

Durée 4h

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la **clarté**, à la **précision** et à la **concision** de la **rédaction**. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un **stylo noir ou bleu foncé non effaçable** pour la rédaction de votre composition ; **d'autres couleurs, excepté le vert**, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les **schémas** et la **mise en évidence des résultats**.
- **Ne pas utiliser de correcteur**.
- **Numéroter** les copies : "i/nombre total".
- **Respecter les notations** de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la **numérotation de la question posée**.
- Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition.

Ex 1 : Dosage de l'eau d'une piscine

Le pH de l'eau des piscines et des spas est régulé par les ions hydrogénocarbonate. Il est quantifié par le *titre alcalimétrique complet*, abrégé TAC, qui correspond au volume en mL de solution aqueuse d'acide chlorhydrique (H_3O^+ , Cl^-) à la concentration de $0,020 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ qu'il faut ajouter à 100 mL d'eau en présence d'hélianthine pour observer un changement de coloration. Il s'exprime usuellement en °F. L'eau étudiée possède un pH de 7,2 et un TAC de 15 °F.

- 1 - Tracer le diagramme de prédominance des espèces $\text{CO}_{2(\text{aq})}$, HCO_3^- et CO_3^{2-} en fonction du pH. Identifier l'espèce qui prédomine dans l'eau étudiée.
- 2 - Écrire la réaction mise en jeu lors de la mesure du TAC.
- 3 - Expliquer avec précision comment l'équivalence du dosage est repérée.
- 4 - Dédurre de la valeur du TAC la concentration de l'espèce prédominante.

Données :

- ▷ Zone de virage de l'hélianthine : rouge pour $\text{pH} < 3,1$, jaune pour $\text{pH} > 4,4$;
- ▷ $\text{p}K_a(\text{CO}_{2(\text{aq})}/\text{HCO}_3^-) = 6,4$; $\text{p}K_a(\text{HCO}_3^-/\text{CO}_3^{2-}) = 10,3$.

avec $\text{CO}_{2(\text{aq})} = \text{H}_2\text{CO}_3$

Ex 2 : Codeur binaire

On définit un codeur comme un circuit de compression des données, car c'est un circuit qui réduit le nombre d'entrées et permet de transporter une information sur moins de fils.

Une seule entrée étant active à la fois, on obtient en sortie le numéro binaire de l'entrée active. On a 2^n entrées pour n sorties.

Prenons un codeur à quatre entrées et à deux sorties. On veut, conformément au cahier des charges, la table suivante :

e_3	e_2	e_1	e_0	s_1	s_0
1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0

1. Justifier que les sorties sont données par

$$s_1 = e_3 \cdot \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_0 + \bar{e}_3 \cdot e_2 \cdot \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_0 ;$$

$$s_0 = e_3 \cdot \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_0 + \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2 \cdot e_1 \cdot \bar{e}_0 .$$

2. Si toutes les entrées sont nulles, quel est le résultat de ce circuit ? En quoi est-ce un problème ?
3. Si $e_1 = e_2 = 1$, quel est le résultat de ce circuit ? En quoi est-ce un problème ?

Pour résoudre le premier problème, on rajoute une sortie Y qui vaut 1 si toutes les entrées sont nulles. Cette sortie permet de savoir lorsque le codeur doit être considéré comme inactif.

Pour le second problème, on hiérarchise les voies. Ainsi, si la voie 3 est active, la sortie doit être (11), quel que soit l'état des autres voies. De même pour les voies suivantes.

4. Justifier alors que $s_1 = e_3 + e_2$ et $s_0 = e_3 + e_1 \cdot \bar{e}_2$.

Ex 3 : Boussole, champ géomagnétique et dipôle central

Les notations, valeurs des constantes fondamentales et les autres données numériques nécessaires à la résolution de cet exercice ainsi qu'un formulaire sont regroupés à la fin de l'énoncé.

