TP 4C' – Electronique numérique

Problématique : En quoi la numérisation affecte-t-elle un signal ? Quelles conditions sont à respecter pour minimiser la perte d'informations lors de la numérisation ?

Compétences expérimentales au programme :

Analyse spectrale. Échantillonnage, fréquence d'échantillonnage. Conséquences expérimentales du théorème de Nyquist-Shannon.	Réaliser l'échantillonnage d'un signal. Commenter la structure du spectre du signal obtenu après échantillonnage. Mettre en évidence le phénomène de repliement du spectre provoqué par l'échantillonnage avec un oscilloscope numérique ou une carte d'acquisition. Choisir les paramètres d'une acquisition numérique destinée à une analyse spectrale afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon, tout en optimisant la résolution spectrale.
Électronique numérique. Filtrage numérique.	Mettre en œuvre un convertisseur analogique/numérique et un traitement numérique afin de réaliser un filtre passe- bas ; utiliser un convertisseur numérique/analogique pour restituer un signal analogique. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, simuler un filtrage numérique et visualiser son action sur un signal périodique.

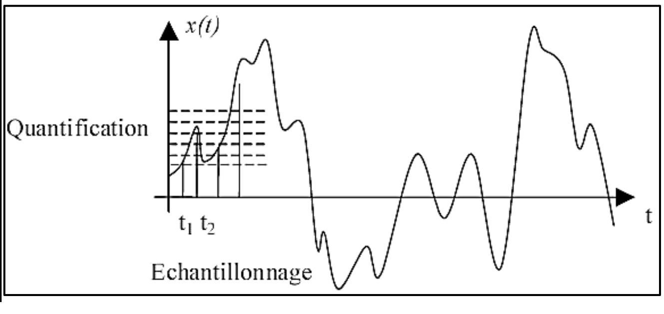
Objectifs :
1. Mettre en évidence l'influence de la fréquence d'échantillonnage et énoncer la condition de Nyquist-Shannon.
2. Comprendre le principe de la quantification (pas de conversion / résolution en tension).
3. Mettre en œuvre un filtre numérique.

A faire pour la séance de TP :
Lire entièrement le sujet et répondre aux questions ✏.

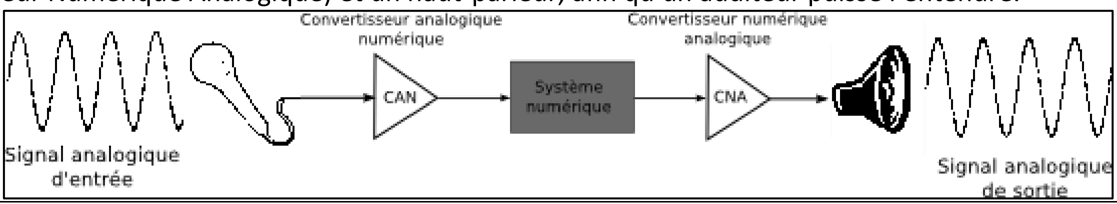
INTRO – Principe de la numérisation d'un signal

Les grandeurs physiques sont de natures diverses : P, T, pH… Lorsqu'on veut les traiter, on commence par **les convertir en un signal électrique via un capteur**. Comme la grandeur physique de départ dépend généralement du temps, le signal électrique obtenu est une fonction continue du temps : $x(t)$. Le signal $x(t)$ est qualifié d'**analogique** par opposition aux signaux **logiques/numériques**.
Lorsqu'on souhaite transmettre de l'information (voix, image…), ou la stocker ou la travailler, le format analogique devient vite limitant et/ou peut poser des problèmes de reproductibilité. Il est donc souvent nécessaire de **numériser le signal analogique** i.e. de le **convertir en un signal numérique**. Numériser $x(t)$ sur une durée finie permet de passer d'un **ensemble non dénombrable de valeurs réelles** à **un ensemble fini de valeurs numériques**, représentées par une succession de « 0 » et de « 1 ».

La conversion analogique → numérique d'un signal correspond à la succession de 2 étapes :
- **l'échantillonnage** qui permet de prélever un ensemble de valeurs prises à des instants discrets : $\{t_k = kT_e = k/f_e\}$ avec f_e la fréquence d'échantillonnage,
- la **quantification** qui alloue à chacun de ces échantillons une valeur approchée car codée sur un nombre entier n de bits.



Ex : Dans la chaîne ci-dessous, on dispose initialement d'un son analogique que l'on enregistre via un microphone et un **CAN** (Convertisseur Analogique Numérique). Ce signal numérique peut subir divers traitements à travers un système numérique. Enfin, le signal numérique traité est restitué en signal sonore analogique, via un **CNA** (Convertisseur Numérique Analogique) et un haut-parleur, afin qu'un auditeur puisse l'entendre.



