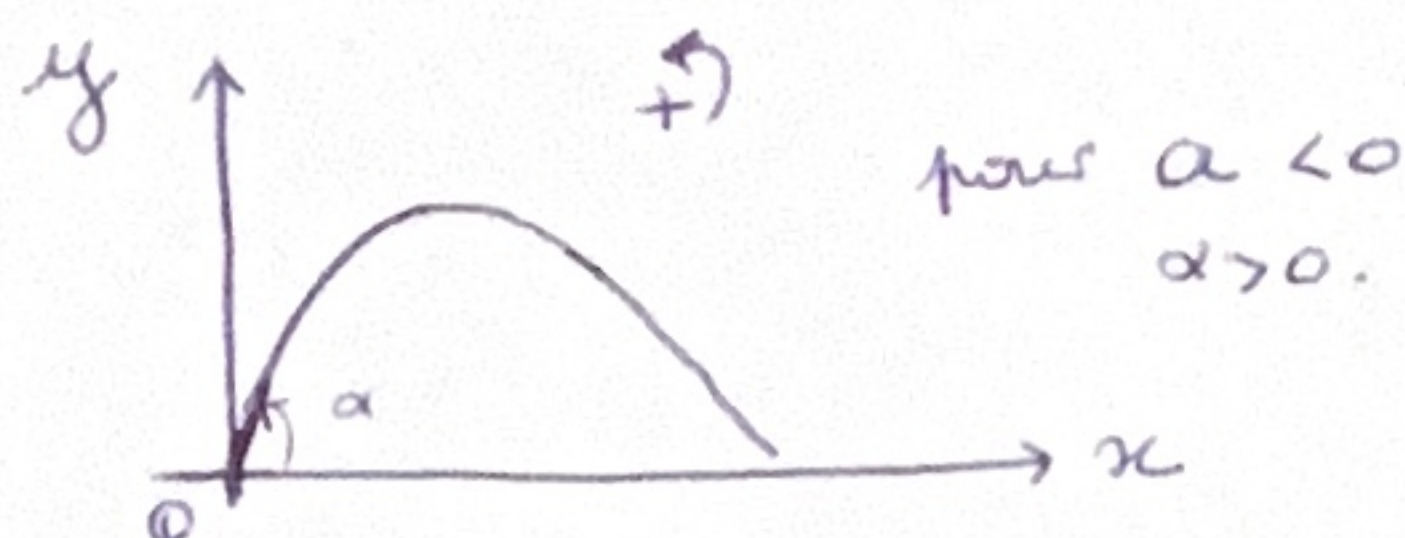


Trajectoire parabolique

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

1). $t = \frac{x(t)}{v_0 \cos \alpha}$ pour $v_0 \neq 0$
 $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$

$$y(t) = \frac{1}{2} a \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot x$$



si $v_0 = 0$ ou $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ traj. rectiligne

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ z(t) = 0 \\ y(t) \neq 0 \end{cases} \leftarrow \text{selon (ay).}$$

2) $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ a t + v_0 \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\uparrow$
 $\frac{d\vec{om}}{dt}$