Les applications numériques comporteront au plus 2 chiffres significatifs.

Les pôles géographiques sont assez proches des pôles magnétiques; dans tout ce qui suit, on pourra confondre les deux axes reliant les pôles opposés de chaque type. La recherche des pôles magnétiques s'est d'abord appuyée sur la mesure du champ magnétique terrestre (ou champ géomagnétique), et en particulier de sa direction. L'intensité croissante du champ géomagnétique à l'approche des pôles contribue enfin à expliquer un phénomène optique spectaculaire : les aurores polaires.

Cet exercice est consacré à la description dipolaire du champ géomagnétique (le dipôle disposé au centre de la Terre et modélisant des courants électriques dans le noyau de la planète).

Une boussole est formée d'un aimant permanent, solide en forme d'aiguille équivalente à un petit dipôle magnétique $\vec{m}$ de norme constante m , la direction du vecteur $\vec{m}$ étant supposée indiquer le nord.

Cette aiguille aimantée peut librement tourner autour d'un axe vertical (Δ) dirigé par le vecteur $\vec{e}_r$ local et formant un pivot à faible frottement (cf. fig. 1).

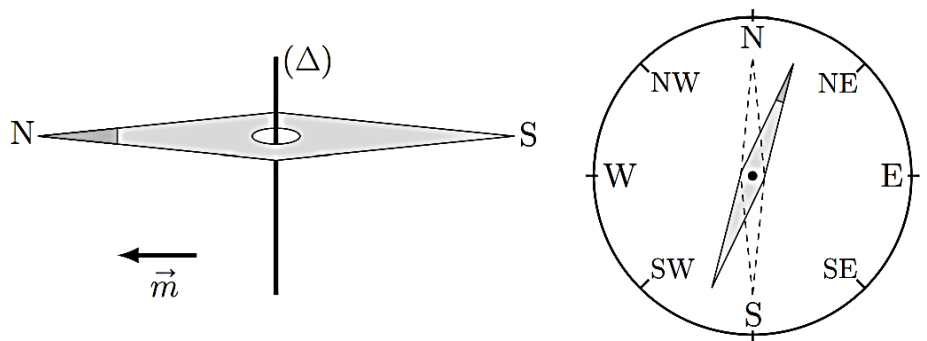


FIGURE 1 – Boussole de navigation

❑ 1 — Pourquoi la boussole à l'équilibre indique-t-elle le nord ? Cet équilibre est-il stable ?

On note I le moment d'inertie de l'aiguille aimantée relativement à son axe de rotation (Δ); légèrement écartée de sa position d'équilibre (cf. fig. 1), l'aiguille aimantée oscille avec une pseudo-période τ_{osc} .

❑ 2 — Montrer que la connaissance de m , τ_{osc} et I permet de déterminer une des composantes du champ géomagnétique. Laquelle ?

On étudie un modèle de champ géomagnétique créé par un dipôle magnétique $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$ disposé au centre O de la Terre (assimilée à une sphère de rayon R_T), l'axe (Oz) étant l'axe polaire géographique dirigé du pôle sud de cet axe vers son pôle nord (cf. fig. 7). On rappelle d'une part qu'un point de la surface est caractérisé par ses coordonnées géographiques φ (longitude) et $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$ (latitude) et d'autre part qu'à l'équateur le champ magnétique terrestre est horizontal, dirigé vers le pôle nord géographique et y a pour intensité B_E .

❑ 3 — Exprimer, en un point de la surface de la Terre et en coordonnées sphériques, le champ géomagnétique en fonction de μ_0 (perméabilité du vide), M_0 et R_T .

❑ 4 — Préciser le signe de M_0 puis estimer sa valeur numérique. Quelles sont la direction et l'intensité du champ géomagnétique aux pôles magnétiques nord et sud ?

