

Durée 4h

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la **clarté**, à la **précision** et à la **concision** de la **rédaction**. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un **stylo noir ou bleu foncé non effaçable** pour la rédaction de votre composition ; **d'autres couleurs, excepté le vert**, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les **schémas** et la **mise en évidence des résultats**.
- **Ne pas utiliser de correcteur**.
- **Numéroter** les copies : "i/nombre total".
- **Respecter les notations** de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la **numérotation de la question posée**.
- **Écrire le mot FIN à la fin de votre composition**.

Ex 1 : L'énergie thermique des mers

En 1869, dans son livre, *Vingt mille lieues sous les mers*, Jules Verne fait référence aux « eaux de surface et les eaux profondes des océans pour produire de l'électricité ». Cette idée d'utiliser la différence de température entre les eaux de surface et les eaux profondes afin de produire de l'électricité est appelée ETM (énergie thermique des mers) en français et OTEC (Ocean Thermal Energy Conversion) en anglais. L'IFREMER considère que le coût du pompage des eaux profondes n'est rentable que pour une différence de température d'au moins 20 °C entre l'eau de mer chaude prélevée à la surface et l'eau de mer froide prélevée en profondeur.

I Généralités

Q 1. Représenter le diagramme synoptique d'une machine ditherme produisant du travail en précisant les signes des différents échanges énergétiques.

Q 2. Exprimer et calculer le rendement de Carnot de cette machine fonctionnant entre des sources de températures $T_c = 26\text{ °C}$ et $T_f = 5\text{ °C}$. Commenter le résultat.

On envisage l'installation d'une centrale ETM à La Réunion. Le profil de température de l'eau de l'océan autour de cette île est donné sur la figure 1.

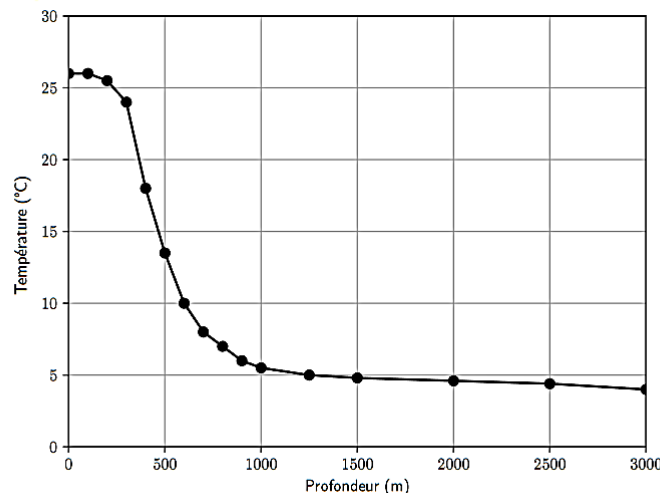


Figure 1 Température de l'eau de l'océan en fonction de la profondeur à La Réunion.

Q 3. Déterminer la profondeur à laquelle on devra prélever l'eau profonde pour qu'une installation à La Réunion soit rentable.

II Centrale ETM en cycle fermé

Un prototype de centrale ETM est installé à La Réunion. Il n'est pas raccordé à l'océan et une pompe à chaleur simule les sources d'eau chaude et d'eau froide. L'ammoniac est le fluide de travail et son évolution est représentée sur la partie centrale de la figure 2. Le cycle réel de l'ammoniac est également représenté figure 3(a), ainsi qu'un cycle virtuel figure 3(b) expliqué ensuite.

