masse de carbone solide m_C qui se dépose chaque fois d'une tonne de méthane transite dans le gazoduc. Faire l'application numérique pour donner un ordre de grandeur de m_C . Commenter le résultat.

Ex 3 : Etude d'un circuit électrique

1. Régime transitoire

Nous considérons le circuit ci-dessous. Nous noterons i , l'intensité dans le résistor de résistance R , i_1 l'intensité dans le condensateur de capacité C , i_2 l'intensité dans le résistor de résistance $R/2$ et $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur. L'interrupteur est ouvert depuis très longtemps.



A l'instant $t = 0$, pris pour origine des temps, nous fermons l'interrupteur K .

B.1.1. Préciser i , i_1 , i_2 et u à l'instant $t = 0^-$, juste avant la fermeture de l'interrupteur.

B.1.2. Préciser i , i_1 , i_2 et u à l'instant $t = 0^+$.

B.1.3. Même question quand t tend vers l'infini.

B.1.4. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.

B.1.5. Résoudre cette équation.

B.1.6. Tracer l'allure de $u(t)$.

2. Régime sinusoïdal forcé

L'interrupteur est fermé et nous remplaçons le générateur de f.e.m constante par une source idéale de tension de f.e.m. $e(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t)$ où ω représente la pulsation du générateur et E , la tension efficace. On associe le complexe $\underline{u} = U\sqrt{2} \exp(j(\omega t + \varphi)) = \underline{U} \exp(j\omega t)$ à la tension $u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ où $\underline{U} = U\sqrt{2} \exp(j\varphi)$. De même, $\underline{E} = E\sqrt{2}$.

B.2.1. Calculer la fonction de transfert, $\underline{H} = \frac{\underline{U}}{\underline{E}}$ que l'on écrira sous la forme $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\omega/\omega_0}$.

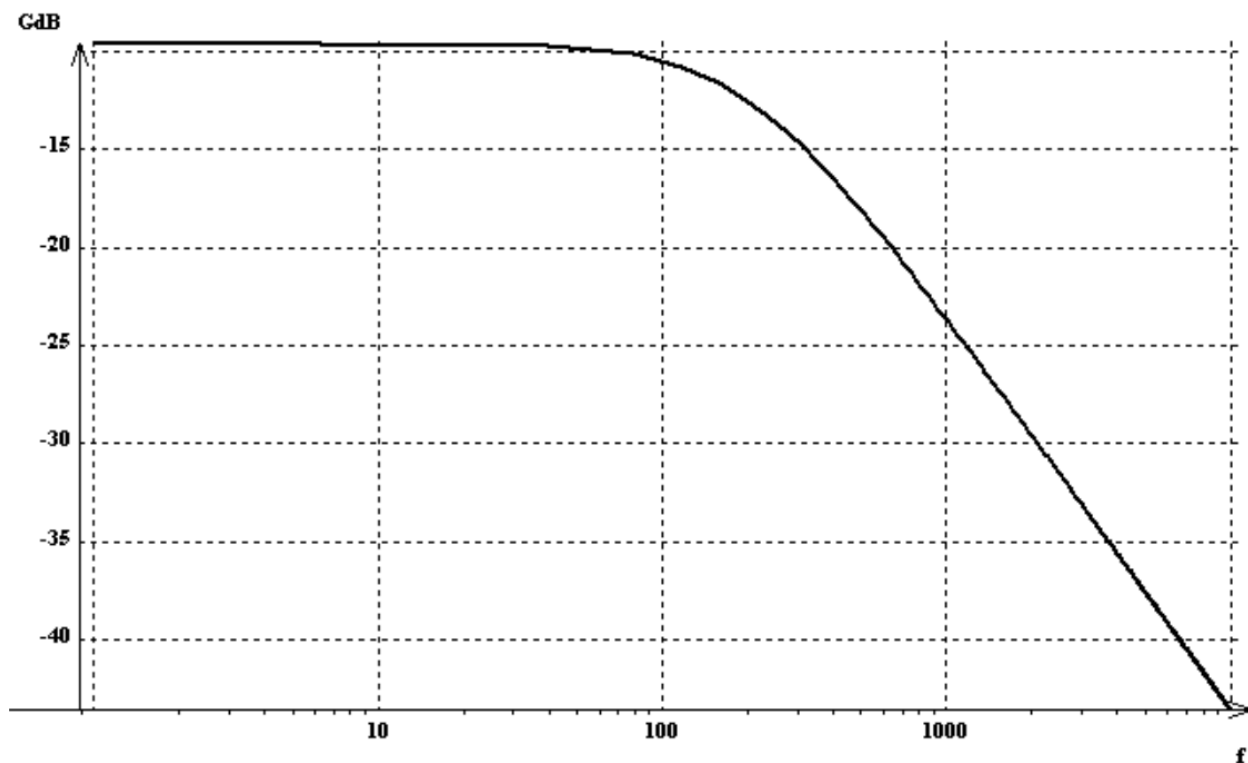
Préciser le module H et le déphasage φ .