En un point P de la surface terrestre, on appelle *nord magnétique local* la direction $\vec{e}_N$ du champ géomagnétique $\vec{B}$, projeté dans le plan horizontal, et *déclinaison magnétique* l'angle D formé par $\vec{B}$ avec le nord magnétique local; la déclinaison magnétique est positive si $\vec{B}$ est dirigé vers le haut (vers le ciel) et négative s'il est dirigé vers le bas (vers le sol).

❑ 5 — Dans l'hémisphère nord, quel est le signe de D ? Calculer $\tan(D)$ en fonction de la latitude λ puis tracer l'allure de la courbe donnant D en fonction de λ pour toutes les valeurs de λ du pôle sud au pôle nord. Pourquoi lisait-on parfois que les boussoles « s'affolent à proximité des pôles »? Peut-on déterminer, au moyen d'une boussole, si on se trouve dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud?

Données numériques et constantes fondamentales

Champ magnétique terrestre à l'équateur	$B_E = 3,0 \times 10^{-5} \text{ T}$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Durée du jour solaire moyen	$T_0 = 24 \text{ h} = 8,6 \times 10^4 \text{ s}$
Intensité du champ de pesanteur	$g_0 = 9,8 \text{ m} \times \text{s}^{-2}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Rayon terrestre	$R_T = 6,4 \times 10^3 \text{ km}$
Logarithme népérien du nombre 20	$\ln(20) \simeq 3,0$

Coordonnées sphériques et géographiques

On notera $(Oxyz)$ les axes cartésiens associés à la base orthonormée et directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Les coordonnées sphériques d'un point P sont notées (r, θ, φ) avec la base locale associée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, cf. fig. 7 à gauche. On note aussi φ (longitude) et λ la latitude d'un point P de la surface terrestre; le point A est situé sur l'équateur dans le méridien origine ($\varphi = 0$); celui-ci passe par l'observatoire de Greenwich G , cf. fig. 7 à droite.

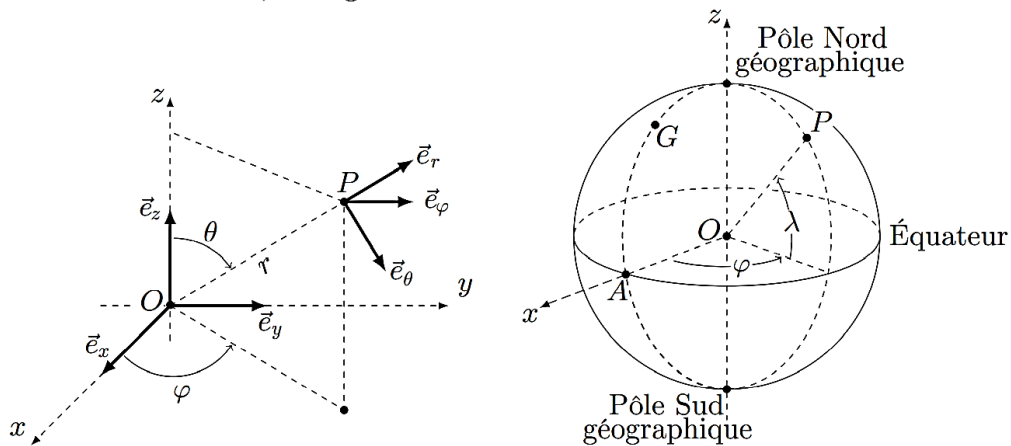


FIGURE 7 – Coordonnées sphériques et géographiques

Données et formules relatives aux dipôles magnétiques

Le champ magnétique créé par un dipôle de moment dipolaire $\vec{M}$ placé à l'origine O des coordonnées est donné au point P par :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{R}(\vec{M} \cdot \vec{R}) - R^2 \vec{M}}{R^5} \quad \text{où } \vec{R} = \overrightarrow{OP} \text{ et } R = \|\vec{R}\|$$

Les interactions d'un dipôle magnétique rigide de moment dipolaire $\vec{m}$ soumis à un champ magnétique extérieur $\vec{B}$ sont décrites par l'énergie potentielle $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ et par le couple des actions électromagnétiques $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.