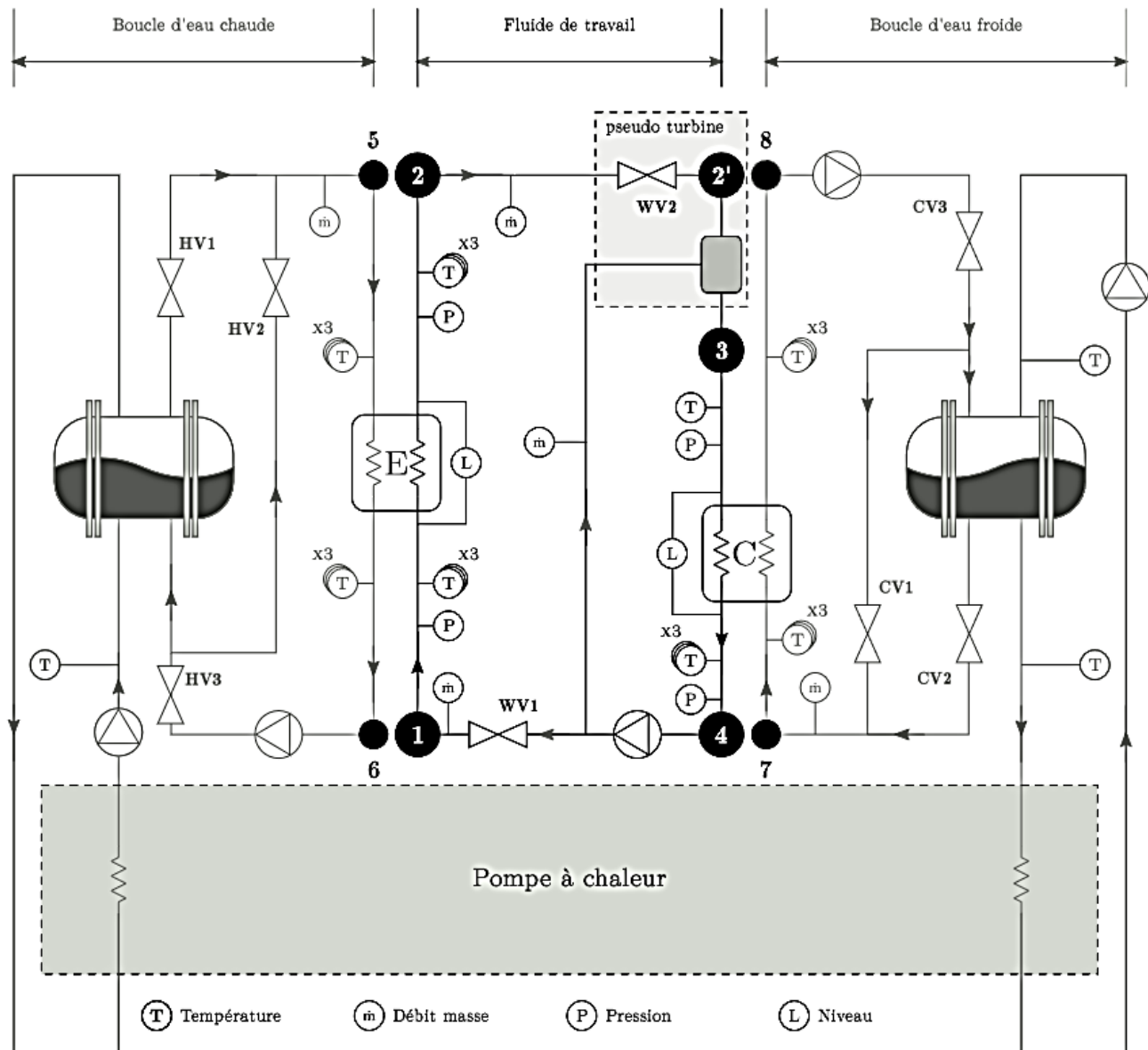


Figure 2 Schéma global du prototype ETM. Hal open science, Étude expérimentale d'un prototype ETM à La Réunion.

- L'ammoniac passe dans un évaporateur E adiabatique et isobare à double flux sous la pression de 9 bar où l'eau chaude le fait s'évaporer en vapeur juste saturante (point 1 à point 2).
- La vapeur produite est détendue de manière isenthalpique dans la vanne WV2 jusqu'à la pression de 6 bar (point 2 à point 2'). Une petite quantité de liquide froid, prélevée avant la vanne WV1, est injectée dans la vapeur chaude de façon à diminuer sa température (désurchauffe isobare) (point 2' à point 3). Ces transformations (détente et désurchauffe) sont contrôlées de telle sorte qu'elles donnent les mêmes propriétés au fluide que s'il avait été soumis à une détente isentropique dans une turbine jusqu'à la pression de 6 bar (point 2 au point 3 figure 3(b)).
- Le fluide de travail est ensuite condensé en liquide juste saturant par un condenseur C adiabatique et isobare à double flux grâce à l'eau froide (point 3 à point 4) puis ramené vers l'évaporateur avec une pompe à la pression de 9 bar (point 4 à point 1) en fonctionnement isentropique (la pompe est notée P_1 sur la figure 3).

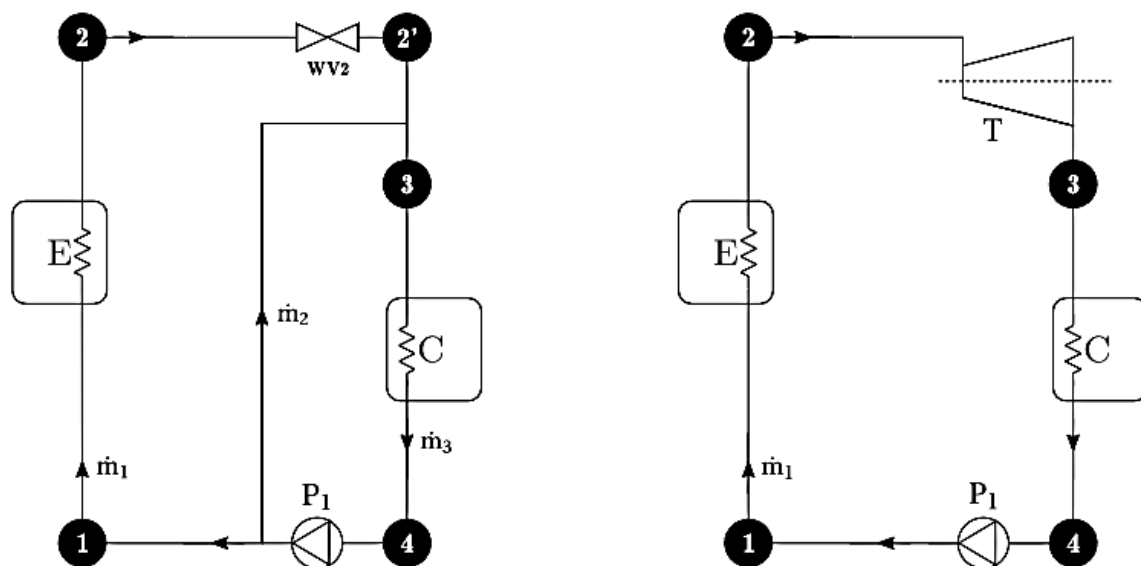


Figure 3 Cycle réel (a) à gauche et cycle virtuel (b) à droite de l'ammoniac.
Hal open science, Étude expérimentale d'un prototype ETM à La Réunion.

La centrale fonctionne en régime stationnaire et on néglige les variations d'énergies potentielle et cinétique. Les liquides sont considérés comme incompressibles. Eau chaude et eau froide ont même débit massique. Les transformations isentropiques sont supposées adiabatiques et réversibles.

Données	Débit massique	Température d'entrée (en °C)	Température de sortie (en °C)
Eau chaude	$\dot{m}_e$	$T_5 = 26$	$T_6 = 24,5$
Eau froide	$\dot{m}_e$	$T_7 = 5$	T_8

Tableau 1 Données et notations relatives aux circuits d'eau.

On note x la fraction massique en vapeur de l'ammoniac. On donne le tableau suivant :

Point i	$T_i(^{\circ}\text{C})$	$P_i(\text{bar})$	x_i	$h_i(\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1})$	$s_i(\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1})$
1	12	9		240	1,15
2'		6			

Tableau 2 Quelques paramètres pour deux points du cycle.