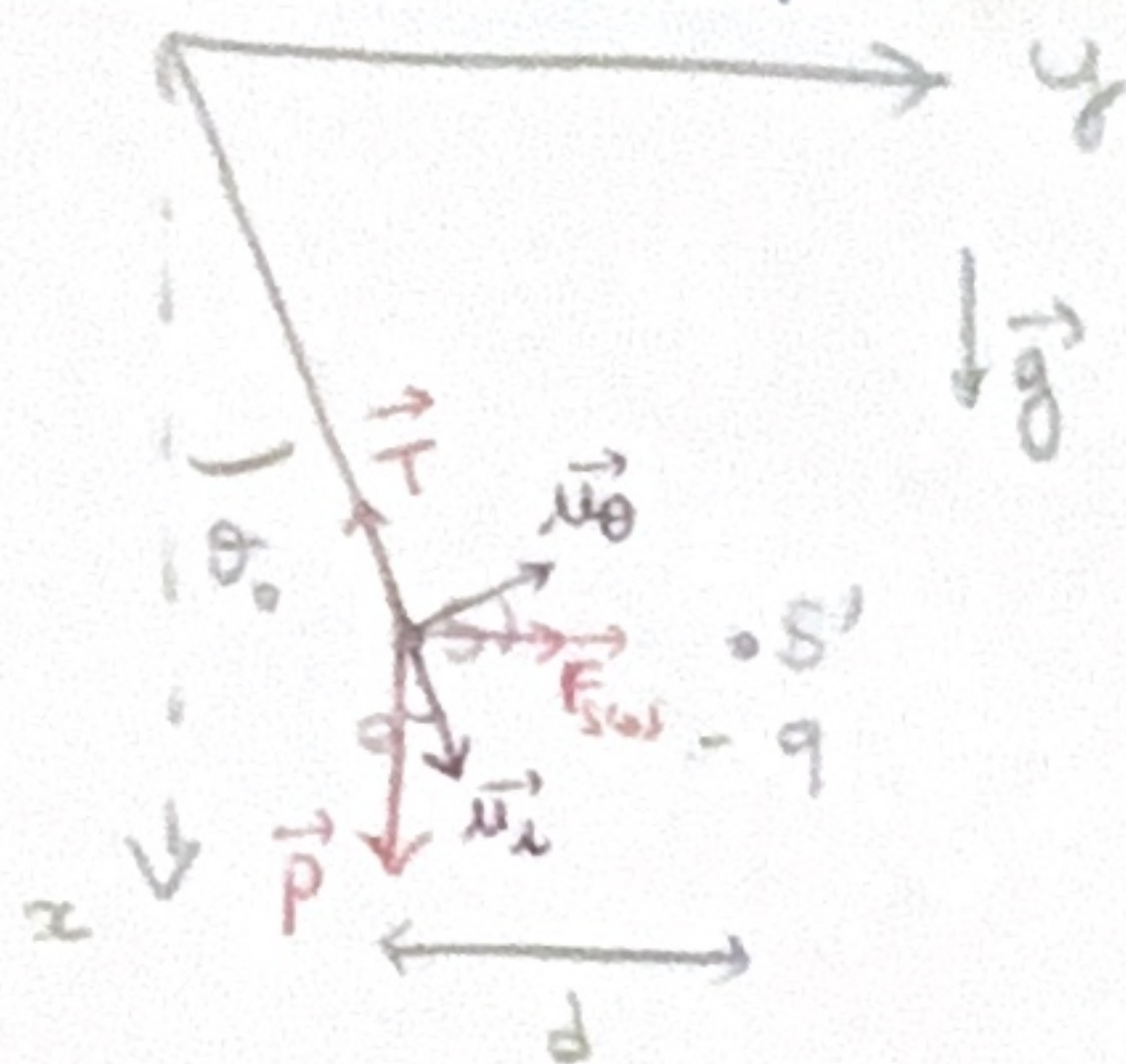
3) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\uparrow$
 $\frac{d\vec{v}}{dt}$

→ il s'agit d'un mvt tel que

$$\vec{a} = \vec{cst.}$$

ex: chute libre
 dans $\vec{E}$

pendule électrostatique



Syst $\{S(m, q)\}$

Ref terrestre galiléen

Ref: $\vec{P} = m\vec{g}$

$\vec{T} = -T\vec{u}_r$

$\vec{F}_{s \rightarrow s} = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cdot \frac{\vec{s}'\vec{s}}{s's} = \frac{+q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cdot \vec{u}_y$

PFD à l'éq. : $\vec{0} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{s \rightarrow s}$

selon $\vec{u}_r$: $\vec{T}$ force non donnée

$\Rightarrow$ selon $\vec{u}_\theta$: $0 = -mg \sin \theta_0 + 0 + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cos \theta_0$

(=) $mg \sin \theta_0 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cos \theta_0$

(=) $q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 d^2 mg \tan \theta_0}$

(=) $q = 2d \sqrt{\pi\epsilon_0 mg \tan \theta_0}$

$q = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$

Attractions.

