

Durée 4h

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la **clarté**, à la **précision** et à la **concision** de la **rédaction**. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un **stylo noir ou bleu foncé non effaçable** pour la rédaction de votre composition ; **d'autres couleurs, excepté le vert**, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les **schémas** et la **mise en évidence des résultats**.
- **Ne pas utiliser de correcteur.**
- **Numéroter** les copies : "i/nombre total".
- **Respecter les notations** de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la **numérotation de la question posée**.
- Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition.

Ex 1 : Dosage de l'eau d'une piscine

Le pH de l'eau des piscines et des spas est régulé par les ions hydrogénocarbonate. Il est quantifié par le *titre alcalimétrique complet*, abrégé TAC, qui correspond au volume en mL de solution aqueuse d'acide chlorhydrique (H_3O^+ , Cl^-) à la concentration de $0,020 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ qu'il faut ajouter à 100 mL d'eau en présence d'hélianthine pour observer un changement de coloration. Il s'exprime usuellement en °F. L'eau étudiée possède un pH de 7,2 et un TAC de 15 °F.

- 1 - Tracer le diagramme de prédominance des espèces $\text{CO}_{2(\text{aq})}$, HCO_3^- et CO_3^{2-} en fonction du pH. Identifier l'espèce qui prédomine dans l'eau étudiée.
- 2 - Écrire la réaction mise en jeu lors de la mesure du TAC.
- 3 - Expliquer avec précision comment l'équivalence du dosage est repérée.
- 4 - Dédurre de la valeur du TAC la concentration de l'espèce prédominante.

Données :

- ▷ Zone de virage de l'hélianthine : rouge pour $\text{pH} < 3,1$, jaune pour $\text{pH} > 4,4$;
- ▷ $\text{p}K_a(\text{CO}_{2(\text{aq})}/\text{HCO}_3^-) = 6,4$; $\text{p}K_a(\text{HCO}_3^-/\text{CO}_3^{2-}) = 10,3$.

avec $\text{CO}_{2(\text{aq})} = \text{H}_2\text{CO}_3$

Ex 2 : Codeur binaire

On définit un codeur comme un circuit de compression des données, car c'est un circuit qui réduit le nombre d'entrées et permet de transporter une information sur moins de fils.

Une seule entrée étant active à la fois, on obtient en sortie le numéro binaire de l'entrée active. On a 2^n entrées pour n sorties.

Prenons un codeur à quatre entrées et à deux sorties. On veut, conformément au cahier des charges, la table suivante :

e_3	e_2	e_1	e_0	s_1	s_0
1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0

1. Justifier que les sorties sont données par

$$s_1 = e_3 \cdot \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_0 + \bar{e}_3 \cdot e_2 \cdot \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_0 ;$$

$$s_0 = e_3 \cdot \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_0 + \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2 \cdot e_1 \cdot \bar{e}_0 .$$

2. Si toutes les entrées sont nulles, quel est le résultat de ce circuit ? En quoi est-ce un problème ?
3. Si $e_1 = e_2 = 1$, quel est le résultat de ce circuit ? En quoi est-ce un problème ?

Pour résoudre le premier problème, on rajoute une sortie Y qui vaut 1 si toutes les entrées sont nulles. Cette sortie permet de savoir lorsque le codeur doit être considéré comme inactif.

Pour le second problème, on hiérarchise les voies. Ainsi, si la voie 3 est active, la sortie doit être (11), quel que soit l'état des autres voies. De même pour les voies suivantes.

4. Justifier alors que $s_1 = e_3 + e_2$ et $s_0 = e_3 + e_1 \cdot \bar{e}_2$.

Ex 3 : Cation dans un champ magnétique

Un plasma est un gaz ionisé. Ici, le plasma est obtenu à partir du Deutérium D et est constitué d'ions D^+ et d'électrons e^- . Afin de réaliser la fusion nucléaire entre ions D^+ , il faut confiner le plasma c'est-à-dire le maintenir à une forte densité à une température considérable (10^8 K). Nous étudions ici quelques aspects du confinement magnétique.