Données numériques

Masse volumique de l'eau de mer	$\rho_1 = 1,0 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Capacité thermique massique de l'eau liquide	$c_e = 4,0 \times 10^3 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Débits massiques de l'ammoniac	$\dot{m}_1 = 4,0 \times 10^{-1} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\dot{m}_2 = 5,0 \times 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$

Les diagrammes d'état de l'ammoniac, nommé R717 en tant que fluide frigorigène, sont fournis dans les documents réponses 1 et 2, respectivement dans les systèmes de coordonnées (P, h) et (T, s) .

Q 6. Sur les diagrammes (P, h) et (T, s) des documents réponses 1 et 2, mentionner les noms des courbes de saturation, puis indiquer la phase stable associée à chaque domaine. Faire apparaître le point critique que l'on définira et donner sa température et sa pression.

On utilise désormais les diagrammes des documents réponses 3 et 4 qui présentent des agrandissements de parties des diagrammes des documents réponses 1 et 2 sans les courbes isochores pour plus de lisibilité :

- le document réponse 3 contient le diagramme (P, h) sur lequel figurent en tirets et points alternés les isothermes graduées en degrés Celsius et en tirets les isentropes graduées en $\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$;
- le document réponse 4 contient le diagramme (T, s) sur lequel figurent en tirets et points alternés les isobares graduées en bars et en tirets les isenthalpes graduées en $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Q 7. Déterminer $T_{\text{vap,HP}}$ et $T_{\text{vap,BP}}$, les températures de vaporisation aux pressions respectives de 9 bar et 6 bar.

Q 8. Déterminer les valeurs numériques des enthalpies massiques de vaporisation $\Delta h_{\text{vap,HP}} = \Delta h_{\text{vap}}(9 \text{ bar})$ et $\Delta h_{\text{vap,BP}} = \Delta h_{\text{vap}}(6 \text{ bar})$.

Q 9. La compression isentrope entre les points 4 et 1 est représentée sur le diagramme (P, h) du document réponse 3. Justifier sa forme.

Q 10. La détente isenthalpe entre les points 2 et 2' est représentée sur le diagramme (T, s) du document réponse 4. À l'aide des deux diagrammes, déterminer la température T_2 , l'enthalpie massique h_2 et l'entropie massique s_2 . Préciser sous quelle(s) phase(s) se trouve l'ammoniac au point 2'.

Q 11. La détente isentrope entre les points 2 et 3 est représentée sur le diagramme (P, h) du document réponse 3. À l'aide des deux diagrammes, déterminer la température T_3 , l'enthalpie massique h_3 et l'entropie massique s_3 .

Q 12. Représenter sur les diagrammes (P, h) et (T, s) des documents réponses 3 et 4 le cycle effectué par l'ammoniac dans le dispositif ETM. On fera apparaître en particulier les points 1, 2, 2', 3, 4 et 1' (liquide juste saturant à 9 bar).

Q 13. Compléter le tableau du document réponse 5.

Q 14. En déduire la valeur de c_a , capacité thermique massique de l'ammoniac liquide.

Q 15. Expliquer pourquoi on utilise l'ammoniac comme fluide de travail et non de l'eau. Donner néanmoins un inconvénient de l'utilisation de l'ammoniac.

Q 16. Établir l'expression suivante du premier principe industriel dans le cas d'un système ouvert à une entrée et une sortie, en écoulement permanent avec un débit massique D_m , en explicitant bien toutes les hypothèses :

$$D_m(h_s - h_e) = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$

où h_s désigne l'enthalpie massique de sortie, h_e l'enthalpie massique d'entrée, $\mathcal{P}_u$ la puissance utile reçue par le système due aux pièces mobiles et $\mathcal{P}_{th}$ la puissance thermique reçue par le système.

En raison de la taille réduite du prototype, une véritable turbine capable de produire la puissance nécessaire n'était pas disponible. Néanmoins, en considérant le cycle virtuel représenté sur la figure 3(b), où la détente isentropique du point 2 au point 3 est attribuée à une turbine virtuelle, on peut calculer le rendement du cycle.

Q 17. Exprimer et calculer $\mathcal{P}_{th,E,R}$ et $\mathcal{P}_{th,E,V}$, les puissances thermiques reçues par l'ammoniac au niveau de l'évaporateur lors des cycles respectivement réel et virtuel, puis commenter leur signe.

Q 18. Exprimer, en fonction des températures, $\mathcal{P}_{th,ec}$, la puissance reçue par l'eau chaude au niveau de l'évaporateur (cf. figure 2).

Q 19. En déduire l'expression et la valeur numérique de $\dot{m}_e$.

Q 20. Justifier que l'évolution de l'ammoniac traversant la vanne WV2 est isenthalpique.

Q 21. Au niveau du surchauffeur, situé entre les points 2' et 3, donner une relation entre $\dot{m}_1$, $\dot{m}_2$ et $\dot{m}_3$. Calculer $\dot{m}_3$.

Q 22. Exprimer et calculer $\mathcal{P}_{C,R}$ et $\mathcal{P}_{C,V}$, puissances reçues par l'ammoniac au niveau du condenseur lors des cycles respectivement réel et virtuel, puis commenter leur signe.

Q 23. Exprimer dans le cas réel $\mathcal{P}_{ef}$, la puissance reçue par l'eau froide au niveau du condenseur, puis en déduire la valeur de T_g .

Q 24. Exprimer et calculer $\mathcal{P}_{T,V}$, puissance utile reçue par l'ammoniac dans la turbine T entre les points 2 et 3 du cycle virtuel. Commenter son signe.

Q 25. Exprimer et calculer $\mathcal{P}_{P_1,R}$ et $\mathcal{P}_{P_1,V}$, puissances utiles reçues par l'ammoniac au niveau de la pompe P_1 lors des cycles respectivement réel et virtuel.