b) D'après la 3^e loi de Newton (= principe des ac. réciproques),

$$\vec{F}_{M \rightarrow T} = - \vec{F}_{T \rightarrow M}$$

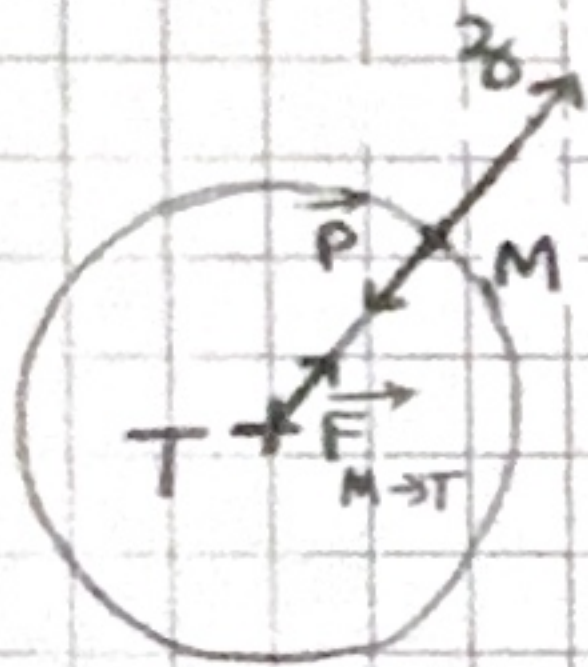
avec T le centre de la Terre
et M le centre de la pomme

or la pomme est située à la surface de la Terre donc

$$\vec{F}_{T \rightarrow P} = \vec{P} \leftarrow \text{le poids de la pomme}$$

$$= m \vec{g} \quad \text{avec } m = 200g$$

$$\text{et } \vec{g} = -g \vec{e}_z$$



$$\text{d'où } \vec{F}_{M \rightarrow T} = - (m \times (-g \vec{e}_z))$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{M \rightarrow T} = m g \vec{e}_z$$

$$\|\vec{F}_{M \rightarrow T}\| = m g = \underline{2,0 \text{ N}}$$

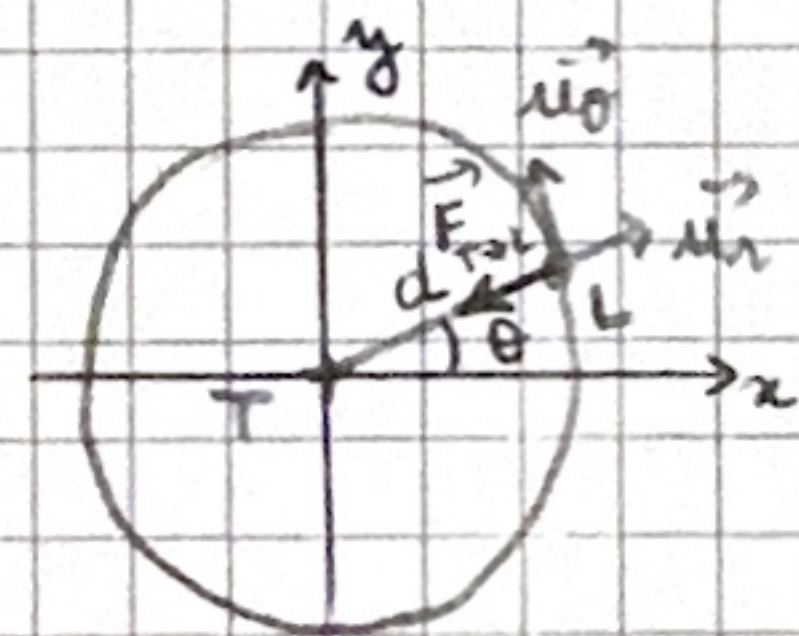
c.) Lune de centre L qui a un mvt circulaire uniforme