B.2.2. Etablir l'expression littérale de la fréquence de coupure f_c en fonction de R et C .

B.2.3. Nous traçons le diagramme de Bode en fonction de la fréquence f en échelle semi-log.

B.2.3.1. On obtient le graphe ci-dessous. Déterminer graphiquement la valeur de f_c en précisant la méthode utilisée.

B.2.3.2. En déduire la valeur de la capacité C si $R = 1,0 \text{ k}\Omega$.



Ex 4 : La fonction d'erreur de GAUSS : $\text{erf}(\chi)$

Bon nombre de problèmes rencontrés en physique peuvent être résolus à l'aide de « fonctions spéciales ». Ces fonctions définies mathématiquement sont implémentées dans de nombreuses bibliothèques informatiques (comme *scipy*) et peuvent être utilisées aussi simplement qu'une fonction sinus ou racine carrée qui sont elles aussi d'une certaine manière des fonctions spéciales et tout aussi analytiques ...

On rencontre bien souvent des résolutions numériques de problèmes physiques alors que l'utilisation de ces fonctions spéciales permet une résolution complète et analytique. Ce problème se propose d'illustrer l'intérêt de ces « fonctions spéciales » .

III.A Introduction au problème de STEFAN

Un certain nombre de problèmes géologiques importants peuvent être modélisés par le chauffage ou le refroidissement instantané d'un demi-espace semi-infini. Au milieu du XIX^e siècle Lord KELVIN a ainsi utilisé cette idée pour estimer l'âge de la Terre. Il supposa qu'à la surface le flux d'énergie thermique résultait du refroidissement d'un flux initialement chaud de la Terre et a conclu que l'âge de la Terre était environ 65 millions d'années. On retrouve ces phénomènes en étudiant le refroidissement de la lithosphère océanique ou l'évolution d'une coulée de magma.

□ – 23. Comment explique-t-on de nos jours le résultat erroné obtenu par Lord KELVIN ?

On étudie un milieu matériel semi-infini défini par $y > 0$ dont la surface subit un changement instantané de température. Initialement à $t = 0^-$, le demi-espace est à la température uniforme T_1 ; pour $t > 0$, la surface $y = 0$ est maintenue à une température constante T_0 . Si $T_1 > T_0$, le milieu matériel se refroidit et sa température diminue. La situation est représentée à la figure 5 pour le cas $T_1 > T_0$.

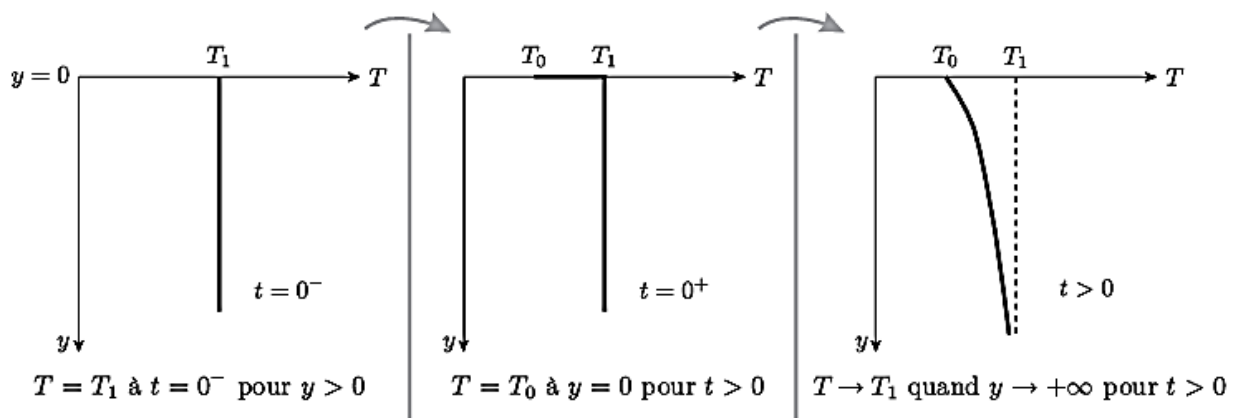


FIGURE 5 – Évolution de la température

Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire dS pendant dt , est noté $\delta\phi_Q$.