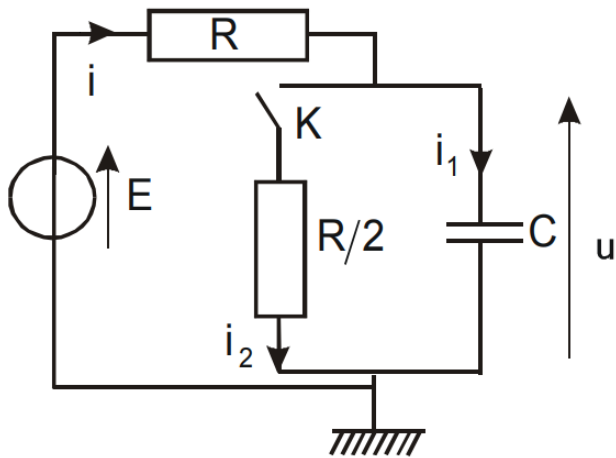
Q 26. Déduire de l'étude précédente le rendement η_V du cycle virtuel.

Q 27. Le rendement obtenu est surestimé. Proposer des justifications.

Ex 2 : Etude d'un circuit électrique

1. Régime transitoire

Nous considérons le circuit ci-dessous. Nous noterons i , l'intensité dans le résistor de résistance R , i_1 l'intensité dans le condensateur de capacité C , i_2 l'intensité dans le résistor de résistance $R/2$ et $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur. L'interrupteur est ouvert depuis très longtemps.



A l'instant $t = 0$, pris pour origine des temps, nous fermons l'interrupteur K .

B.1.1. Préciser i , i_1 , i_2 et u à l'instant $t = 0^-$, juste avant la fermeture de l'interrupteur.

B.1.2. Préciser i , i_1 , i_2 et u à l'instant $t = 0^+$.

B.1.3. Même question quand t tend vers l'infini.

B.1.4. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.

B.1.5. Résoudre cette équation.

B.1.6. Tracer l'allure de $u(t)$.

2. Régime sinusoïdal forcé

L'interrupteur est fermé et nous remplaçons le générateur de f.e.m constante par une source idéale de tension de f.e.m. $e(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t)$ où ω représente la pulsation du générateur et E , la tension efficace. On associe le complexe $\underline{u} = U\sqrt{2} \exp(j(\omega t + \varphi)) = \underline{U} \exp(j\omega t)$ à la tension $u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ où $\underline{U} = U\sqrt{2} \exp(j\varphi)$. De même, $\underline{E} = E\sqrt{2}$.

B.2.1. Calculer la fonction de transfert, $\underline{H} = \frac{\underline{U}}{\underline{E}}$ que l'on écrira sous la forme $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\omega/\omega_0}$.

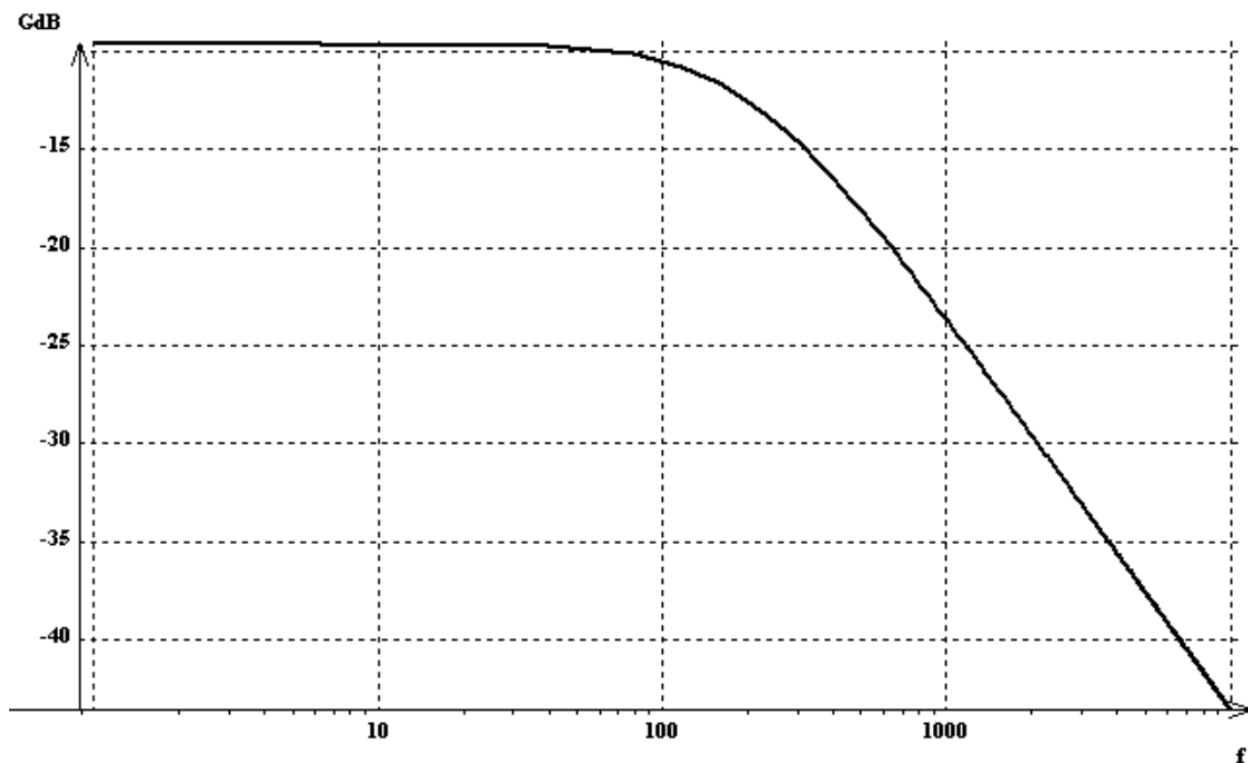
Préciser le module H et le déphasage φ .

B.2.2. Etablir l'expression littérale de la fréquence de coupure f_c en fonction de R et C .

B.2.3. Nous traçons le diagramme de Bode en fonction de la fréquence f en échelle semi-log.

B.2.3.1. On obtient le graphe ci-dessous. Déterminer graphiquement la valeur de f_c en précisant la méthode utilisée.

B.2.3.2. En déduire la valeur de la capacité C si $R = 1,0 \text{ k}\Omega$.