A – Mouvement d'un cation dans un champ magnétique uniforme et permanent

Dans un premier temps, nous étudions le mouvement d'un cation D^+ de charge q , de masse m , non relativiste dans un champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B} = B\vec{u}_z$ avec $B > 0$, dans le référentiel galiléen $R(O, x, y, z)$.

Q1. Donner une inégalité sur la vitesse du cation pour que le poids de ce cation soit négligeable par rapport à la force magnétique.

On suppose cette condition réalisée dans toute la suite.

Q2. Comment évolue l'énergie cinétique E_C de ce cation? En déduire que le mouvement est uniforme.

Q3. A $t = 0$, le cation se trouve au point $M_O(x_0, y_0, z_0)$ avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_z$ avec $v_0 > 0$.

Déterminer le mouvement ultérieur du cation.

Q4. A la date $t = 0$, le cation se trouve maintenant au point $M_O(x_0, y_0, z_0)$ avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_y$ avec $v_0 > 0$. Les données sont : q , m , B et v_0 . On admet que la trajectoire est circulaire.

Q4a. Quelle condition permet d'affirmer que le mouvement est circulaire ?

Q4b. Déterminer le rayon de cette trajectoire.

Q5. A $t = 0$, le cation se trouve en M_O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_{0\parallel}\vec{u}_z + v_{0\perp}\vec{u}_y$ avec $v_{0\parallel} > 0$ et $v_{0\perp} > 0$.

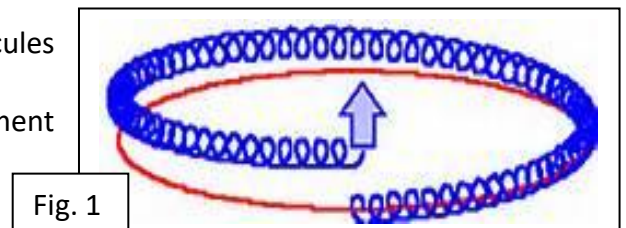
Quelle est alors la nature de la trajectoire ?

On constate donc que les particules s'enroulent autour des lignes de champ.

B – Dérive de particules

On constate que, dans un champ non uniforme, les particules subissent une dérive (cf Fig. 1).

L'évaluation de cette dérive passe par le vecteur moment magnétique $\vec{M}$ associé.



Q6. Rappeler l'expression du moment magnétique $\vec{M}$ associé à une spire circulaire de rayon ρ_L parcourue par un courant électrique d'intensité I .

Q7. Justifier que le cation de charge q étudié en Q4 équivaut en moyenne à une spire parcourue par un courant d'intensité I et évaluer I en fonction de q , v_0 et ρ_L .

Q8. A partir des questions antérieures, montrer que $\|\vec{M}\| = \frac{E_C}{B}$ et préciser la direction et le sens de $\vec{M}$ dans le repère (O, x, y, z) .

Pour confiner les particules chargées, ce qui est nécessaire à la fusion, l'idée est de refermer les lignes de champ sur elles-mêmes, ce que l'on obtient au moyen d'une bobine torique.

Ex 4 : La foudre

Données numériques pour l'ensemble de l'ex 4 :

Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Intensité du champ de pesanteur terrestre	$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$

A – Système Terre-atmosphère

On considère que la Terre et son atmosphère constituent les deux armatures d'un condensateur sphérique. L'armature terrestre est chargée négativement, l'atmosphère positivement. Au voisinage du sol, le champ électrique créé est de l'ordre de $10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

QA1. On suppose conventionnellement que le sol est de potentiel nul. Reproduire la figure 1 sur votre copie et attribuer à chacune des équipotentiellles sa valeur en volts, sachant qu'elles sont séparées d'un mètre. Représenter quelques lignes de champ électrique.