Terre de centre T

Syst $\{L\}$ Ref géocentrique supposé galiléen

Bdf: $\vec{F}_{T \rightarrow L}$ force d'interaction gravitationnelle

PFD: $M_L \vec{a} = \vec{F}_{T \rightarrow L}$



$$\text{or } \begin{cases} \vec{TL} = d \vec{u}_r \\ \vec{v} = d \dot{\theta} \vec{u}_\theta = d \omega \vec{u}_\theta \\ \vec{a} = -d \omega^2 \vec{u}_r \end{cases}$$

mvt uniforme: $\omega = \text{cte}$

$$\text{d'où } \vec{F}_{T \rightarrow L} = -M_L d \omega^2 \vec{u}_r$$

$$\text{avec } \omega = \frac{d\theta}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uniforme} \Rightarrow \omega = \text{cte}}}{=} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T_L}$$

$$\text{d'où } \|\vec{F}_{T \rightarrow L}\| = -M_L \times d \times \left(\frac{2\pi}{T_L}\right)^2 \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \|\vec{F}_{T \rightarrow L}\| = M_L d \times \left(\frac{2\pi}{T_L}\right)^2 \simeq \underline{2,0 \cdot 10^{20} \text{ N}}$$

$$\text{or } \|\vec{F}_{L \rightarrow T}\| = \|\vec{F}_{T \rightarrow L}\| = 2,0 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

$\uparrow$
3^e loi de N.

Pseudo-oscillat.

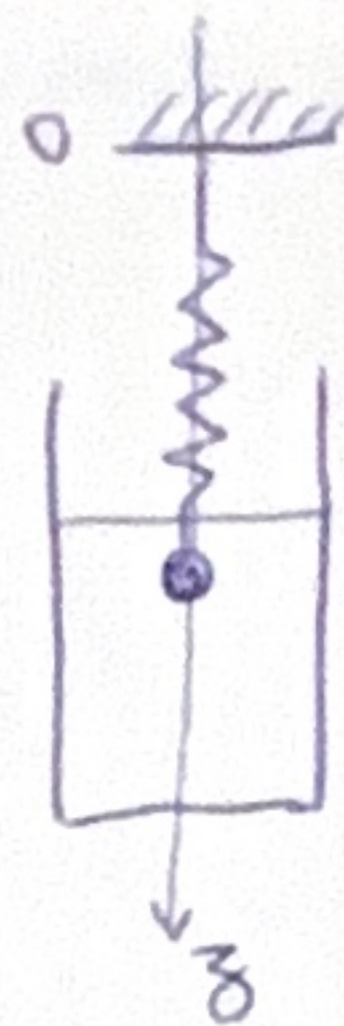
1) syst $\{M(m)\}$ étudié ds R.T galiléen

Bdf: $\vec{P} = mg \vec{u}_z$

$\vec{\pi} = -\rho V g \vec{u}_z$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\vec{f}_{el} = -k(z - l_0) \vec{u}_z$

$\vec{f} = -6\pi\eta r \dot{z} \vec{u}_z$



r faible $\rightarrow \|\vec{\pi}\| \ll \|\vec{P}\|$.

PFD $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{f}_{el} + \vec{f}$.

selon (Oz) : $m\ddot{z} = mg - k(z - l_0) - 6\pi\eta r \dot{z}$

$$\ddot{z} + \underbrace{\frac{6\pi\eta r}{m}}_{\frac{\omega_0}{Q}} \dot{z} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} z = g + \frac{k}{m} l_0.$$

$\rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$Q = \frac{\omega_0 m}{6\pi\eta r} = \frac{\sqrt{k m}}{6\pi\eta r}$

$z = z_h + z_p$

z_p tq $0 + 0 + \omega_0^2 z_p = g + \omega_0^2 l_0$

$z_p = l_0 + \frac{g}{\omega_0^2} > l_0$ ok.

$z_h \rightarrow$ oscillat pseudo-périodiques

$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 < 0.$

$r_{1,2} = \frac{-\omega_0/Q \pm i\sqrt{4\omega_0^2 - \omega_0^2/Q^2}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i \underbrace{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}_{\omega_p}$

$z_h = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)).$

$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{(6\pi\eta r)^2}{4km}}}$

on élimine k : $k = m\omega_0^2 = m \frac{4\pi^2}{T_0^2} \Rightarrow km = \left(\frac{2\pi m}{T_0}\right)^2$

$T_p = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{6\pi\eta r T_0}{4\pi m}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{3\eta r T_0}{2m}\right)^2}}$

2) appl: en mesure T_0, r, m et T_p
on en déduit η

Ex. . Suspension d'un moteur

1) Syst $\{M\}$ réf terrestre galiléen

Forces: $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ $\vec{f}_r = -k(l_{eq} - l_0)\vec{u}_z$

$\vec{f}_f = \vec{0}$ à l'éq.

pas de force suppl. associée à la vibration car moteur à l'arrêt.