Ex 3 : La fonction d'erreur de GAUSS : $erf(\chi)$

Bon nombre de problèmes rencontrés en physique peuvent être résolus à l'aide de « fonctions spéciales ». Ces fonctions définies mathématiquement sont implémentées dans de nombreuses bibliothèques informatiques (comme *scipy*) et peuvent être utilisées aussi simplement qu'une fonction sinus ou racine carrée qui sont elles aussi d'une certaine manière des fonctions spéciales et tout aussi analytiques ...

On rencontre bien souvent des résolutions numériques de problèmes physiques alors que l'utilisation de ces fonctions spéciales permet une résolution complète et analytique. Ce problème se propose d'illustrer l'intérêt de ces « fonctions spéciales » .

III.A Introduction au problème de STEFAN

Un certain nombre de problèmes géologiques importants peuvent être modélisés par le chauffage ou le refroidissement instantané d'un demi-espace semi-infini. Au milieu du XIX^e siècle Lord KELVIN a ainsi utilisé cette idée pour estimer l'âge de la Terre. Il supposa qu'à la surface le flux d'énergie thermique résultait du refroidissement d'un flux initialement chaud de la Terre et a conclu que l'âge de la Terre était environ 65 millions d'années. On retrouve ces phénomènes en étudiant le refroidissement de la lithosphère océanique ou l'évolution d'une coulée de magma.

□ – 23. Comment explique-t-on de nos jours le résultat erroné obtenu par Lord KELVIN ?

On étudie un milieu matériel semi-infini défini par $y > 0$ dont la surface subit un changement instantané de température. Initialement à $t = 0^-$, le demi-espace est à la température uniforme T_1 ; pour $t > 0$, la surface $y = 0$ est maintenue à une température constante T_0 . Si $T_1 > T_0$, le milieu matériel se refroidit et sa température diminue. La situation est représentée à la figure 5 pour le cas $T_1 > T_0$.

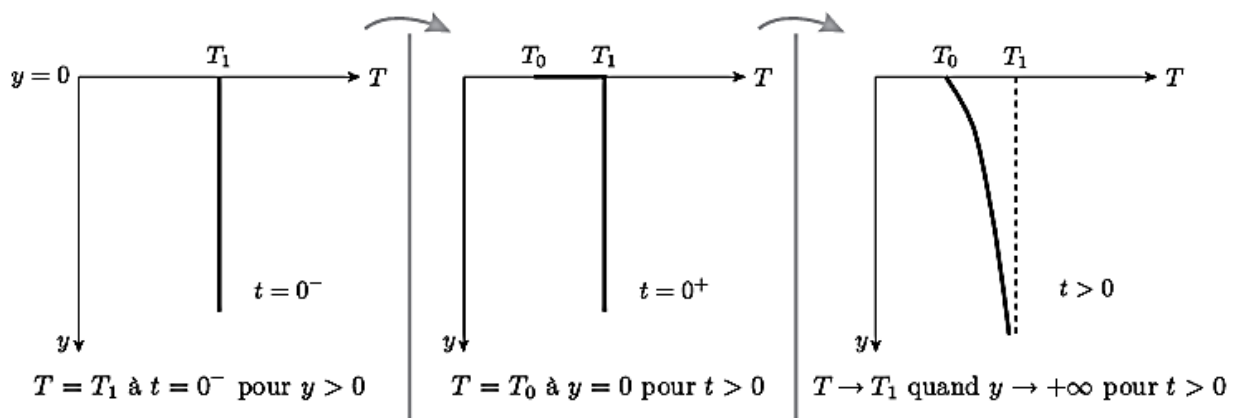


FIGURE 5 – Évolution de la température

Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire dS pendant dt , est noté $\delta\phi_Q$.

- – 24. Rappeler la définition du vecteur $\vec{j}_Q$, densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?
Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application.
En déduire la dimension de la conductivité thermique κ .

On étudie une tranche mésoscopique de sol de masse m de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c comprise entre y et $y + dy$ de surface S .

- – 25. Quelle est l'énergie thermique δQ reçue par cette tranche entre t et $t + dt$?
Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique » ?
Établir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\frac{\partial j_Q}{\partial y}$, S , dy et dt
puis en fonction de ρ , c , S , $\frac{\partial T}{\partial t}$, dy et dt .
En déduire l'équation de la chaleur à une dimension $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.
En déduire l'expression d'une longueur caractéristique L en fonction de D et du temps t .

On introduit la température adimensionnée

$$\theta(y, t) = \frac{T(y, t) - T_1}{T_0 - T_1}.$$

- – 26. Quelle est l'équation vérifiée par $\theta(y, t)$?
Déterminer les valeurs de $\theta(y > 0, t = 0)$, $\theta(y = 0, t > 0)$ et $\theta(y \rightarrow +\infty, t > 0)$.

On introduit une variable de similarité sans dimension $\eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}}$ et on suppose que θ n'est une fonction que de cette seule variable η .

- – 27. Montrer que

$$\frac{d^2\theta(\eta)}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta(\eta)}{d\eta} = 0.$$

- – 28. En utilisant la fonction $\varphi(\eta) = \frac{d\theta(\eta)}{d\eta}$, montrer que $\theta(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz$.

On donne $\int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire une expression de $T(y, t)$ faisant apparaître une intégrale.

La fonction $\chi \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\chi e^{-z^2} dz$ est appelée fonction d'erreur de GAUSS, elle est implémentée dans `scipy`.

Elle est souvent notée $\text{erf}(\chi)$. On peut l'appeler directement en utilisant la commande : `from scipy.special import erf`.

III.B Formation d'une croûte de lave solide.

Dans cette dernière partie on s'intéresse à une coulée de lave en fusion et à la formation d'une croûte solide à sa surface. On étudie alors l'augmentation de l'épaisseur de cette croûte en fonction du temps.

À la surface extérieure, en $y = 0$, la lave est en contact avec l'air à la température constante T_0 . La lave en fusion à la température T_f est donc soudainement portée à la température T_0 à $t = 0$. Dans ces conditions, la couche superficielle de la lave se solidifie, et on note $y_s(t)$ l'épaisseur de la couche de lave solide.