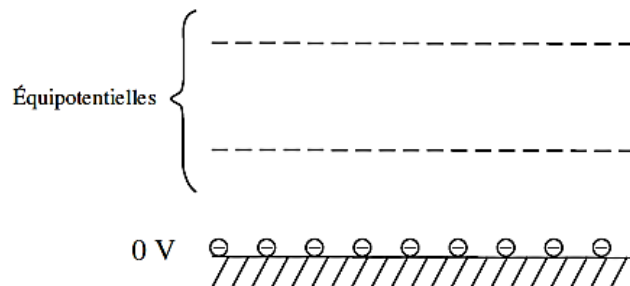
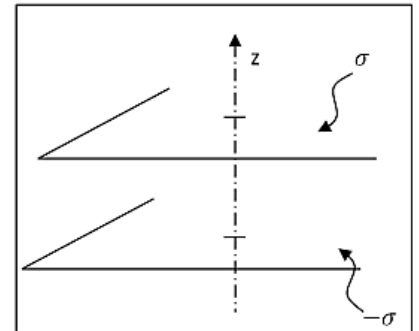


Fig. 1 – Surfaces équipotentiellles.

Le système Terre-atmosphère est localement modélisable par un condensateur plan dont une armature porte la densité surfacique de charge σ supposée positive et l'autre armature porte la densité surfacique de charge $-\sigma$.



QA2. On considère tout d'abord l'armature portant la densité surfacique de charge σ et on cherche le champ électrostatique $\vec{E}_+$ qu'elle crée.

QA2a. En étudiant les symétries, puis les invariances de la distribution, donner la direction du champ $\vec{E}_+(M)$ en un point M quelconque de l'espace et les coordonnées dont ce champ dépend.

QA2b. En utilisant un théorème à énoncer, calculer le champ $\vec{E}_+(M)$ créé par cette armature en un point M quelconque de l'espace. Représenter le vecteur $\vec{E}_+(M)$ de part et d'autre de l'armature portant la densité surfacique de charge σ .

QA3. A l'aide d'un théorème que l'on nommera, établir l'expression du champ électrique $\vec{E}_{tot}(M)$ créé par le condensateur plan à l'intérieur et à l'extérieur d'un condensateur plan.

QA4. Sachant que $\sigma = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$,

Il s'agit là, en réalité, d'une valeur moyenne, la norme du champ électrique évoluant régulièrement avec l'altitude.

B – Mouvement des ions

Bien qu'électriquement neutre, l'atmosphère est constituée de nombreux ions, qui vont se déplacer dans le champ électrique. On étudie dans cette question le mouvement d'un cation, de charge e et de masse $m = 4,8 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$, se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans le champ électrique terrestre $\vec{E}$, supposé constant et uniforme. Le champ magnétique terrestre et la pesanteur sont négligés. Lors de son déplacement, l'ion subit une force de frottement fluide $\vec{F}_f = -\lambda \vec{v}$, avec $\lambda = 5,0 \cdot 10^{-16} \text{ SI}$.

QB1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\vec{v}$.

QB2. En supposant nulle la vitesse initiale du cation, établir l'expression de $\vec{v}$.

QB3. En déduire les expressions de la vitesse limite du cation, $\vec{v}_l$, et du temps caractéristique d'évolution de la vitesse, τ . Déterminer l'unité de λ .

QB4. On considère un champ électrique de norme égale à $E = 100 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

QB4a. Déterminer les valeurs numériques de v_l et de τ .

QB4b. Est-il légitime de négliger l'action du champ de pesanteur ?

QB4c. Donner un ordre de grandeur de la valeur du champ magnétique terrestre. Est-il légitime de négliger l'action du champ magnétique terrestre ?

Ce déplacement d'ions va tendre à annuler la différence de potentiel entre la Terre et l'atmosphère. Pour maintenir le déséquilibre entre la charge terrestre et celle de l'atmosphère, il faut donc constamment recharger la Terre négativement. C'est ce que font les orages par le biais de la foudre.

