

Contenu :

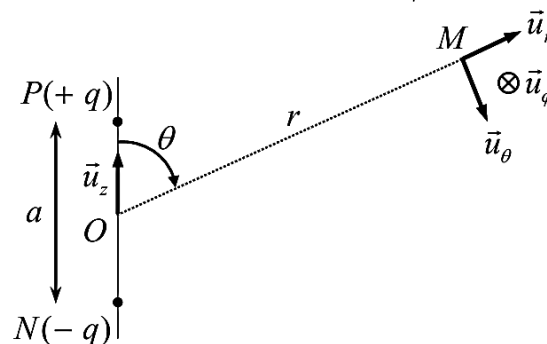
Ex 1 : Le gecko.....	1
<i>Dipôle électrostatique et mécanique</i>	
Ex 2 : Hygromètres capacitifs	5
<i>Electrostatique</i>	

Ex 1 : Le gecko

Le gecko est un petit lézard capable de se déplacer à des vitesses de plusieurs mètres par seconde sur les murs ou les plafonds de pratiquement toutes natures, dans presque toutes les conditions. Des expériences menées en 2002 par l'équipe de l'américain Kellar Autumn ont montré que la spectaculaire faculté d'adhésion de l'animal est uniquement due à des forces de Van der Waals. L'adhésion est possible grâce à l'anatomie particulière des coussinets des doigts du lézard. Ces derniers sont recouverts de poils microscopiques, les sétules, ramifiés en des centaines de branches terminées par une spatule pouvant s'approcher à quelques nanomètres de la surface de contact.

I.1 - Interactions entre molécules polaires

On considère une molécule polaire située dans le vide, modélisée par un dipôle électrique rigide de moment dipolaire électrique permanent $\vec{p}_1 = p_1 \vec{u}_z$. Le dipôle, centré en un point O , est constitué de deux charges ponctuelles opposées, $+q$ et $-q$ (avec $q > 0$), situées sur l'axe $(O, \vec{u}_z)$ aux points respectifs P et N distants de $a = PN$ (**figure 1**). On repère tout point M de l'espace par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans le repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

**Figure 1 - Dipôle électrique centré en un point O**

- Q1.** Expliquer, en prenant l'exemple de la molécule de chlorure d'hydrogène (HCl), l'origine du moment dipolaire permanent de certaines molécules. Donner l'expression en fonction de a et q du moment dipolaire électrique $\vec{p}_1$ de la molécule polaire.
- Q2.** Établir l'expression du potentiel électrostatique $V_1(M)$ créé en M par la molécule polaire dans le cadre de l'approximation dipolaire qu'on explicitera. On donnera le résultat en fonction de p_1 , ε_0 et des coordonnées sphériques du point M .

Q3. En déduire que le champ électrostatique $\vec{E}_1(M)$ créé en M par la molécule polaire s'écrit en coordonnées sphériques : $\vec{E}_1(M) = \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos(\theta)\vec{u}_r + \sin(\theta)\vec{u}_\theta)$.

Une seconde molécule polaire, modélisée par un dipôle rigide de moment dipolaire électrique permanent $\vec{p}_2$, est située au point M sur l'axe $(O, \vec{u}_z)$ tel que $\theta = 0$, à la distance r fixe du point O . À un instant donné, son moment dipolaire forme un angle α avec cet axe (**figure 2**). Dans ces conditions, la molécule plongée dans le champ électrostatique dû à l'autre molécule située au point O subit un couple de forces de moment : $\vec{\Gamma} = \vec{p}_2 \wedge \vec{E}_1(M)$. On rappelle l'expression de l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules : $\mathcal{E}_{12} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(M)$.

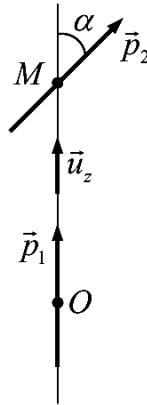


Figure 2 - Interaction entre deux molécules polaires

Q4. Quel est l'effet du couple de forces subi par la molécule fixée au point M ? Justifier l'orientation de son moment dipolaire électrique lorsqu'elle est en équilibre stable.

Les deux molécules sont supposées identiques, de moments dipolaires électriques de même valeur $p_1 = p_2 = p = 1 \text{ D}$.