- – 24. Rappeler la définition du vecteur $\vec{j}_Q$, densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?
Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application.
En déduire la dimension de la conductivité thermique κ .

On étudie une tranche mésoscopique de sol de masse m de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c comprise entre y et $y + dy$ de surface S .

- – 25. Quelle est l'énergie thermique δQ reçue par cette tranche entre t et $t + dt$?
Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique » ?
Établir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\frac{\partial j_Q}{\partial y}$, S , dy et dt
puis en fonction de ρ , c , S , $\frac{\partial T}{\partial t}$, dy et dt .
En déduire l'équation de la chaleur à une dimension $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.
En déduire l'expression d'une longueur caractéristique L en fonction de D et du temps t .

On introduit la température adimensionnée

$$\theta(y,t) = \frac{T(y,t) - T_1}{T_0 - T_1}.$$

- – 26. Quelle est l'équation vérifiée par $\theta(y,t)$?
Déterminer les valeurs de $\theta(y > 0, t = 0)$, $\theta(y = 0, t > 0)$ et $\theta(y \rightarrow +\infty, t > 0)$.

On introduit une variable de similarité sans dimension $\eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}}$ et on suppose que θ n'est une fonction que de cette seule variable η .

- – 27. Montrer que

$$\frac{d^2\theta(\eta)}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta(\eta)}{d\eta} = 0.$$

- – 28. En utilisant la fonction $\varphi(\eta) = \frac{d\theta(\eta)}{d\eta}$, montrer que $\theta(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz$.

On donne $\int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire une expression de $T(y,t)$ faisant apparaître une intégrale.

La fonction $\chi \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\chi e^{-z^2} dz$ est appelée fonction d'erreur de GAUSS, elle est implémentée dans `scipy`.

Elle est souvent notée $\text{erf}(\chi)$. On peut l'appeler directement en utilisant la commande : `from scipy.special import erf`.

III.B Formation d'une croûte de lave solide.

Dans cette dernière partie on s'intéresse à une coulée de lave en fusion et à la formation d'une croûte solide à sa surface. On étudie alors l'augmentation de l'épaisseur de cette croûte en fonction du temps.

À la surface extérieure, en $y = 0$, la lave est en contact avec l'air à la température constante T_0 . La lave en fusion à la température T_f est donc soudainement portée à la température T_0 à $t = 0$. Dans ces conditions, la couche superficielle de la lave se solidifie, et on note $y_s(t)$ l'épaisseur de la couche de lave solide.

Nous devons donc résoudre l'équation de la chaleur dans l'espace $0 \leq y \leq y_s(t)$ avec comme conditions aux limites $T = T_0$ en $y = 0$, et $T = T_f$ en $y = y_s(t)$, et comme condition initiale $y_s = 0$ à $t = 0$.