C – Coup de foudre

Lors d'un coup de foudre, l'air est ionisé dans un canal conduisant du sol au nuage orageux. On assimile l'éclair à un fil rectiligne infini, d'axe Oz et de rayon a , parcouru par un courant continu I uniformément réparti dans une section droite. Dans toute la partie C, un point M au voisinage de l'éclair sera repéré en représentation cylindrique, par ses coordonnées (r, θ, z) .

QC1. Placer sur un schéma, l'éclair, la base locale cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ et le point M, si l'on convient de choisir l'axe Oz ascendant.

QC2. Sachant que l'activité électrique orageuse a pour effet de recharger la Terre négativement, déterminer le sens du courant I dans l'éclair.

QC3. On s'intéresse à l'expression du champ magnétique créé par l'éclair, toujours modélisé par un fil infini de rayon a .

QC3a. Montrer que ce champ est de la forme $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$.

QC3b. Montrer que pour $r > a$, le champ magnétique créé par l'éclair peut se mettre sous la forme $B(r) = \frac{KI}{r}$ et déterminer l'expression littérale du coefficient K .

QC3c. Il n'est pas rare que la foudre s'abatte simultanément sur deux pylônes métalliques voisins. Si ces deux pylônes, supposés parallèles et distants de d_0 , sont parcourus par des courants strictement identiques du fait de leur foudroiement, préciser la valeur du champ magnétique produit en un point du plan défini par les deux pylônes, ce point étant situé à égale distance de ceux-ci.

QC4. En utilisant l'expression de la force de Lorentz, justifier que le canal de l'éclair a tendance à imploser.

QC5. Quelle est l'origine du phénomène lumineux ?

D – Tension de pas

Par temps orageux, il peut être dangereux de chercher à s'abriter sous un arbre. Nous allons tenter d'en comprendre la raison.

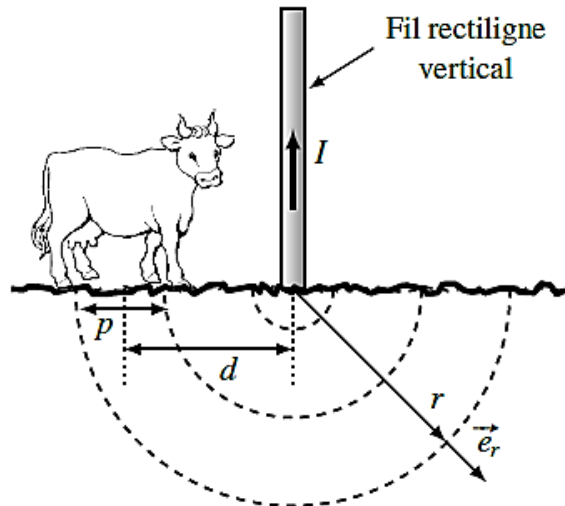


FIGURE 12 – L'électrocution par le sol

Modélisons l'éclair traversant l'arbre par un fil rectiligne vertical semi-infini, parcouru par un courant électrique ascendant d'intensité $I = 15 \text{ kA}$ (voir figure 12). Cette demi-droite prend fin au niveau du sol. Dans toute la partie C, un point M situé dans le sol sera repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) . On suppose que, dans le sol, la densité volumique de courant est radiale, de la forme $\vec{j} = j(r) \vec{e}_r$, expression dans laquelle $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire radial de la base sphérique. L'étude est menée en régime permanent continu et on note $\gamma = 1 \text{ S.m}^{-1}$ la conductivité électrique du sol.

QD1. Montrer que $j(r) = -\frac{I}{2\pi r^2}$ avec I le courant circulant dans le fil.

On donne la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

QD2. Exprimer le champ électrique $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$ dans le sol et en déduire que le potentiel vaut $V(r) = -\frac{I}{2\pi\gamma r}$, en le supposant nul à l'infini.