A) Echantillonnage

1) Principe

Le principe de l'échantillonnage est le suivant :
Le CAN génère une tension $w(t)$ (cf fig.1) avec T_e la période d'échantillonnage et τ une durée très faible devant T_e. Soit k un entier, $w(t)$ est tel que si $t \in [kT_e, kT_e + \tau]$ alors $w(t) = 1$, sinon $w(t) = 0$. Pour $\tau \to 0$, $w(t) = 1$ ssi $t = kT_e = t_k$ (cf intro p.1) : on parle de peigne de Dirac.
On veut convertir le signal analogique $x(t)$ représenté en pointillés sur la fig.2. Le signal enregistré par le CAN est $x_e(t) = x(t).w(t)$. **Pour $\tau \to 0$,** $x_e(t) = \{x(0), x(T_e), x(2T_e), \dots\}$ i.e. que le signal $x_e(t)$ est un ensemble dénombrable de valeurs réelles.

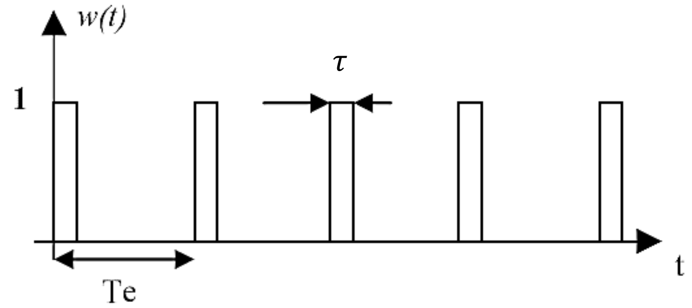


Fig.1

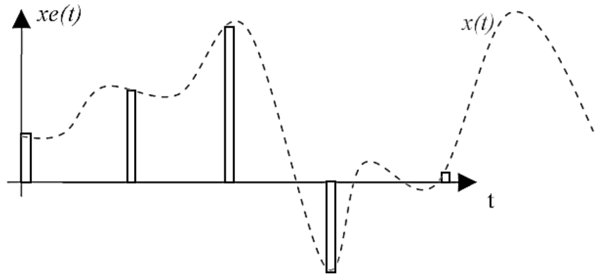
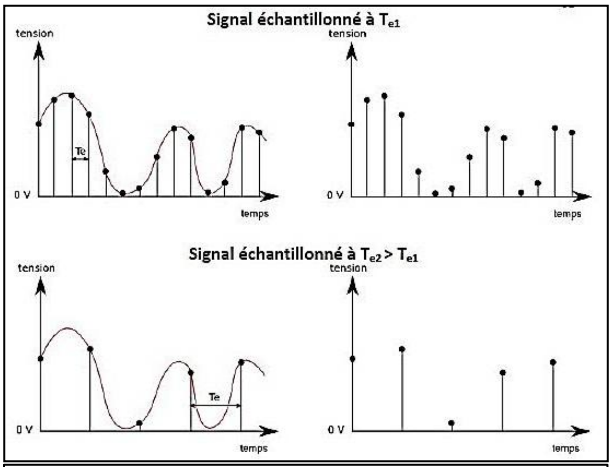


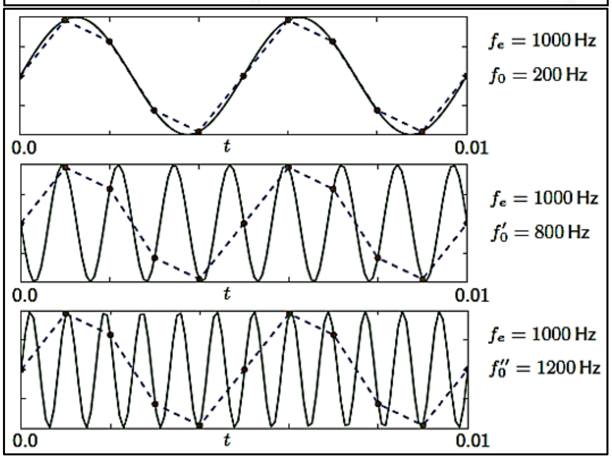
Fig.2

♦ Exemples d'échantillonnage d'un signal avec deux fréquences d'échantillonnage différentes : $f_{e2} < f_{e1}$.

Dans le 1er exemple, la fréquence d'échantillonnage choisie permet de reproduire les variations du signal. Ce qui n'est pas le cas du 2e exemple : il est clair que les échantillons recueillis ne sont pas suffisants pour reconstruire le signal d'origine.



♦ Exemples de 3 signaux analogiques différents donnant lieu au même signal échantillonné :
On représente en trait plein les signaux analogiques et en pointillés les signaux échantillonnés.



CCL du § A :
f_e doit être maximale pour que le signal échantillonné soit fidèle au signal de départ.
En pratique, les dispositifs d'acquisition sont **limités en fréquence** et **un nombre d'échantillons trop élevé peut poser problème** : temps de calcul, volume de stockage de données...
Dans la suite, on introduit une valeur minimale de f_e en dessous de laquelle, la numérisation pose problème.