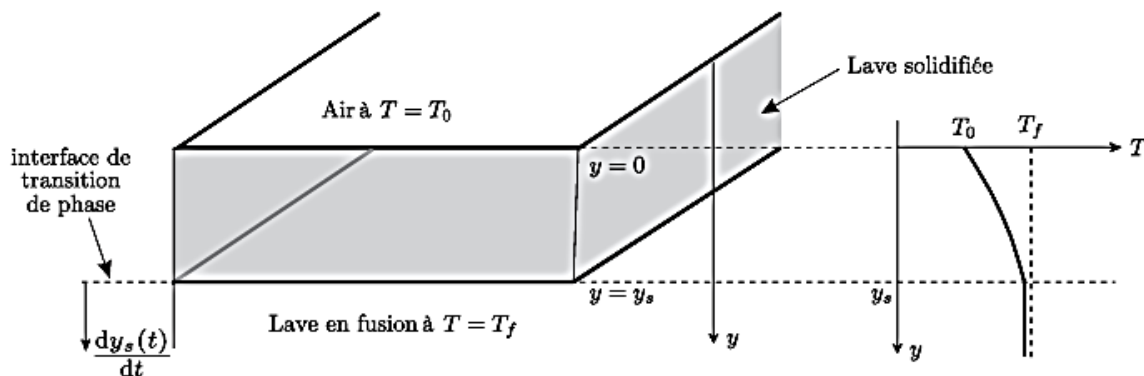


FIGURE 6 – Formation d'une croûte de lave solide

La position $y_s(t)$ de l'interface de transition de phase est une fonction a priori inconnue du temps. Comme dans la situation précédente il n'y a pas d'échelle de longueur définie dans ce problème. Pour cette raison, on travaillera également avec la variable de similarité sans dimension $\eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}}$.

On utilisera également la température adimensionnée

$$\theta(y,t) = \frac{T(y,t) - T_0}{T_f - T_0}$$

La profondeur de l'interface de solidification $y_s(t)$ doit enfin s'adapter à la longueur caractéristique de la diffusion thermique. Nous supposons que celle-ci varie proportionnellement à la racine carrée du temps, de telle sorte que : $\eta_s = \frac{y_s(t)}{2\sqrt{Dt}} = cte = \lambda$. Cette constante est inconnue et reste à déterminer.

- – 29. En reprenant l'équation de la question 27, montrer que

$$\theta(\eta) = \frac{\text{erf}(\eta)}{\text{erf}(\lambda)}.$$

Afin d'obtenir l'expression puis la valeur de la constante λ , nous allons étudier la solidification d'une tranche de lave d'épaisseur dy_s entre les instants t et $t + dt$

- – 30. Quelle est l'énergie δQ libérée par la solidification à la température T_f d'une tranche dy_s de lave de surface S en fonction de la masse volumique ρ de la lave en fusion et l'enthalpie de fusion massique : $\Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}$.
- – 31. Toute l'énergie libérée par la solidification doit être évacuée par diffusion dans la lave solide car la lave en fusion reste à la température T_f . Montrer que :

$$\rho \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) \frac{dy_s(t)}{dt} = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=y_s}$$

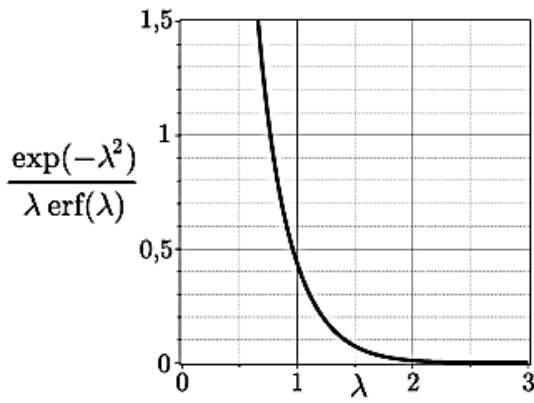


FIGURE 7 – Graphe de $\lambda \mapsto \frac{\exp(-\lambda^2)}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)}$

□ – 32. En déduire que

$$\frac{\exp(-\lambda^2)}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)} = \frac{\sqrt{\pi}}{c(T_f - T_0)} \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f).$$

□ – 33. Quel algorithme peut on utiliser pour obtenir la constante λ numériquement ?

Expliquer en quelques mots son fonctionnement.

On donne les valeurs numériques suivantes :

- $\Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) = 400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- $c = 1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- $T_f - T_0 = 1000 \text{ K}$
- $\rho = 2600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- $D = 7 \times 10^{-7} \text{ SI}$
- $\sqrt{\pi} \sim 1,77$

□ – 34. À l'aide de la figure 7, estimer la valeur numérique de λ .

En déduire l'épaisseur de la croûte de lave six mois après l'éruption.

Comparer votre résultat à ceux de la figure 8 tirés d'une expérience¹.