QD3. Une vache se trouve à la distance moyenne d de l'arbre et la distance entre ses deux pattes avant et arrière est p (voir figure 12). Exprimer, en fonction de p et d , les potentiels au niveau des pattes avant et arrière de la vache. En supposant que $d^2 \gg \left(\frac{p}{2}\right)^2$, montrer que la différence de potentiel entre les pattes U_p , ou tension de pas, est de l'ordre de $U_p \approx \frac{Ip}{2\pi\gamma d^2}$.

QD4. Soit $R \approx 2,5 \text{ k}\Omega$ la résistance entre les pattes avant et arrière de la vache, distantes de $p \approx 1,5 \text{ m}$. À quelle distance minimale d_m du point d'impact doit-elle se trouver pour que son corps soit traversé par un courant électrique d'intensité inférieure à $I_{max} = 25 \text{ mA}$? On donnera l'expression de d_m en fonction de I , I_{max} , p , R et γ . Estimer numériquement d_m .

QD5. Expliquer pourquoi cette tension de pas est plus dangereuse pour une vache que pour l'homme.

Ex 5 : Etude de la suspension d'un véhicule sur une route ondulée

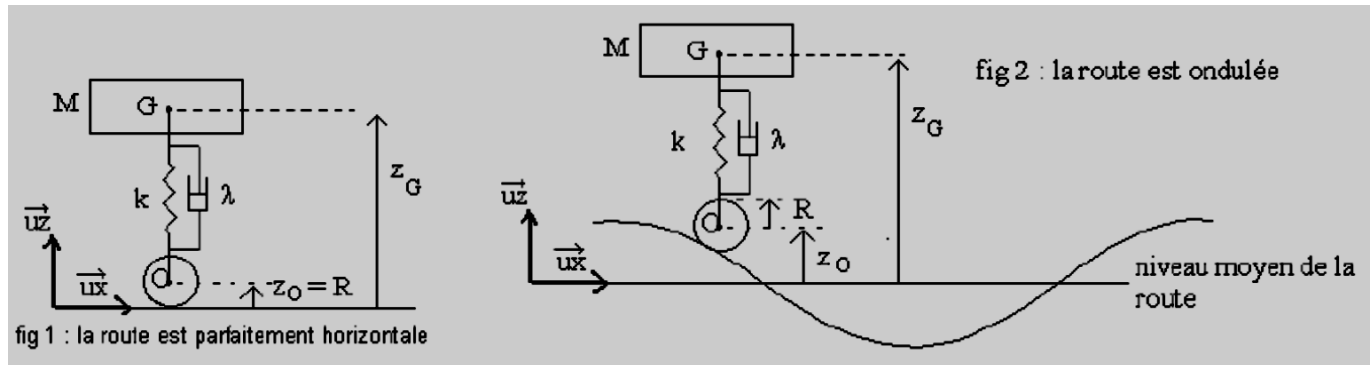
Le véhicule étudié est modélisé par un parallélépipède, de centre de gravité G et de masse $M = 1000 \text{ kg}$. L'ensemble est animé d'une vitesse horizontale $v_x \vec{u}_x$.

La suspension est modélisée par un ressort de raideur constante $k = 1,0 \cdot 10^5 \text{ N.m}^{-1}$ et de longueur à vide l_0 et par un amortisseur fluide de constante d'amortissement constante $\lambda = 4,0 \cdot 10^3 \text{ U.S.I.}$

La position verticale du véhicule est repérée par z_G dans le référentiel terrestre muni d'un repère ayant son origine sur la ligne moyenne des déformations du sol. On note z_O la cote du centre de la roue par rapport au niveau moyen de la route. L'axe OG reste toujours vertical.

L'amortisseur entre M et la roue introduit une force de frottement qui s'écrit :

$$\vec{F} = -\lambda \left(\frac{dz_G}{dt} - \frac{dz_O}{dt} \right) \vec{u}_z$$



Toute l'étude est menée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

A). La route ne présente aucune ondulation (fig 1) et le véhicule n'a aucun mouvement vertical.

Déterminer la position $z_{G\text{éq}}$ de G lorsque le véhicule est au repos.