En statique: $\vec{0} = \vec{P} + \vec{f}_r$

$0 = -mg - k(l_{eq} - l_0)$

(*) $l_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}$ ($l_{eq} < l_0$ normal).

2) PFD: $m\ddot{z} = \vec{P} + \vec{f}_r + \vec{f}_f + \vec{F}$ et on projette selon (Oz)

$m\ddot{z} = -mg - k(\underbrace{l - l_0}_{l_{eq} + z}) - \alpha \dot{z} + F_0 \cos(\omega t)$

$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = -\cancel{g} - \frac{k}{m} l_{eq} + \frac{k}{m} l_0 + \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$
 $\quad \quad \quad -\frac{k}{m} l_0 + \cancel{g}$

(*) $\ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$ $\xrightarrow[\text{canonique}]{\text{forme}}$ $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$

3) on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$ (*) $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{mk}}{\alpha}$

4) on a $\dot{z} = V_0 \cos(\omega t + \psi)$

$\dot{z} = \underline{V} e^{j\omega t}$ avec $\underline{V} = V_0 e^{j\psi}$

l'éq^e devient: $j\omega \dot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 \frac{\dot{z}}{j\omega} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$

$\div e^{j\omega t} \rightarrow j\omega \underline{V} + \frac{\omega_0}{Q} \underline{V} + \frac{\omega_0^2}{j\omega} \underline{V} = \frac{F_0}{m}$

$\underline{V} = \frac{F_0/m}{\frac{\omega_0}{Q} + j\omega - j\frac{\omega_0^2}{\omega}} = \frac{\frac{Q}{\omega_0} \cdot \frac{F_0}{m}}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$

5) $V_0 = |\underline{V}| = \frac{QF_0}{(m\omega_0) \sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}}$

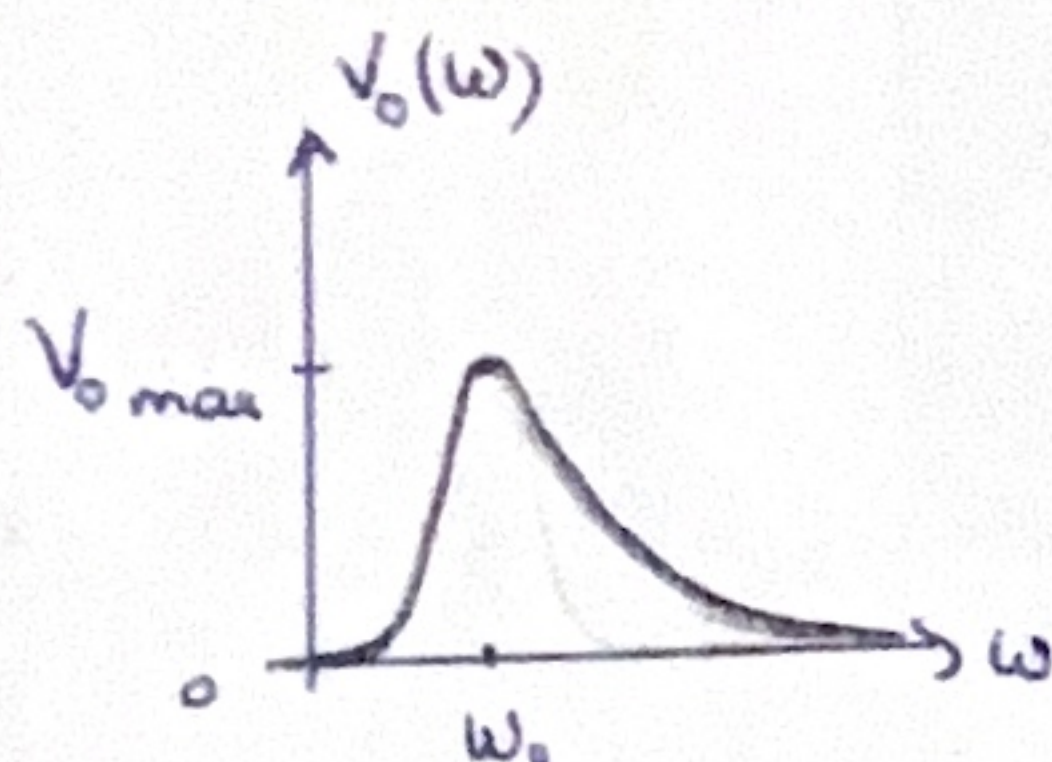
$$6). \quad V_0(\omega) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} \frac{QF_0 / (m\omega_0)}{\sqrt{Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} V_0(\omega) = 0.$$