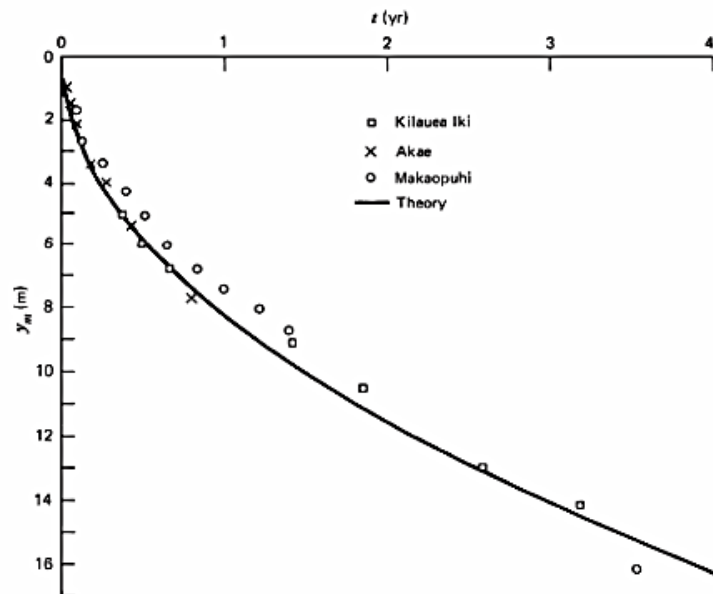


FIGURE 8 – Épaisseurs des croûtes de lave solides à la surface des lacs de lave dans les trois cratères à fosse Kilauea Iki (1959), Alae (1963) et Makaopuhi (1965) sur le volcan Kilauea, Hawaii (Wright et al., 1976), et résultat théorique.

1. Wright, T. L., Peck, D. L., and Shaw, H. R. (1976). Kilauea lava lakes : Natural laboratories for study of cooling, crystallization, and differentiation of basaltic magma. In *The Geophysics of the Pacific Ocean Basin and its Margin*, eds. G. H. Sutton, M. H. Manghnani, R. Moberly, and E. U. McAfee, vol. 19 of *Geophysical Monograph Series*, Washington, D.C. : American Geophysical Union, pp. 375–90

Ex 5 : Oscillations au sein de l'atome de Thomson

Données

- Masse d'un électron : $m_e \approx 10^{-30} \text{ kg}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- La permittivité du vide ϵ_0 est telle que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 10^{10} \text{ SI}$ et $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \approx 2 \cdot 10^{-28} \text{ J} \cdot \text{m}$

Afin de donner une vision classique de l'émission d'un atome préalablement excité, nous allons étudier la réponse mécanique d'un électron à une excitation de l'atome.



Le modèle de l'atome d'hydrogène adopté ici est celui élaboré par Joseph Thomson (photo ci-contre), prix Nobel en 1906 pour avoir découvert l'électron en 1897. Il proposa en 1904 un modèle dit du « pudding aux électrons ».

Il s'agit :

- d'une boule de centre O et de rayon a , avec $a \approx 10^{-10} \text{ m}$, uniformément chargée en volume, de densité volumique de charge (uniforme à l'intérieur de la boule) notée ρ , de charge totale $+e$, considérée tout d'abord immobile dans le référentiel du laboratoire,
- et d'un électron ponctuel (masse m , charge $-e$) libre de se déplacer sans frottement dans l'espace de la boule.

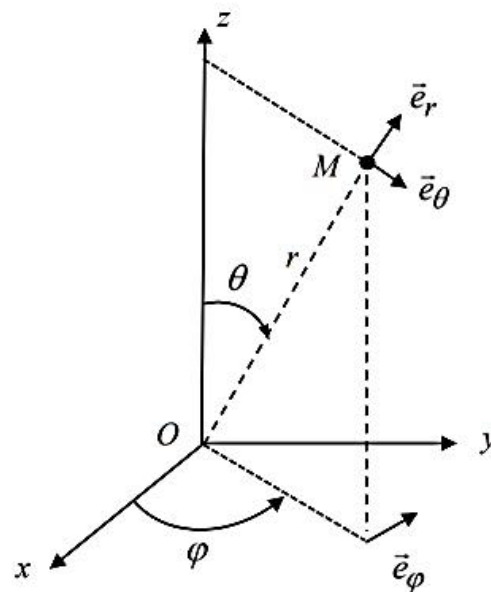


Figure 1 – Coordonnées et base sphériques

La position d'un point M de l'espace est parfois repérée par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) (sur la base $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$), ou par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) , associées à la base $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

II.1 - Force électrostatique ressentie par l'électron

Q2. Donner l'expression de la densité volumique de charge ρ .