Ex 4 : A propos des araignées

Formulaire

Détail de la représentation graphique de la fonction logarithme népérien

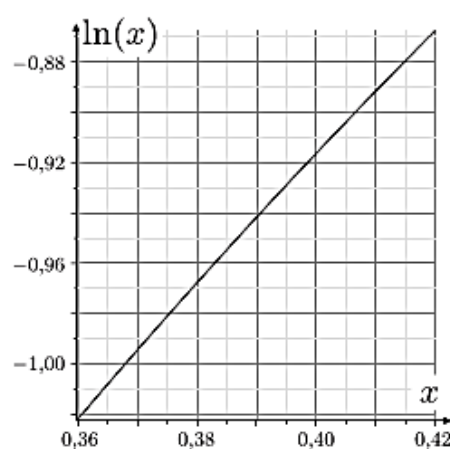


FIGURE 9 – Graphe de la fonction $\ln x$ pour $x \in [0,36; 0,42]$.

Opérateur gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z$$

Rayon terrestre	$R_t = 6400 \text{ km}$
Permittivité électrique du vide	$\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \simeq \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Accélération de pesanteur terrestre	$g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse volumique de l'eau	$\rho_c = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Les araignées ou Aranéides sont des prédateurs invertébrés arthropodes. À ce jour, plus de 47 000 espèces subdivisées en 117 familles sont repertoriées et 1700 d'entre elles vivent en France. Les araignées produisent des fils de soie constitués d'un entrelacement de nombreuses fibrilles élémentaires. Le diamètre de ces fils varient typiquement de 1 jusqu'à 70 μm . À diamètre équivalent, ces fils sont plus résistants que l'acier et possèdent de nombreuses autres propriétés qui les rendent intéressants pour l'industrie, pour la confection par exemple de nouveaux textiles, de gilets pare-balles ou encore de cordes d'instruments de musique. Dans la nature, l'usage que les araignées en font est multiple et dépend des espèces considérées : fil de sécurité pendant un saut pour fuir ou pour se déplacer (fil d'Ariane), tissage de toile pour piéger des proies, moyen de s'élever dans les airs et de voyager au gré des courants aériens pour les araignées montgolfières (fil de la Vierge), confection de catapultes pour la chasse, création de dômes pour le stockage d'air sous l'eau douce pour les espèces subaquatiques ...

Nous proposons d'aborder quelques problèmes de physique relatifs aux araignées et plus particulièrement aux trois espèces représentées dans la figure ci-dessous (Fig. 1). Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif. Les vecteurs sont indiqués par des flèches ($\vec{v}$) sauf s'ils sont unitaires et sont alors surmontés d'un chapeau ($\|\hat{e}_x\| = 1$). Les nombres complexes sont soulignés à l'exception de j tel que $j^2 = -1$. Un formulaire est fourni en fin d'énoncé.

Les 3 parties de ce problème sont indépendantes.