Q5. Estimer l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules, distantes de $r = 0,5 \text{ nm}$, en supposant leurs moments dipolaires électriques alignés. Comparer cette énergie à l'énergie d'agitation thermique qui est de l'ordre de $k_B T$ où k_B est la constante de Boltzmann, à la température ambiante $T = 293 \text{ K}$. Conclure. ← **Pour 5/2 MP**

Q6. Du fait de l'agitation thermique, on doit considérer l'énergie potentielle d'interaction moyenne entre deux dipôles situés à une distance r dont les orientations relatives sont sujettes à des variations aléatoires. À température suffisamment élevée, on montre que cette énergie potentielle d'interaction moyenne est de la forme : $\langle \mathcal{E}_{12} \rangle = -\frac{C_K}{r^6}$ où

$$C_K = \frac{1}{k_B T} \left(\frac{p^2}{2\pi\epsilon_0} \right)^2.$$

Donner un ordre de grandeur de C_K à la température ambiante $T = 293 \text{ K}$. Vérifier que la force $\vec{F}_{1/2}$ qui dérive de cette énergie potentielle est attractive. On rappelle que $\vec{F}_{1/2} = -\vec{\text{grad}} \langle \mathcal{E}_{12} \rangle$.

I.2 - Calcul de la force d'adhérence du gecko au plafond

La force, calculée à la question précédente, correspond à une interaction de Van der Waals entre molécules polaires. Si on considère maintenant deux plans infinis parallèles, distants de D et séparant chacun un milieu solide (**figure 3**), on montre en prenant en compte l'ensemble des interactions de Van der Waals que la force surfacique entre les deux milieux s'écrit : $f(D) = \frac{A}{6\pi D^3}$.

La constante A , appelée constante de Hamaker, dépend de la nature des interactions de Van der Waals et des densités moléculaires des deux solides en interaction.

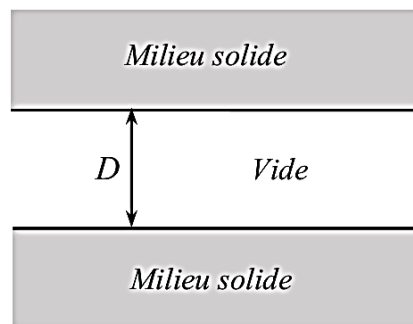


Figure 3 - Deux milieux plans infinis en interaction

- Q7.** Vérifier que la constante de Hamaker A est homogène à une énergie.
- Q8.** Un gecko de masse $m = 50$ g est suspendu par ses quatre pattes au plafond. Le gecko possède au total 6 millions de sétules, comportant chacune en moyenne 500 spatules. En modélisant une spatule par une surface carrée de $0,2 \mu\text{m}$ de côté située à une distance $D = 1$ nm du plafond, estimer le pourcentage de sétules utilisées par le gecko pour soutenir sa masse. On prendra $A = 10^{-19}$ J et on négligera tout effet de bord.
- Sachant que l'équipe de Kellar Autumn a constaté qu'un gecko de 50 g utilise à son maximum d'adhérence uniquement 0,04 % de ses sétules pour soutenir sa masse, peut-on bien imputer les facultés d'adhérence du gecko aux interactions de Van der Waals ? Pourquoi le gecko mobilise-t-il certainement davantage de sétules pour assurer son adhérence ?
- Q9.** À un instant pris pour origine, on suppose que le gecko lâche le plafond et chute de 10 cm avant de se rattraper à l'aide d'une patte à une surface verticale. Sachant que l'équipe de Kellar Autumn a pu mesurer une force de cisaillement (opposée au glissement) de l'ordre de 10 N par patte, estimer la distance que doit parcourir le gecko lorsque sa patte est en contact avec le mur pour s'arrêter. On supposera qu'il mobilise 50 % de la capacité de cisaillement maximale de sa patte.

Cette question fait appel à une démarche de résolution de problème. Il est notamment attendu de préciser chaque notation introduite, de présenter de façon claire les hypothèses retenues, de mener de bout en bout un calcul littéral, puis d'effectuer l'application numérique attendue.

Données :

- Opérateur gradient d'un champ scalaire U :

- $\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$ en coordonnées cartésiennes

- $\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$ en coordonnées cylindriques

- $\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$ en coordonnées sphériques

- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- Intensité de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- Définition du debye (D) : $1 \text{ D} = 3,33 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$

Ex 2 : Hygromètres capacitifs

Questions 22, 23, 24 pour tous :

Pour évaluer la pression partielle de vapeur d'eau dans l'atmosphère, les ballons-sondes utilisent des hygromètres capacitifs ; ils s'agit de condensateurs formés de deux plaques métalliques planes, de grande surface S , disposées en vis à vis et séparées sur une épaisseur e par un milieu isolant : nous considérerons tout d'abord que ce milieu est électriquement équivalent au vide (figure 6). En présence d'une tension de polarisation U_0 , des charges surfaciques $\pm\sigma_0$ apparaissent sur les faces en regard du condensateur.