Soit M un point quelconque de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques : $M(r, \theta, \varphi)$.

Q3. Montrer que le champ électrostatique en M s'écrit : $\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r$.

Q4. Déterminer en tout point M intérieur à la boule, le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par la distribution de charge caractérisée par ρ .

L'électron se situe en un point $M(r, \theta, \varphi)$ **intérieur à la boule**. On le repère par son vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$. On suppose ici l'atome isolé et on néglige toute attraction gravitationnelle.

Q5. Donner la force ressentie par l'électron. Mettre cette force sous la forme $\vec{F} = -m_e \omega_0^2 \overrightarrow{OM}$ où on donnera l'expression de ω_0 . Commenter l'expression de cette force.

II.4 - Modélisation du mouvement de l'électron par une méthode numérique

La position instantanée $r(t)$ de l'électron dans le repère défini sur la **figure 1** vérifie une équation différentielle dont la difficulté de résolution dépend de la modélisation physique choisie. Pour résoudre des équations différentielles complexes, on peut utiliser une méthode numérique. Pour illustrer cette méthode de résolution, on considère que $r(t)$ obéit à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + 2\lambda \cdot \frac{dr}{dt} + \omega_0^2 \cdot r = 0$$

avec λ et ω_0^2 des constantes positives non nulles.

L'objectif est d'obtenir une représentation graphique de la fonction $r(t)$, la plus proche possible de la réalité.

On utilise une méthode numérique simple (connue sous le nom de « méthode d'Euler explicite ») que l'on programme en langage PYTHON.

Dans ce langage :

- la fonction `np.arange(N)` renvoie une liste de nombres entiers compris entre 0 et N-1, de type « array ».
- la fonction `np.zeros(N)` renvoie une liste de N valeurs toutes nulles, de type « array ».

Pour des raisons de commodité, les valeurs numériques utilisées ne correspondent pas à la réalité physique ; les valeurs obtenues pour $r(t)$ seront donc arbitraires (en revanche la forme de la courbe est réaliste).

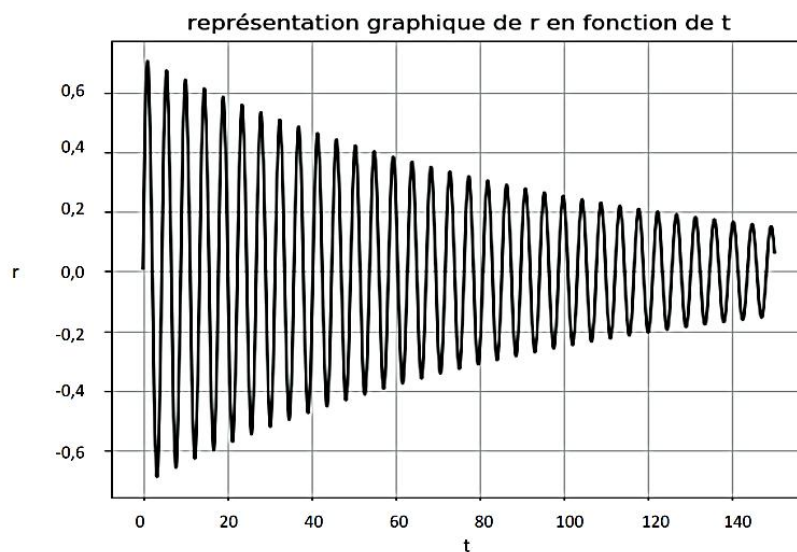
Le programme est le suivant :

```
1 import numpy as np
2 from matplotlib import pyplot as plt
3
4 T=150
5
6 omega = 1.4
7 lamda = 0.03
8
9 def euler(N,x0,v0):
10     x = x0
11     v = v0
12     h = T/N
13     a = -2*lamda*v-omega*omega*x
14     tab_1 = np.zeros(N)
15     tab_2 = np.zeros(N)
16     for i in range(N):
17         (x,v,a)=(x+v*h,v+a*h,-2*lamda*v-omega*omega*x)
18         tab_1[i] = x
19         tab_2[i] = v
20     return tab_1
21
22 def temps(N):
23     h=T/N
24     t = np.arange(N)*h
25     return t
26
27 plt.figure('graphique')
28 plt.plot(temps(15000),euler(15000,0,1),'b')
29 plt.title("représentation graphique de r en fonction de t")
30 plt.xlabel("t")
31 plt.ylabel("r")
32 plt.grid()
33 plt.show()
```

L'exécution de ce programme permet d'obtenir la **courbe** $r(t)$ ci-dessous (les échelles sont arbitraires).