2) Choix de la fréquence d'échantillonnage – Analyse spectrale d'un signal échantillonné

a) Paramètres temporels d'acquisition

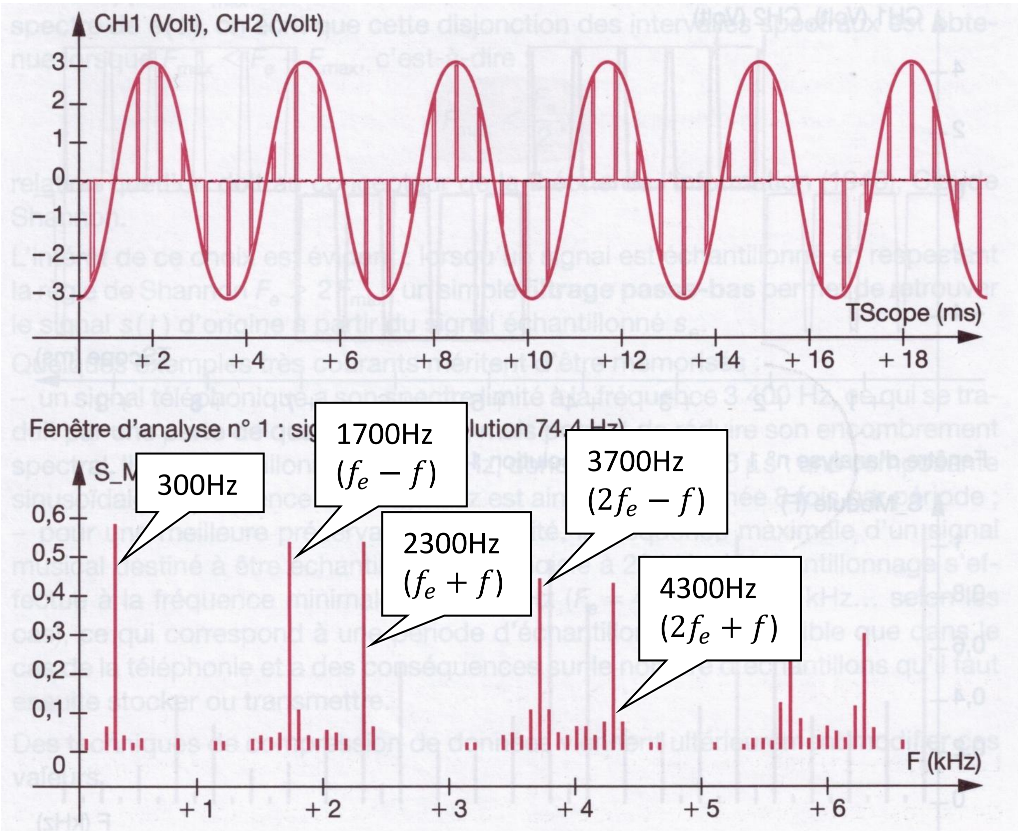
Pour réaliser une acquisition, il faut choisir :
- la durée totale d'acquisition, notée Total
- la période d'échantillonnage, notée T_e
- le nombre de points, noté Points

✐➲ 1. Rappeler la relation entre ces 3 grandeurs.

b) Fréquences répliquées – Condition de Nyquist-Shannon

♦ Les oscillogrammes ci-dessous correspondent à un signal sinusoïdal $x(t)$ de fréquence $f = 300\ Hz$ échantillonné à la fréquence $f_e = 2\ kHz$.

Dans le spectre du signal échantillonné x_e(t), on retrouve la fréquence fondamentale $f = 300\ Hz$ du signal $x(t)$. Cependant, l'opération d'échantillonnage fait apparaitre d'autres fréquences : à 1700 Hz et à 2300 Hz, soit $f_e - f$ et $f_e + f$; et autour des multiples de la fréquence d'échantillonnage f_e : $nf_e - f$ et $nf_e + f$ avec n entier.



→ Interprétation mathématique des fréquences répliquées :

Le signal $w(t)$, de période T_e et de fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$, est décomposable en série de Fourier :

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_e t)$$

Soit un signal analogique $x(t)$ sinusoïdal :

$$x(t) = A\cos(2\pi f t)$$

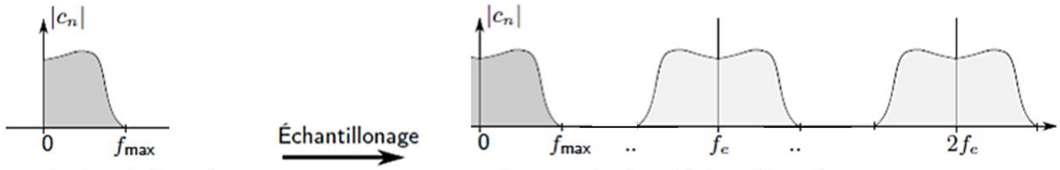
On a

$$x_e(t) = x(t).w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos(2\pi n f_e t) \,.\, A\cos(2\pi f t)\right)$$

Avec

$$a_n \cos(2\pi n f_e t) \,.\, A\cos(2\pi f t) = a_n . A . \frac{1}{2} . \big(\cos(2\pi(nf_e + f)t) + \cos(2\pi(nf_e - f)t)\big)$$