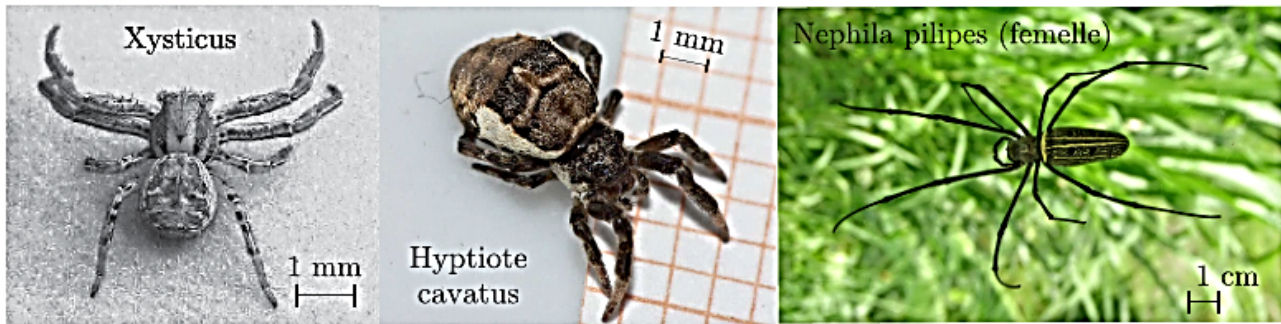


FIGURE 1 – *Xysticus* sp. est une araignée-crabe volante. *Hyptiote cavatus* est une araignée catapulte, tisseuse de toiles triangulaires. Les araignées *Nephila pilipes* fabriquent des fils dont les propriétés mécaniques rivalisent avec les meilleures fibres artificielles : ils peuvent être assemblés pour former des cordes de violon produisant un son au timbre exceptionnel. Source des images : Wikipédia.

I Des araignées volantes

Certaines araignées volantes dont la taille est comprise entre 2 et 7 mm parviennent, en tirant profit des forces électrostatiques, à décoller et à s'envoler. Elles arrivent ainsi à parcourir, au gré des vents, des distances considérables (plusieurs centaines de kilomètres) comme l'a observé pour la première fois, Charles Darwin, lors de son grand voyage à bord du *Beagle* de 1831 à 1836. Dans cette partie du problème, nous nous intéressons à la physique permettant d'expliquer un tel phénomène.

- – 1. En utilisant une schématisation sphérique rudimentaire pour modéliser ces araignées, estimer un ordre de grandeur m_g pour leur masse.

Par temps clair, le champ électrique, en tout point de la surface de la Terre est radial uniforme, dirigé vers le centre de la Terre et sa valeur moyenne vaut $E_0 = 120 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. En première approximation on assimile localement l'atmosphère terrestre à un condensateur plan dont les deux armatures sont le sol terrestre et la couche de l'ionosphère située à l'altitude $z_0 = 60 \text{ km}$ de celui-ci.

- – 2. Évaluer la valeur de la densité surfacique moyenne de charge au niveau du sol, notée σ . Des mesures ont permis de montrer qu'il existe une différence de 360 kV entre l'ionosphère et le sol. Que pouvez vous conclure quant à la validité du modèle électrique atmosphérique proposé ?

Les araignées volantes positionnent leurs corps de manière à prendre le vent, en éjectant vers le ciel des fils de soie, qui grâce aux courants d'air et au champ électrique leur permettent de s'élever. Darwin nota que ces araignées décollent en présence au niveau du sol de légers courants d'air ascendants ayant des vitesses U de l'ordre de $0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et que le nombre de fils fabriqués par celles-ci peut atteindre quelques dizaines.

On peut montrer que les forces hydrodynamiques sont insuffisantes pour permettre à elles seules de faire s'élever les araignées.

Darwin remarqua que les différents fils tissés par une même araignée s'écartent en éventail du fait d'une répulsion électrostatique. Pour corroborer cette hypothèse, on modélise chaque fil de soie comme un fil rigide isolant, de longueur L que l'on supposera inextensible dans un premier temps, possédant en son extrémité libre, une charge q . Ces charges placées dans le champ électrique terrestre interagissent entre elles. On suppose qu'il y a $2n$ fils et que les charges correspondantes se répartissent régulièrement sur le cercle formant la base d'un cône d'angle α en son sommet S (lequel correspond à l'extrémité commune des soies) avec la verticale (Fig. 2).