Q14. Décrire, en détaillant les étapes, comment l'algorithme utilisé permet, connaissant les valeurs de la fonction $r(t_n)$ et de sa dérivée $\frac{dr}{dt}(t_n)$ à une date t_n , de calculer ces mêmes valeurs à une date notée t_{n+1} .

Quelle approximation est faite ?



Q15. Afin de tester la fonction *euler*, nous exécutons l'instruction « *euler(3,0,1)* ». Que retourne cette instruction ?

Q16. Les lignes 16 à 19 contiennent une boucle itérative dans laquelle la commande « *for* » est utilisée. Modifier ces lignes de façon à utiliser la commande « *while* » en créant une boucle conditionnelle. La partie de programme écrite avec la boucle « *while* » doit produire exactement les mêmes résultats que la portion de code qu'elle remplace.

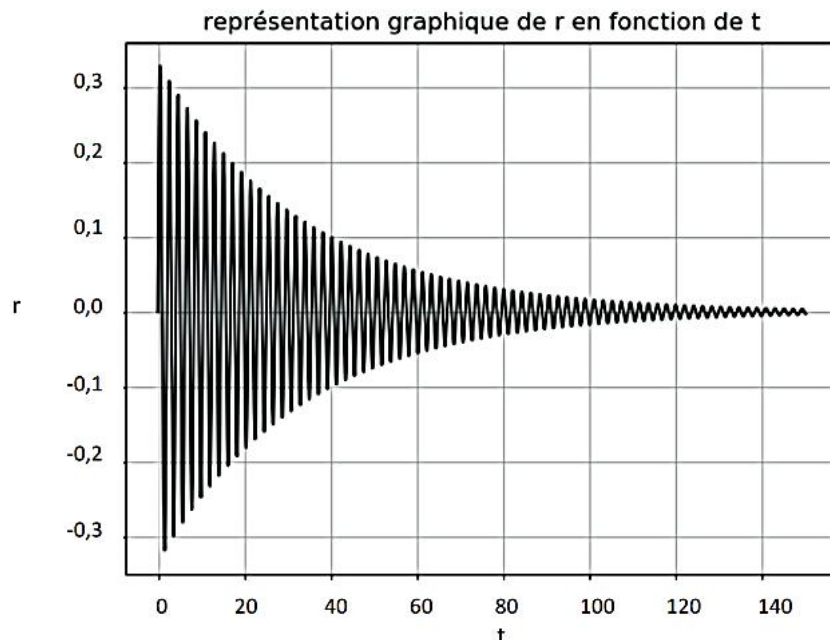
Afin de tester la méthode d'Euler, on rajoute les lignes de code suivantes, qui permettent de tracer la courbe donnant la solution exacte de la solution de l'équation différentielle.

Le programme modifié est donné ci-après (à partir de la ligne 27).

Les lignes 1 à 26 ne sont pas modifiées.

```
27 | omega = # à compléter (voir Q17)
28 | def vraie(N,v0):
29 |     x=0
30 |     v=v0
31 |     h=T/N
32 |     tab_3=temps(N)
33 |     for i in range(N):
34 |         tab_3[i]=np.sin(np.sqrt(omega*omega-lamda*lamda)*h*i)
35 |         *np.exp(-lamda*h*i)*v/(np.sqrt(omega*omega-lamda*lamda))
36 |     return tab_3
37 | plt.figure('graphique')
38 | plt.plot(temps(15000),vraie(15000,1),'b')
39 | plt.title("représentation graphique de r en fonction de t")
40 | plt.xlabel("t")
41 | plt.ylabel("r")
42 | plt.grid()
43 | plt.show()
```

L'exécution de ce programme donne la courbe $r(t)$ ci-dessous (les échelles sont arbitraires) :



Q17. En exploitant la courbe, déterminer la valeur de la variable « *omega* » masquée à la ligne 27.

Q18. La méthode d'Euler donne-t-elle une solution satisfaisante ?

-- FIN DE L'ENONCE --