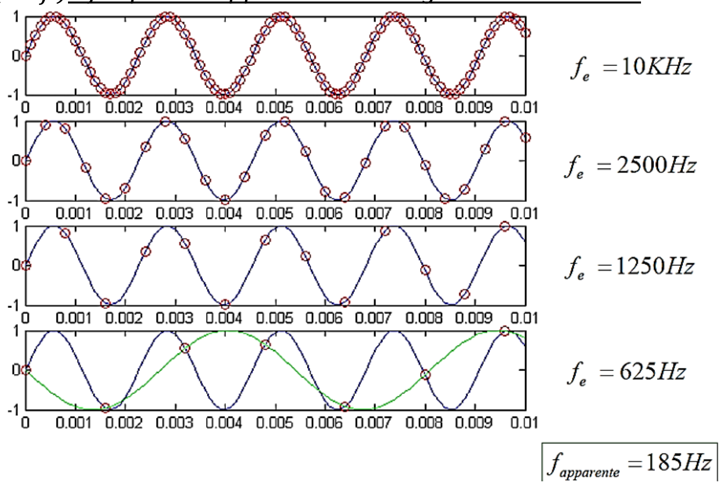
Ainsi le fait de multiplier le signal sinusoïdal $x(t)$ par l'harmonique de rang n du signal $w(t)$ engendre un **<u>décalage et un dédoublement de sa fréquence f autour de nf_e</u>** : il s'agit des **<u>fréquences répliquées</u>**.
Ce résultat se généralise à tout signal analogique $x(t)$ ainsi l'allure du spectre du signal échantillonné $x_e(t)$ sera de la forme suivante :



Spectre du signal d'entrée *Spectre du signal échantillonné*

<u>→ Interprétation graphique de la fréquence répliquée $(f_e - f)$: fréquence apparente d'un signal échantillonné</u>

On échantillonne un signal sinusoïdal correspondant au La-440, à différentes fréquences d'échantillonnage :



♦ Ces fréquences répliquées ne viennent pas empiéter sur le spectre originel du signal d'entrée ssi :

$f_e - f_{max} > f_{max}$ où f_{max} est la fréquence maximale du spectre du signal

soit $\boldsymbol{f_e > 2f_{max}}$.

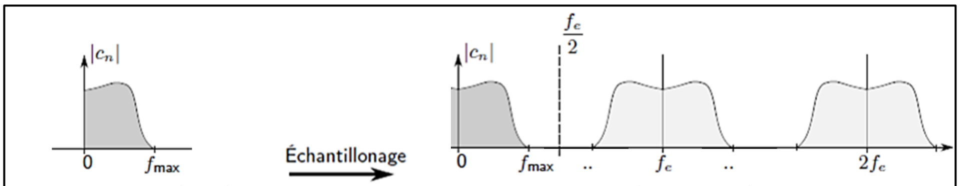
<u>A RETENIR : Condition de Nyquist-Shannon :</u>

Au spectre du signal d'entrée, viennent s'ajouter des raies spectrales obtenues pas réplication des raies précédentes autour de valeurs multiples de la fréquence d'échantillonnage.
Ces fréquences répliquées n'empiètent pas sur le spectre originel du signal d'entrée ssi la **<u>CONDITION DE NYQUIST-SHANNON</u>** est respectée :

$$\boxed{\boldsymbol{f_e > 2f_{max}}}$$

Si $f_e > 2f_{max}$, un filtrage passe–bas de fréquence de coupure f_c telle que $f_{max} < f_c < \frac{f_e}{2}$ permet de retrouver le signal d'origine à partir du signal échantillonné.

Exemple d'échantillonnage qui respecte la condition de Nyquist-Shannon :



Spectre du signal d'entrée *Spectre du signal échantillonné*

Intervalle de fréquences du spectre sous Latis Pro :

✋ Réaliser l'acquisition sur Latis Pro d'un signal sinusoïdal de fréquence $f = 400\ Hz$ en choisissant une fréquence d'échantillonnage $f_e = 10\ kHz$ et 10^3 points.

✏➲ 2. La condition Nyquist-Shannon est-elle respectée ?

✋ Réaliser le spectre du signal via l'onglet « traitements » puis « calculs spécifiques » et « Analyse de Fourier ».

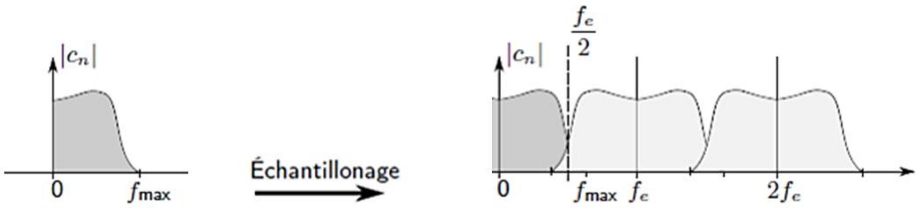
Le logiciel propose différents intervalles d'affichage en fréquence.

➲ 3. Pourquoi l'intervalle par défaut est-il : 0 à Fe/2 ?

c) Repliement du spectre

Si la condition de Nyquist-Shannon n'est pas respectée, les fréquences répliquées viennent empiéter sur le spectre originel du signal d'entrée : on parle de <u>REPLIEMENT SPECTRAL</u> (aliasing en anglais).