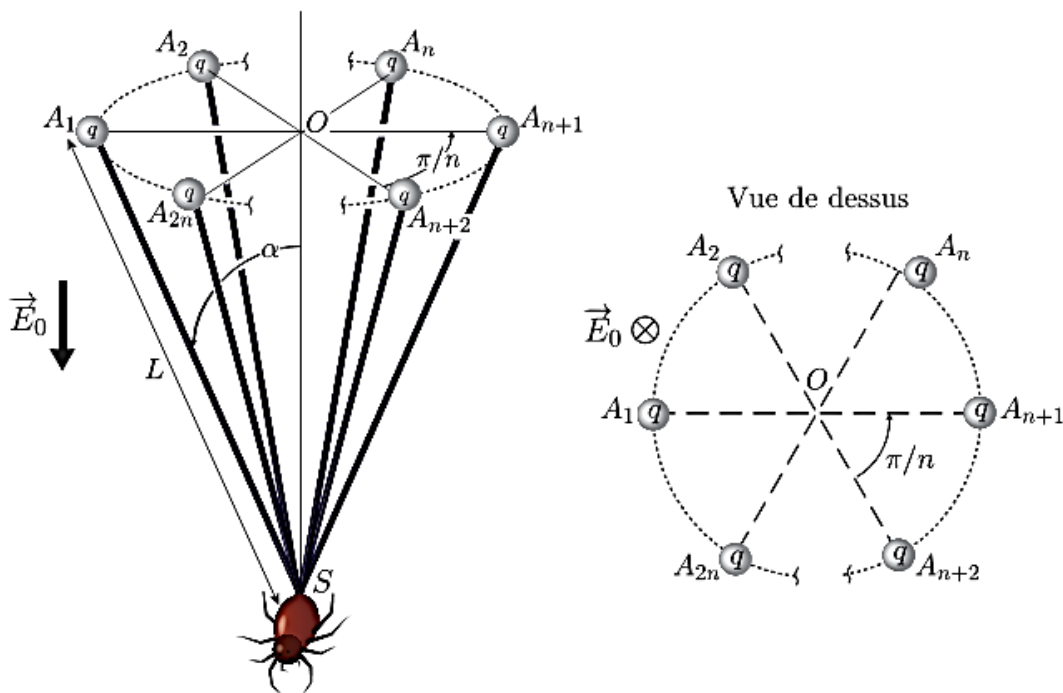


FIGURE 2 – Représentation schématique d'une araignée prête à décoller.

- – 3. Montrer que le potentiel électrique créé sur une charge par les $2n - 1$ autres charges s'exprime comme :

$$V = \frac{q}{p\pi\epsilon_0 L \sin \alpha} G(n) \text{ avec } G(n) - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi k}{2n}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)}$$

On précisera la valeur de l'entier p . On pourra éventuellement considérer les points diamétralement opposés A_k et A_{k+n} avec $1 \leq k \leq n$.

En déduire l'énergie d'interaction électrostatique du système total constitué des $2n$ charges en l'absence de champ électrique extérieur.

S'il n'est soumis qu'à ce potentiel, quelle est alors la forme de l'éventail à l'équilibre ?

On étudie le mouvement de cet éventail autour de sa position d'équilibre en supposant qu'à l'instant t tous les fils forment le même angle $\alpha(t)$ avec la verticale. On simplifie le système en considérant, d'une part, que la masse m de chaque fil est ponctuelle, située en leur milieu et, d'autre part, on néglige l'énergie potentielle de pesanteur et celle de déformation élastique devant l'électrostatique. On suppose finalement que S est fixe.

- – 4. Déterminer l'équation différentielle régissant ce mouvement. Discuter la stabilité de l'équilibre et établir l'expression de la période T , du mouvement au voisinage de la position d'équilibre en fonction de ϵ_0 , m , L , q et $G(n)$.
- – 5. Déterminer l'expression de l'énergie électrostatique du système lorsque celui-ci est maintenant immergé dans le champ électrique terrestre $\vec{E}_0$ existant au niveau du sol ainsi que l'équation permettant de déterminer la valeur de l'angle α à l'équilibre. Expliquer qualitativement comment varie l'ouverture d'équilibre de l'éventail en fonction respectivement de q , n , L et E_0 . On observe un angle $\alpha = 30^\circ$ pour un éventail constitué de $2n = 6$ soies longues de 1 mètre. Que vaut alors la charge q ? On donne $G(3) \simeq 38/(3\sqrt{3})$.
- – 6. Calculer le module de la force électrique s'exerçant sur l'araignée au niveau du sol pour une charge dont le module est de l'ordre du nanocoulomb. Par temps clair et uniquement par la force électrique, combien de fils sont-ils nécessaires pour soulever les plus petites araignées ? Commenter ce résultat.