Nous devons donc résoudre l'équation de la chaleur dans l'espace $0 \leq y \leq y_s(t)$ avec comme conditions aux limites $T = T_0$ en $y = 0$, et $T = T_f$ en $y = y_s(t)$, et comme condition initiale $y_s = 0$ à $t = 0$.

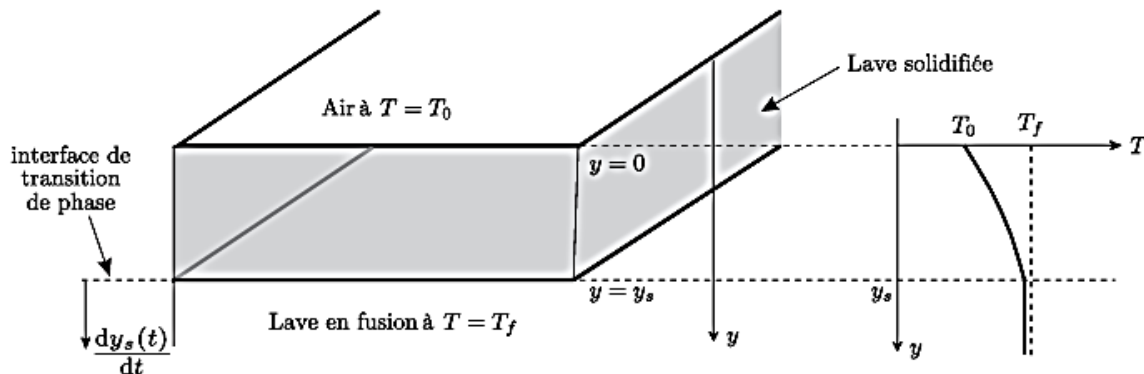


FIGURE 6 – Formation d'une croûte de lave solide

La position $y_s(t)$ de l'interface de transition de phase est une fonction a priori inconnue du temps. Comme dans la situation précédente il n'y a pas d'échelle de longueur définie dans ce problème. Pour cette raison, on travaillera également avec la variable de similarité sans dimension $\eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}}$.

On utilisera également la température adimensionnée

$$\theta(y,t) = \frac{T(y,t) - T_0}{T_f - T_0}$$

La profondeur de l'interface de solidification $y_s(t)$ doit enfin s'adapter à la longueur caractéristique de la diffusion thermique. Nous supposons que celle-ci varie proportionnellement à la racine carrée du temps, de telle sorte que : $\eta_s = \frac{y_s(t)}{2\sqrt{Dt}} = cte = \lambda$. Cette constante est inconnue et reste à déterminer.

- – 29. En reprenant l'équation de la question 27, montrer que

$$\theta(\eta) = \frac{\text{erf}(\eta)}{\text{erf}(\lambda)}.$$

Afin d'obtenir l'expression puis la valeur de la constante λ , nous allons étudier la solidification d'une tranche de lave d'épaisseur dy_s entre les instants t et $t + dt$

- – 30. Quelle est l'énergie δQ libérée par la solidification à la température T_f d'une tranche dy_s de lave de surface S en fonction de la masse volumique ρ de la lave en fusion et l'enthalpie de fusion massique : $\Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}$.
- – 31. Toute l'énergie libérée par la solidification doit être évacuée par diffusion dans la lave solide car la lave en fusion reste à la température T_f . Montrer que :

$$\rho \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) \frac{dy_s(t)}{dt} = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=y_s}$$

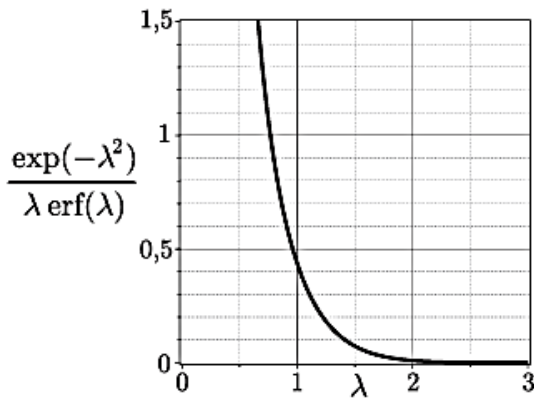


FIGURE 7 – Graphe de $\lambda \mapsto \frac{\exp(-\lambda^2)}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)}$

□ – 32. En déduire que

$$\frac{\exp(-\lambda^2)}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)} = \frac{\sqrt{\pi}}{c(T_f - T_0)} \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f).$$

□ – 33. Quel algorithme peut on utiliser pour obtenir la constante λ numériquement ?

Expliquer en quelques mots son fonctionnement.

On donne les valeurs numériques suivantes :

- $\Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) = 400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- $c = 1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- $T_f - T_0 = 1000 \text{ K}$
- $\rho = 2600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- $D = 7 \times 10^{-7} \text{ SI}$
- $\sqrt{\pi} \sim 1,77$

□ – 34. À l'aide de la figure 7, estimer la valeur numérique de λ .

En déduire l'épaisseur de la croûte de lave six mois après l'éruption.

Comparer votre résultat à ceux de la figure 8 tirés d'une expérience¹.

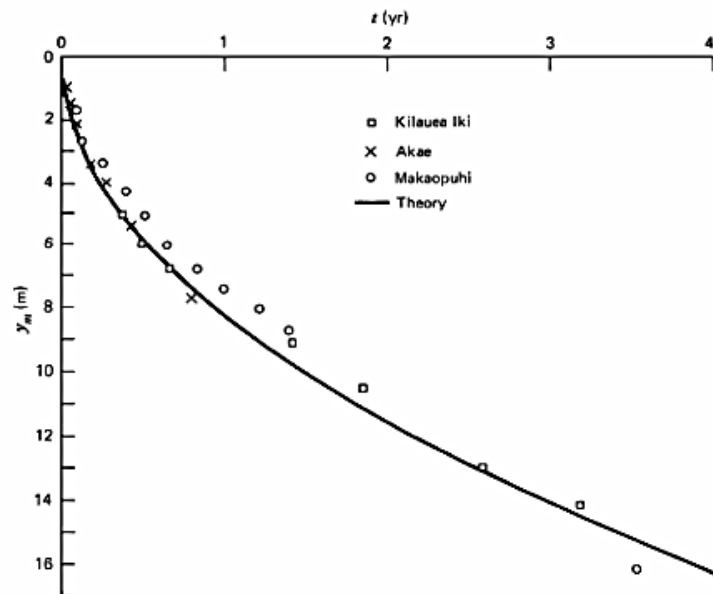


FIGURE 8 – Épaisseurs des croûtes de lave solides à la surface des lacs de lave dans les trois cratères à fosse Kilauea Iki (1959), Alae (1963) et Makaopuhi (1965) sur le volcan Kilauea, Hawaii (Wright et al., 1976), et résultat théorique.