Exemple d'échantillonnage qui ne respecte pas la condition de Nyquist-Shannon :



Spectre du signal d'entrée *Spectre du signal échantillonné*

<u>Mise en évidence du repliement spectral</u> :

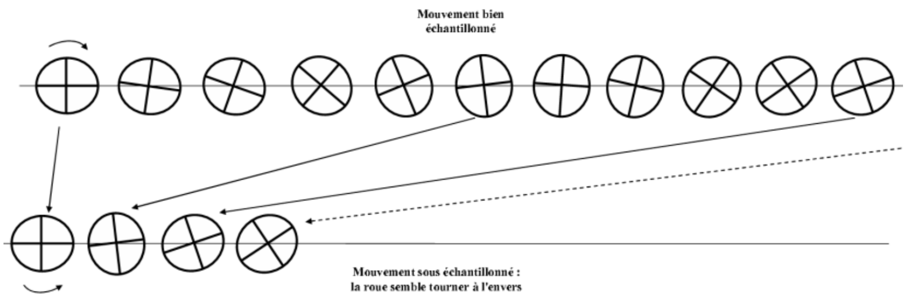
➲ 4. Réaliser l'acquisition sur Latis Pro d'un signal sinusoïdal de fréquence $f = 1kHz$ délivrée par le GBF en choisissant une fréquence d'échantillonnage de $f_e = \frac{4}{3}f$ (durée de l'acquisition : 100 ms). Commenter.

<u>Solution : Filtre anti-repliement</u>

Si on est limité en fréquence d'échantillonnage et que la condition de Nyquist-Shannon ne peut pas être vérifiée alors il faut filtrer le signal **en amont**, i.e. avant de le numériser, avec un filtre passe bas tel que $f_c < \frac{f_e}{2}$. Evidemment, la perte des hautes fréquences du spectre peut entraîner une perte d'informations.

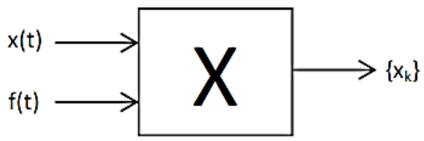
<u>Rq</u> : On peut mettre en évidence le phénomène de repliement spectral en regardant le film d'une roue de charrette qui tourne. On voit souvent apparaître une vitesse de rotation différente de la vitesse d'avancement réelle de la charrette. Parfois même, la roue semble aller en sens inverse.

Cela est dû au fait qu'un film est un échantillonnage d'un phénomène continu : 25 photos prises par seconde. Ainsi, il y a repliement spectral pour les phénomènes périodiques de fréquence supérieure à 12 Hz.

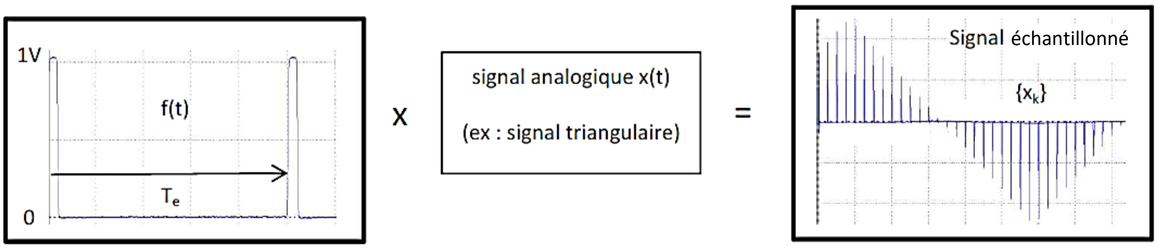


3) Réalisation d'un échantillonnage « analogique » - Mise en évidence des fréquences répliquées

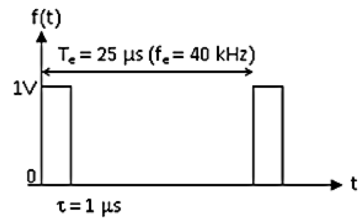
Le principe de l'échantillonnage analogique consiste à multiplier le signal $x(t)$ par un train d'impulsions $f(t)$ de fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$ qui correspond à la fréquence d'échantillonnage, cf § A.1.



Ex :



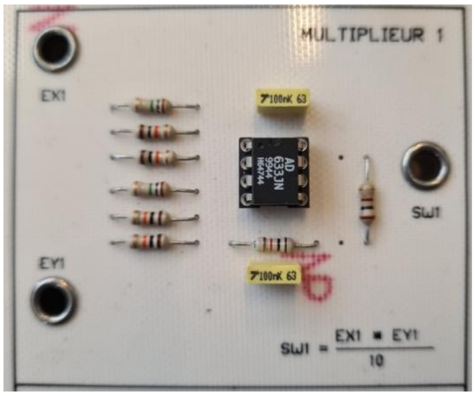
✋ Régler un des GBF pour qu'il délivre le train d'impulsions : fonction « pulse », fréquence $f_e = 40$ kHz, durée de l'impulsion $\tau = 1\ \mu s$, tension minimale = 0 V et tension maximale = 1 V.



✋ Régler le 2^{e} GBF pour qu'il délivre le signal $x(t)$ à échantillonner : signal triangulaire de fréquence $f = 1$ kHz, de valeur moyenne nulle, d'amplitude maximale (accessible avec le GBF).

✋ Utilisation du multiplieur :

- **Alimenter la plaquette en $\pm$ 15 V, relier la borne 0 V de l'alimentation stabilisée à la masse du GBF.**
- Connecter le train d'impulsions $f(t)$ sur la voie EX1 et signal $x(t)$ à échantillonner sur la voie EY1.
- Le signal échantillonné $\{x_k\}$ correspond à la borne de sortie SW1.