$$V_0(\omega) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{QF_0 / (m\omega_0)}{\sqrt{Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow +\infty} V_0(\omega) = 0.$$

$V_0(\omega)$ est max lorsque $1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ est min

$$(r) \quad \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = 0$$

$$(e) \quad \omega = \omega_0. \rightarrow \text{résonance en vitesse} \\ \text{pour } \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$\underline{V_{0\max}} = V_0(\omega_0) = \frac{QF_0}{m\omega_0} = \frac{\frac{m\omega_0}{\alpha} \cdot F_0}{m\omega_0} = \underline{\frac{F_0}{\alpha}}$$

7). la suspension doit amortir les vibrations dues au frot du moteur.

Il faut donc que ω_0 soit le plus possible éloigné de ω .

$\rightarrow$ on s'écarte au max de la résonance.

pour $k_1 = 4,0 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-1}$

$$\underline{\omega_{01}} = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = \sqrt{\frac{3,6 \cdot 10^6}{10}} = \underline{6 \cdot 10^2 \text{ rad.s}^{-1}}$$

$k_2 = 1,0 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-1}$

$$\underline{\omega_{02}} = \sqrt{\frac{k_2}{m}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^5}{10}} = \underline{3 \cdot 10^2 \text{ rad.s}^{-1}}$$

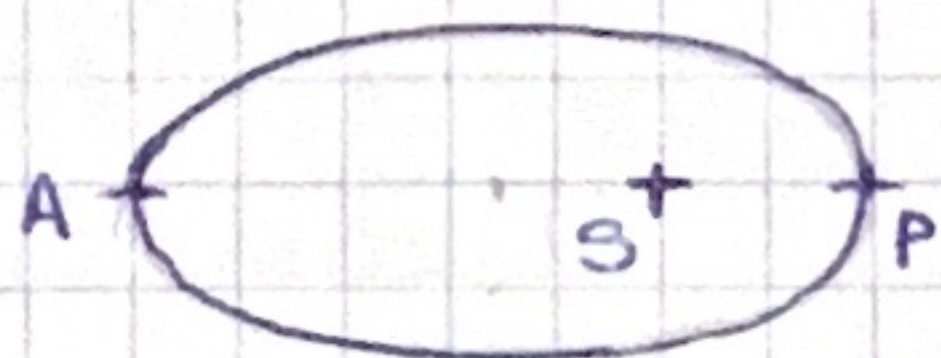
le fonctionnement du moteur impose des vibrat^{ns} de pulsatⁿ $\omega = 628 \text{ rad.s}^{-1}$

pour s'écarter au max de la résonance, il faut choisir le ressort

de cote de raideur $k_2 = 9,0 \cdot 10^5 \text{ N.m}^{-1}$.

Ex. 2. Comète de Halley.

- 1). point le $\oplus$ près du Soleil : périhélie
- 2). orbite de la comète = ellipse car état lié (on parle de période de révolution).



On cherche la distance SA.

$$\text{Or } SA + \underbrace{SP}_{\text{connu}} = 2a$$

$$\text{et } \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G M_S}$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{T^2}{4\pi^2} G M_S \right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{SA = 2 \left(\frac{T^2}{4\pi^2} G M_S \right)^{1/3} - SP}}$$

$$\underline{\underline{\text{AN: } SA = 5,3 \cdot 10^{12} \text{ m}}}$$

A : pt le $\oplus$ éloigné de S = aphélie.