II Propriétés mécaniques des fils d'araignée

L'élongation relative d'un fil de soie de longueur initiale ℓ_0 de section S_0 soumis à une force de traction d'intensité F est donnée, dans le régime des faibles élongations, par la loi de Hooke : $\frac{\delta \ell}{\ell_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S_0}$ où E est le module de Young du matériau constituant le fil.

- – 9. Quelle est la dimension de E ?

Montrer que, dans ce régime, le comportement mécanique du fil peut être assimilé à celui d'un ressort de constante de raideur k que l'on exprimera en fonction des données du problème.

Pour mesurer le module de Young d'un fil d'araignée, on procède à une expérience simple. Le fil de longueur ℓ_0 est attaché en deux points fixes A et B distants de ℓ_0 et situés sur une même horizontale. Une masse m est suspendue au point C milieu du fil. Sous l'effet du poids de cette masse, le fil adopte à l'équilibre une forme en V, dans laquelle les deux segments formant le fil ont la même longueur ℓ .

On mesure alors la hauteur h dont le milieu du fil s'est déplacé par rapport à l'horizontale. Cette configuration d'équilibre est représentée sur la figure 4.

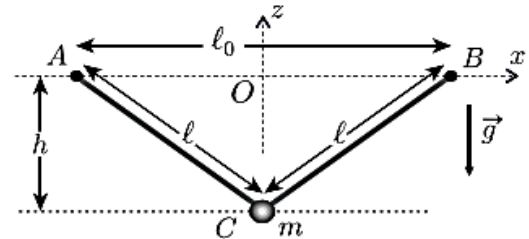


FIGURE 4 – Extension d'un fil.

- – 10. Établir, lorsque la masse m est suffisamment faible, la loi de puissance qui relie h à m et aux autres variables du problème.

La figure 5 ci-contre reproduit les résultats de cette expérience réalisée avec un fil de longueur $\ell_0 = 5$ cm de rayon $a = 5 \mu\text{m}$ et différentes masses m suspendues.

- – 11. Vérifier que la loi obtenue à la question 10 est compatible avec l'expérience.

Déterminer la constante de raideur k du ressort équivalent au fil ; en déduire une estimation de la valeur numérique du module de Young du fil. On pourra utiliser la figure 9 du formulaire.

L'araignée *Hyptiote cavatus*, qui possède une masse d'environ 7 mg, utilise ses muscles pour enrouler l'un des fils afin de tendre la toile, comme on utilise son bras pour tendre la corde d'un arc.

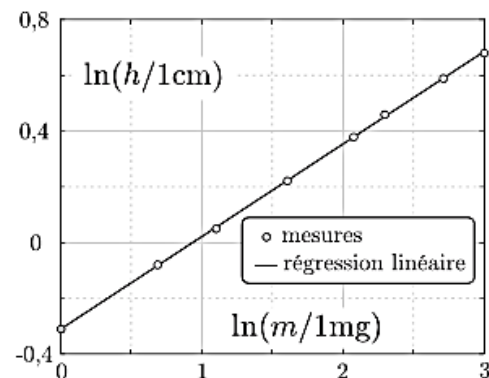


FIGURE 5 – Mesures de $h(m)$.

Elle garde alors cette position jusqu'à ce qu'une proie entre en contact avec la toile. Quand elle relâche la tension, la toile subit alors une très forte accélération puis s'emmêle autour de l'insecte proie, ce qui marque le début du processus de capture.