1. Wright, T. L., Peck, D. L., and Shaw, H. R. (1976). Kilauea lava lakes : Natural laboratories for study of cooling, crystallization, and differentiation of basaltic magma. In *The Geophysics of the Pacific Ocean Basin and its Margin*, eds. G. H. Sutton, M. H. Manghnani, R. Moberly, and E. U. McAffee, vol. 19 of *Geophysical Monograph Series*, Washington, D.C. : American Geophysical Union, pp. 375–90

Ex 4 : Oscillations au sein de l'atome de Thomson

Données

- Masse d'un électron : $m_e \approx 10^{-30} \text{ kg}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- La permittivité du vide ϵ_0 est telle que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 10^{10} \text{ SI}$ et $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \approx 2 \cdot 10^{-28} \text{ J} \cdot \text{m}$

Afin de donner une vision classique de l'émission d'un atome préalablement excité, nous allons étudier la réponse mécanique d'un électron à une excitation de l'atome.



Le modèle de l'atome d'hydrogène adopté ici est celui élaboré par Joseph Thomson (photo ci-contre), prix Nobel en 1906 pour avoir découvert l'électron en 1897. Il proposa en 1904 un modèle dit du « pudding aux électrons ».

Il s'agit :

- d'une boule de centre O et de rayon a , avec $a \approx 10^{-10} \text{ m}$, uniformément chargée en volume, de densité volumique de charge (uniforme à l'intérieur de la boule) notée ρ , de charge totale $+e$, considérée tout d'abord immobile dans le référentiel du laboratoire,
- et d'un électron ponctuel (masse m , charge $-e$) libre de se déplacer sans frottement dans l'espace de la boule.

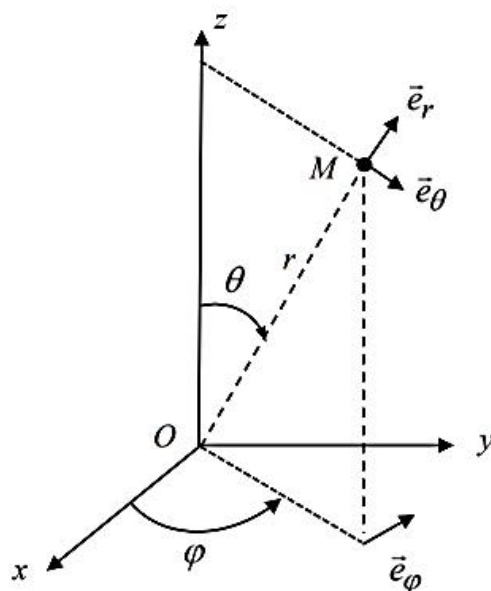


Figure 1 – Coordonnées et base sphériques

La position d'un point M de l'espace est parfois repérée par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) (sur la base $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$), ou par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) , associées à la base $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

II.1 - Force électrostatique ressentie par l'électron

Q2. Donner l'expression de la densité volumique de charge ρ .

Soit M un point quelconque de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques : $M(r, \theta, \varphi)$.

Q4. Déterminer en tout point M intérieur à la boule, le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par la distribution de charge caractérisée par ρ .

L'électron se situe en un point $M(r, \theta, \varphi)$ **intérieur à la boule**. On le repère par son vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$. On suppose ici l'atome isolé et on néglige toute attraction gravitationnelle.

Q5. Donner la force ressentie par l'électron. Mettre cette force sous la forme $\vec{F} = -m_e \omega_0^2 \overrightarrow{OM}$ où on donnera l'expression de ω_0 . Commenter l'expression de cette force.

II.4 - Modélisation du mouvement de l'électron par une méthode numérique

La position instantanée $r(t)$ de l'électron dans le repère défini sur la **figure 1** vérifie une équation différentielle dont la difficulté de résolution dépend de la modélisation physique choisie. Pour résoudre des équations différentielles complexes, on peut utiliser une méthode numérique. Pour illustrer cette méthode de résolution, on considère que $r(t)$ obéit à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + 2\lambda \cdot \frac{dr}{dt} + \omega_0^2 \cdot r = 0$$

avec λ et ω_0^2 des constantes positives non nulles.

L'objectif est d'obtenir une représentation graphique de la fonction $r(t)$, la plus proche possible de la réalité.

On utilise une méthode numérique simple (connue sous le nom de « méthode d'Euler explicite ») que l'on programme en langage PYTHON.

Dans ce langage :

- la fonction `np.arange(N)` renvoie une liste de nombres entiers compris entre 0 et N-1, de type « array ».
- la fonction `np.zeros(N)` renvoie une liste de N valeurs toutes nulles, de type « array ».

Pour des raisons de commodité, les valeurs numériques utilisées ne correspondent pas à la réalité physique ; les valeurs obtenues pour $r(t)$ seront donc arbitraires (en revanche la forme de la courbe est réaliste).