✋ Visualiser sur l'oscilloscope :

- le signal $x(t)$ à échantillonner sur la voie 1 ;
- le train d'impulsions $f(t)$ sur la voie 2 ;
- le signal échantillonné $\{x_k\}$ sur la voie 3.

✋ Acquérir le signal échantillonné sur Latis Pro : N = 4000, T_e = 500 ns et Total = 2 ms.

✋ Faire le spectre du signal échantillonné.

➲ 5. Analyser les fréquences présentes dans le spectre (cf § A.2.b). Y a-t-il repliement spectral dans ce cas ?

B) Quantification

On appelle **pas de quantification** ou **pas de conversion** ou **résolution en tension** d'un CNA l'écart (en volt) entre deux valeurs binaires successives. On le note r dans la suite.

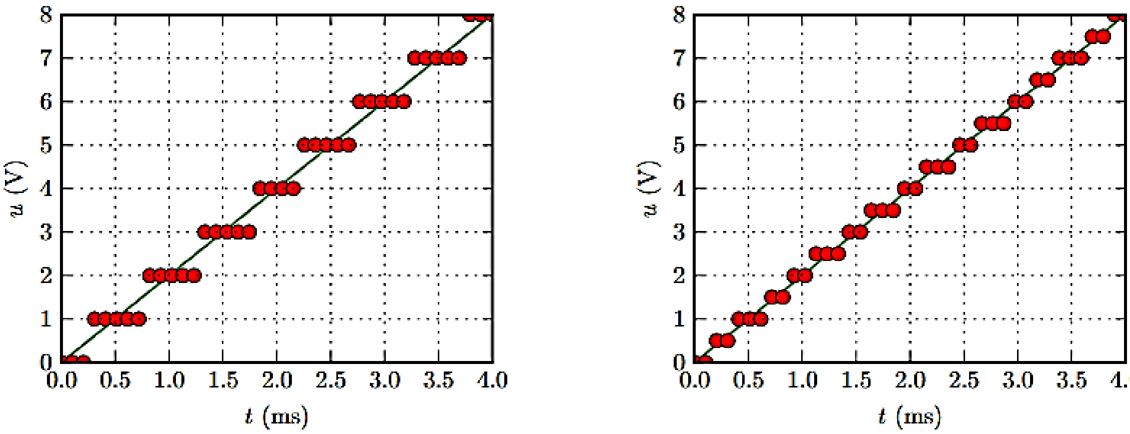


Figure 8 – Deux exemples de numérisation d'une même tension. Le signal analogique est représenté en trait plein bleu, le signal numérisé par les points . Dans les deux cas la période d'échantillonnage est de 0,1 ms. Sur la figure de gauche le pas de quantification vaut 1 V alors qu'il vaut 0,5 V sur la figure de droite.

1) Principe des conversions NA et AN – Réseau $R - 2R$

On dispose d'une platine de conversion AN-NA constituée d'un réseau $R - 2R$:

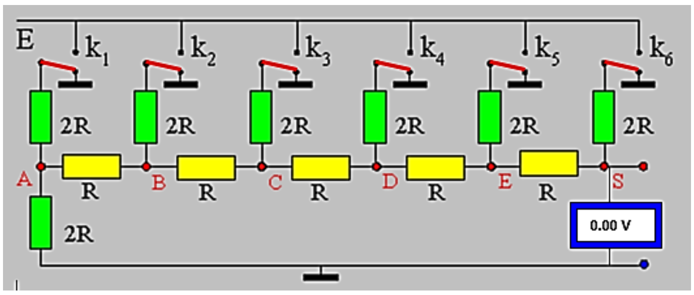


Schéma d'un réseau $R - 2R$ à 6 bits

http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electro/cnar2r.html

E est une tension de référence, pour la platine étudiée, $E = 5{,}12\ V$.

a) Conversion numérique analogique

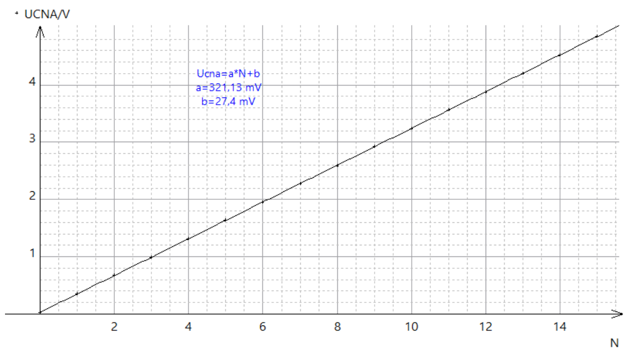
Selon l'état des interrupteurs k_i (fermé sur la ligne de masse ou fermé sur la ligne de potentiel E), on obtient une tension différente en sortie.

L'état fermé sur la ligne de masse correspond au bit 0 et l'état fermé sur la ligne de potentiel E correspond au bit 1.

L'interrupteur noté k_1 sur la figure ci-dessus correspond au bit de poids le plus faible.