- – 22. En supposant les dimensions transverses des électrodes très grandes devant e , préciser la direction du champ électrique $\vec{E}$ au sein de l'isolant. Montrer aussi que ce champ est uniforme au sein du milieu isolant.
- – 23. Dédurre, par exemple du théorème de Gauss, la relation liant σ_0 , $\vec{E}$ et la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 .
- – 24. Calculer U_0 et définir puis exprimer la capacité C_0 du condensateur ainsi réalisé.

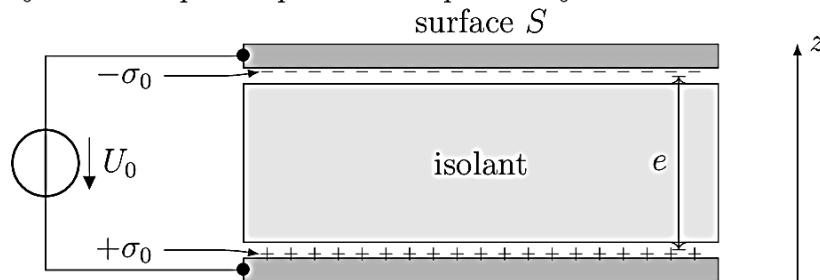


FIGURE 6 – Hygromètre capacitif en l'absence d'humidité

Questions 25 à 28 d'entraînement CCS / CCMP :

En milieu humide l'isolant se charge de molécules d'eau, décrites ici comme des dipôles électrostatiques qui, sur le schéma de la figure 7, sont tous alignés sur la direction du champ électrique. Dans le volume central de l'isolant ces charges $\pm$ se compensent deux à deux mais ce n'est pas le cas sur les surfaces supérieure et inférieure de l'isolant où on voit apparaître des charges surfaciques dites de *dépolérisation* $\pm\sigma$. On notera n_p la densité particulière de dipôles électriques au sein de l'isolant et $\vec{p}_m = p_m \vec{e}_z$ la valeur moyenne de ces moments dipolaires moléculaires.

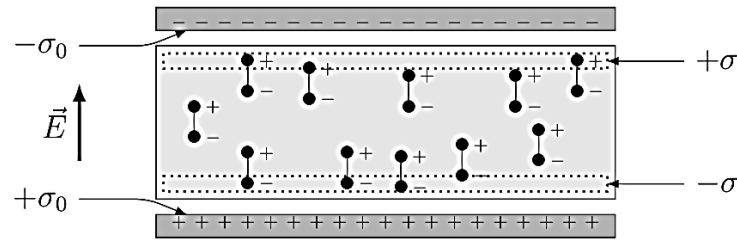


FIGURE 7 – Hygromètre capacitif avec isolant humide

- – 25. Exprimer le moment dipolaire électrique total du milieu isolant en fonction de n_p , S , e et p_m . En déduire l'expression des charges surfaciques de dépolérisation σ en fonction de p_m et n_p seulement.

L'ensemble de l'électronique de mesure, y compris le condensateur sensible à l'hygrométrie, est thermostaté à la température T_0 . En conséquence, l'alignement des dipôles moléculaires avec le champ électrostatique $\vec{E} = E\vec{e}_z$ n'est pas systématique puisqu'il est contrarié par l'agitation thermique. On rappelle ici l'expression $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ de l'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle de moment dipolaire $\vec{p}$ avec un champ électrique extérieur $\vec{E}$.

- Pour 5/2 MP ↑ □ – 26. Quelles seraient les limites de p_m à très basse et à très haute température ? Exprimer, en fonction du moment dipolaire individuel p_{H_2O} d'une molécule d'eau et de la constante de Boltzmann k_B , une estimation de la température de transition T_c entre ces deux limites basse et haute dans le champ électrostatique $\vec{E}$.

- – 27. En pratique on a toujours $T_0 \gg T_c$ et on peut montrer dans ce cas l'expression asymptotique de p_m , que l'on admettra :

$$\vec{p}_m = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}$$

où la *polarisabilité* $\alpha > 0$ est une constante à température fixée et pour un matériau isolant donné. Préciser la dimension ou l'unité de α dans le système international d'unités.

- – 28. En déduire que la capacité C du condensateur ainsi formé s'exprime en fonction de C_0 sous la forme $C = \varepsilon_r C_0$ dans laquelle on exprimera la permittivité relative ε_r en fonction de α et n_p .

La mesure de C est donc une mesure de n_p donc, au moyen d'un étalonnage à réaliser, une mesure électrique et interfaçable de l'hygrométrie ambiante.