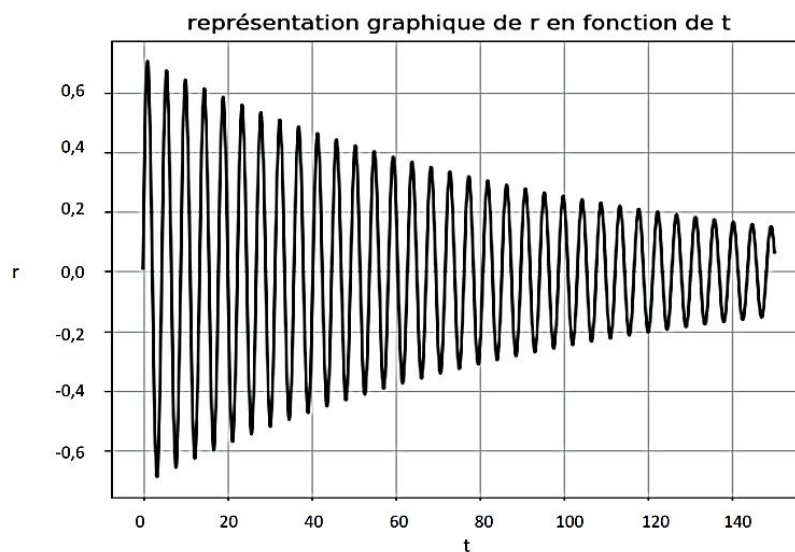
Le programme est le suivant :

```
1 import numpy as np
2 from matplotlib import pyplot as plt
3
4 T=150
5
6 omega = 1.4
7 lamda = 0.03
8
9 def euler(N,x0,v0):
10     x = x0
11     v = v0
12     h = T/N
13     a = -2*lamda*v-omega*omega*x
14     tab_1 = np.zeros(N)
15     tab_2 = np.zeros(N)
16     for i in range(N):
17         (x,v,a)=(x+v*h,v+a*h,-2*lamda*v-omega*omega*x)
18         tab_1[i] = x
19         tab_2[i] = v
20     return tab_1
21
22 def temps(N):
23     h=T/N
24     t = np.arange(N)*h
25     return t
26
27 plt.figure('graphique')
28 plt.plot(temps(15000),euler(15000,0,1),'b')
29 plt.title("représentation graphique de r en fonction de t")
30 plt.xlabel("t")
31 plt.ylabel("r")
32 plt.grid()
33 plt.show()
```

L'exécution de ce programme permet d'obtenir la **courbe** $r(t)$ ci-dessous (les échelles sont arbitraires).

Q14. Décrire, en détaillant les étapes, comment l'algorithme utilisé permet, connaissant les valeurs de la fonction $r(t_n)$ et de sa dérivée $\frac{dr}{dt}(t_n)$ à une date t_n , de calculer ces mêmes valeurs à une date notée t_{n+1} .

Quelle approximation est faite ?



Q15. Afin de tester la fonction *euler*, nous exécutons l'instruction « *euler(3,0,1)* ». Que retourne cette instruction ?

Q16. Les lignes 16 à 19 contiennent une boucle itérative dans laquelle la commande « *for* » est utilisée. Modifier ces lignes de façon à utiliser la commande « *while* » en créant une boucle conditionnelle. La partie de programme écrite avec la boucle « *while* » doit produire exactement les mêmes résultats que la portion de code qu'elle remplace.

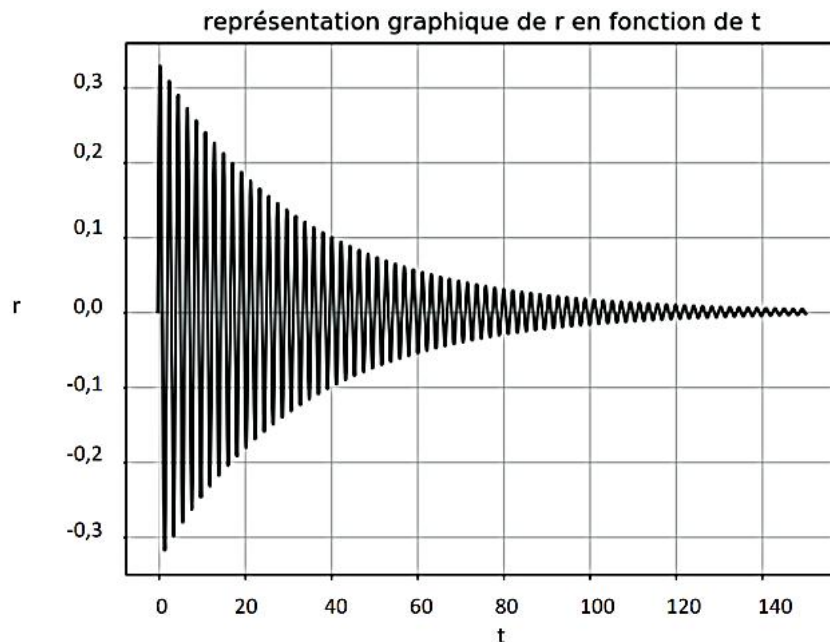
Afin de tester la méthode d'Euler, on rajoute les lignes de code suivantes, qui permettent de tracer la courbe donnant la solution exacte de la solution de l'équation différentielle.

Le programme modifié est donné ci-après (à partir de la ligne 27).

Les lignes 1 à 26 ne sont pas modifiées.

```
27 | omega = # à compléter (voir Q17)
28 | def vraie(N,v0):
29 |     x=0
30 |     v=v0
31 |     h=T/N
32 |     tab_3=temps(N)
33 |     for i in range(N):
34 |         tab_3[i]=np.sin(np.sqrt(omega*omega-lamda*lamda)*h*i)
35 |         *np.exp(-lamda*h*i)*v/(np.sqrt(omega*omega-lamda*lamda))
36 |     return tab_3
37 | plt.figure('graphique')
38 | plt.plot(temps(15000),vraie(15000,1),'b')
39 | plt.title("représentation graphique de r en fonction de t")
40 | plt.xlabel("t")
41 | plt.ylabel("r")
42 | plt.grid()
43 | plt.show()
```

L'exécution de ce programme donne la courbe $r(t)$ ci-dessous (les échelles sont arbitraires) :



Q17. En exploitant la courbe, déterminer la valeur de la variable « *omega* » masquée à la ligne 27.

Q18. La méthode d'Euler donne-t-elle une solution satisfaisante ?

-- FIN DE L'ENONCE --