Avec un CNA 4 bits, on peut générer 2^4 = 16 valeurs différentes de tension en sortie entre 0 V et $U_{CNA\,max}$, cf graphe ci-contre.
Comme en témoigne la modélisation de la courbe, le CNA étudié est linéaire. La pente de la droite correspond à r la « résolution en tension » du CNA.
On peut vérifier que :

$$r = \frac{E}{2^4} \quad et\ U_{CNA\,max} = E - r$$



Rq : ces relations sont valables pour un réseau $R - 2R$ de n bits avec n entier naturel quelconque.

b) Conversion analogique numérique

Il s'agit de comparer la tension analogique U à convertir à la tension de sortie U_{CNA} du réseau $R - 2R$.
On dispose ici de deux modes de conversion AN.

i) Mode simple rampe

U_{CNA} est générée linéairement bit par bit.
La conversion est terminée dès que $U_{CNA} > U$.

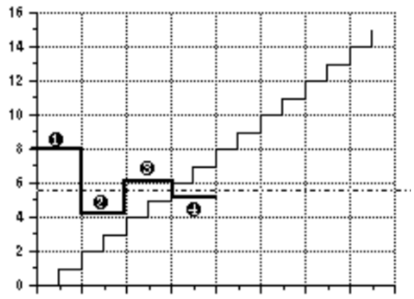
ii) Mode approximations successives

U_{CNA} est générée par dichotomie :

U est d'abord comparée à $\frac{U_{CNA\,max}}{2}$:

Si $U < \frac{U_{CNA\,max}}{2}$ alors U est comparée à $\frac{U_{CNA\,max}}{2} - \frac{U_{CNA\,max}}{4}$ …

Si $U > \frac{U_{CNA\,max}}{2}$ alors U est comparée à $\frac{U_{CNA\,max}}{2} + \frac{U_{CNA\,max}}{4}$ …



en pointillés tension U analogique à convertir
en trait fin tension U_{CNA} générée bit par bit (mode simple rampe)
en trait gras tension U_{CNA} générée par dichotomie (mode approximations successives)

Pour un convertisseur n bits, la conversion par dichotomie nécessite n étapes quelle que soit la valeur de la tension U analogique à convertir.
La conversion par simple rampe a une durée qui dépend de la valeur de la tension U analogique à convertir et elle est moins efficace que la conversion par dichotomie.

2) Etude de la conversion AN réalisée par la carte d'acquisition

→→→ A faire en dernier s'il vous reste du temps.

On se propose de déterminer le nombre de bits de la conversion AN réalisée par la carte d'acquisition EuroSmart en étudiant le signal numérique associé à un signal analogique continu.

L'échantillonnage est suivi par l'opération de quantification. On considère une conversion AN telle que les tensions sont codées sur n bits.
On note C le calibre choisi pour acquérir les tensions : la tension maximale que l'on peut acquérir vaut $+C$ et la tension minimale que l'on peut acquérir vaut $-C$. On note r la « résolution en tension » du CAN ou « pas de conversion », il s'agit de l'écart minimal entre deux valeurs possibles de tension.

✐➲ 6. Exprimer r en fonction de C et n.

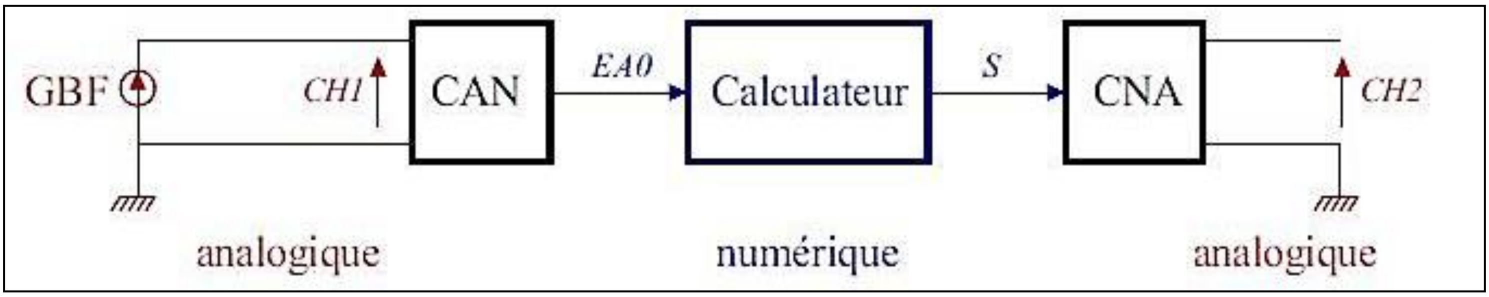
➲ 7. Réaliser l'acquisition d'un signal continu délivré par le GBF sur Latis Pro (période d'échantillonnage de 4 µs et durée d'acquisition de 1 s). Zoomer fortement sur une partie des points acquis pour visualiser et mesurer le pas de conversion r.

➲ 8. Sachant que le calibre de la carte EuroSmart est imposé à $\pm$ 10 V, déterminer le nombre de bits n de la conversion AN réalisée par la carte d'acquisition. La notice de la carte d'acquisition précise qu'elle est constituée d'un CAN 12 bits. Votre résultat expérimental est-il compatible avec cette information ?

C) Filtrage numérique avec la carte d'acquisition

L'un des principaux intérêts de la numérisation d'un signal est la simplicité d'un traitement numérique comparé à un traitement analogique : les tâches peuvent être plus complexes et plus facilement modifiables : changer la valeur d'une variable dans un programme est bien plus simple que de changer de composant électronique !
Une fois traité, le signal numérique peut être de nouveau converti en signal analogique par un CNA.