B). Le véhicule se déplace sur un sol ondulé à vitesse horizontale v_x constante (fig 2).

L'ondulation est assimilée à une sinusoïde de période spatiale L et d'amplitude A . Du fait du mouvement horizontal du véhicule, z_O peut s'écrire $z_O = R + A \cdot \cos(\omega t)$. On étudie maintenant le mouvement de G par rapport à la position d'équilibre établie précédemment. On posera :

$$z = z_G - z_{G\text{éq}}$$

B.1. Exprimer ω en fonction de v_x et L . Vérifier l'homogénéité du résultat.

B.2. En utilisant notamment le résultat de la question A), montrer que $z(t)$ vérifie l'équation :

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} + \lambda \frac{dz}{dt} + kz = k(z_O - R) + \lambda \frac{dz_O}{dt}$$

B.3. Résolution par la méthode des complexes : on pose $\underline{z} = \underline{Z} e^{j\omega t}$, réponse complexe du véhicule à l'excitation sinusoïdale, et $\underline{z}_O - R = \underline{A} e^{j\omega t}$ avec $\underline{A} = A$.

a) Montrer que :

$$\frac{\underline{Z}}{\underline{A}} = \frac{\frac{k}{M} + j \frac{\omega \lambda}{M}}{-\omega^2 + j \omega \frac{\lambda}{M} + \frac{k}{M}}$$

puis que l'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{\underline{Z}}{\underline{A}} = \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}}$$

Exprimer alors ω_0 , ω_1 et Q en fonction de k , λ et M .

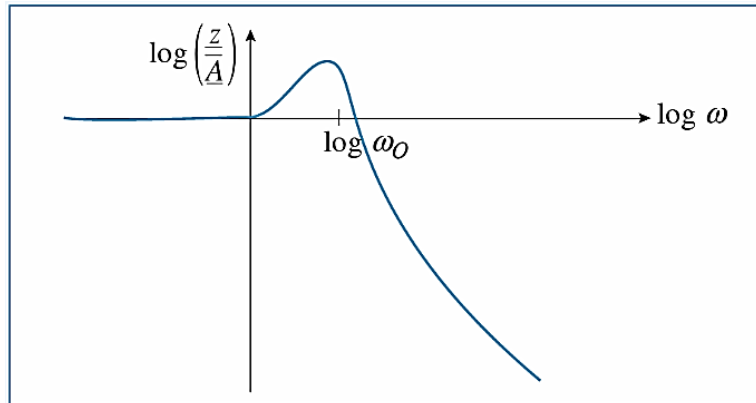
b) Calculer numériquement ω_0 , ω_1 et Q .

c) Donner l'expression du module $\left|\frac{Z}{A}\right|$ en fonction de ω_0 , ω_1 et Q .

B.4. On souhaite maintenant étudier l'amplitude des oscillations en fonction de la vitesse de la voiture.

a) Déterminer les limites de la fonction $\left|\frac{Z}{A}\right|(\omega)$ à basse et à haute fréquences.

Par une étude plus poussée de la fonction $\left|\frac{Z}{A}\right|(\omega)$, on obtient la courbe (en échelles logarithmiques) :



On note ω_r la pulsation de résonance. On admet qu'elle est proche de ω_0 .

b) On donne $A = 10 \text{ cm}$. Déterminer une valeur approchée de l'amplitude des oscillations du véhicule pour $\omega = \omega_0$.

B.5. Dans le film « le salaire de la peur », Yves Montand conduit un camion ($\omega_0 \approx 10 \text{ rad.s}^{-1}$) chargé de nitroglycérine. Il passe sur une tôle ondulée de période spatiale $L = 1 \text{ m}$ et pour laquelle $A = 10 \text{ cm}$. Afin d'éviter l'explosion du chargement, il doit traverser la taule à une vitesse supérieure à 50 km/h .

Justifier qualitativement ceci à l'aide des résultats précédents.

Film de Clouzot 1953



-- FIN DE L'ENONCE --