On se propose de numériser un signal, le filtrer numériquement (passe-bas) puis de le reconvertir sous forme analogique avec la carte Eurosmart.



CAN (convertisseur analogique **numérique**) : Entrée **EA0**
CNA (convertisseur **numérique** analogique) : Sortie **S**

a) Algorithme de filtrage

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas s'écrit sous forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\omega\tau}$$

Dans la suite, on prendra $H_0 = 1$ et $f_c = \frac{1}{2\pi\tau} = 100\ Hz$.

✐➲ 9. Donner l'équation différentielle entre les signaux de sortie $s(t)$ et d'entrée $e(t)$, nommé EA0 avec la carte.

Pour transformer cette relation différentielle en une équation sur les échantillons $s_n = s(t_n = nT_e)$ avec T_e la période d'échantillonnage, il faut approximer la dérivée $\frac{ds}{dt}$.
La correspondance qui permet de passer d'un filtre analogique à un filtre numérique n'est pas unique. Le plus simple est d'utiliser le schéma d'Euler explicite, le pas de temps étant égal à la période d'échantillonnage.
✐➲ 10. Donner l'expression approchée de la dérivée en fonction de la période d'échantillonnage T_e et des échantillons s_n et s_{n+1}.
✐➲ 11. En déduire une relation de récurrence permettant de calculer s_{n+1} à partir de $e_n = e(t_n = nT_e)$ et $s_n = s(t_n = nT_e)$.
Ainsi, on peut construire point par point le signal numérique s à partir de e.

b) Mise en œuvre – implémentation de l'algorithme sous Latis Pro

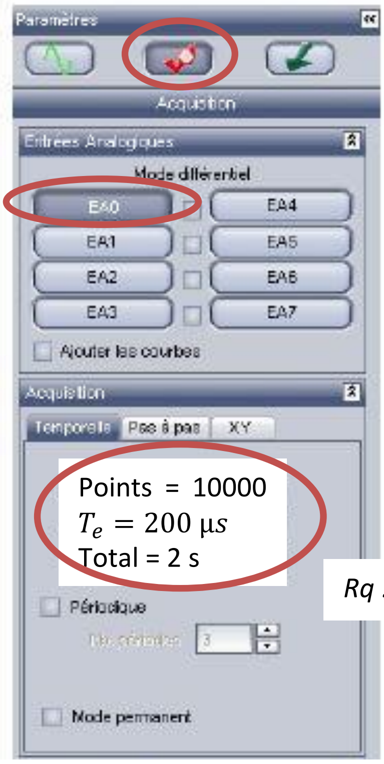
✋ Ouvrir une feuille de calcul via l'onglet « Traitement » et écrire le programme suivant :

```
Te=2e-4
fe=1/Te
fc=100
tau=1/(2*3.14*fc)
S=Table(0)
S=S[n-1]+Te/tau*(EA0[n-1]-S[n-1])
```

✋ Régler le GBF pour qu'il délivre un signal sinusoïdal de valeur moyenne nulle, d'amplitude 2 V et de fréquence $f = 10$ Hz dans un 1er temps. Visualiser ce signal à l'oscilloscope (CH1) et acquérir ce signal sur l'entrée EA0 de la carte d'acquisition qui le convertit en signal numérique.

On règle l'acquisition comme ci-contre.

La sortie numérique S peut être visualisée sur Latis Pro. La sortie **analogique** correspondante est visualisée en connectant la voie CH2 de l'oscilloscope à la sortie SA1 de la carte d'acquisition.



$Rq : T_e \ll \tau \ll Total$

➲ 12. Faire l'acquisition pour une fréquence du GBF $f = 10$ Hz. Observer sur Latis Pro les signaux numériques EA0 et S. Vérifier que, comme pour un filtre analogique, le régime permanent s'établit au bout d'un certain temps (quelques τ).

➲ 13. Lancer l'acquisition pour un signal d'entrée de fréquence f = 10 Hz puis 100 Hz puis 500 Hz et 4930 Hz. Pour chaque fréquence, commenter les signaux obtenus.

NB : On reviendra sur le filtrage numérique au TD/DM.

D) Synthèse sur le choix des paramètres d'acquisition

➲ 14. Compléter le bilan ci-dessous.

Choix de la durée d'acquisition :

→ Pour un signal dont on connaît la période T :

Choix de la fréquence d'échantillonnage :

→ Pour un signal sinusoïdal de fréquence f :

Plus elle est élevée, meilleure sera l'image du signal mais cela peut poser problème (volume de stockage de données…).

→ Pour un signal quelconque dont le spectre est borné en fréquence par f_{max} :

La **condition de Nyquist-Shannon** doit être respectée :

Si le signal d'entrée et le dispositif d'acquisition ne permettent pas de le vérifier, la solution est :

Rq : Le traitement numérique peut imposer d'autres contraintes.

Choix du calibre :

Plus il est faible, meilleur sera le pas de quantification et donc la résolution (en volt) du signal mais s'il est trop faible il y aura saturation pour les valeurs élevées.

→ Il faut donc choisir le calibre C :