La vitesse de l'araignée qui reste accrochée à la toile atteint alors une valeur maximale d'environ $v_{\text{max}} = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ en ayant subi une accélération maximale prodigieuse $a_{\text{max}} = 800 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

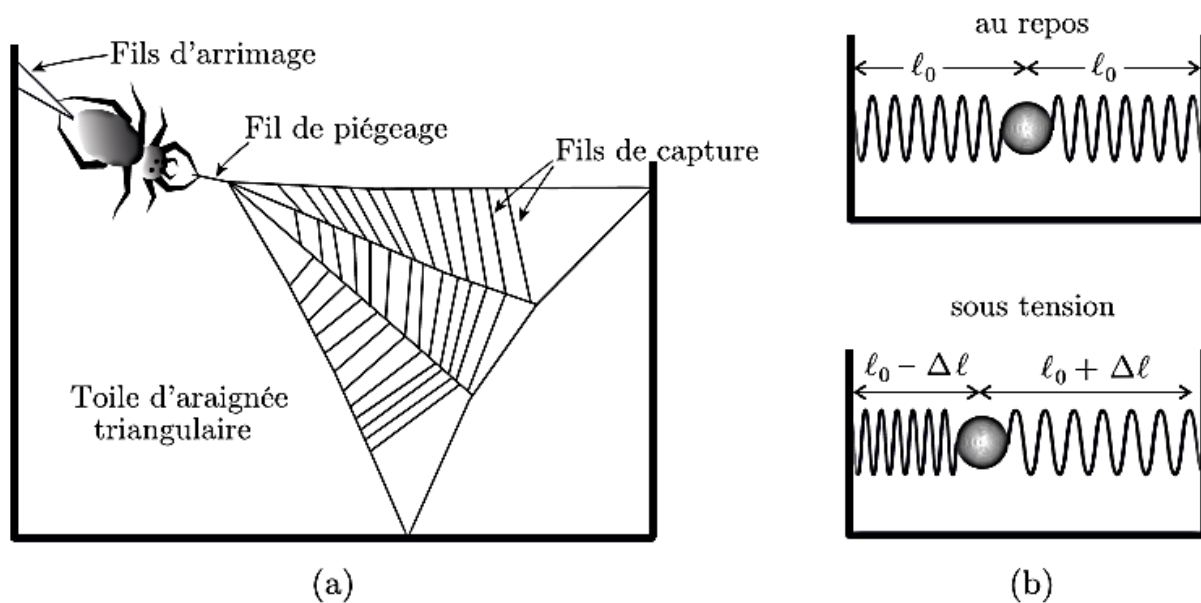


FIGURE 6 – (a) Organisation spatiale schématique de la toile triangulaire servant de piège – (b) Modèle mécanique équivalent au repos et sous tension

- – 12. En modélisant la toile par un simple fil de soie dont on négligera la masse devant celle de l'araignée, estimer, en fonction de $v_{\max}$ et $a_{\max}$, l'allongement maximum $\Delta\ell$ du fil avant que l'araignée ne relâche la tension (Fig. 6), ainsi que sa raideur k en fonction de m , $v_{\max}$ et $a_{\max}$.

Évaluer, en fonction de m , $v_{\max}$ et $a_{\max}$, la puissance mécanique instantanée maximale $\mathcal{P}_{\max}$ développée pendant le processus de capture.

Sachant que la puissance massique musculaire maximale que peuvent fournir les arthropodes est d'environ $\mathcal{P} = 326 \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$ par kilo de muscle, estimer la masse de muscle nécessaire qu'il faudrait à notre araignée pour réaliser ce processus de capture sans aide extérieure. Conclure.

Ex 5 : Fonctions spéciales

Bon nombre de problèmes rencontrés en physique peuvent être résolus à l'aide de « fonctions spéciales ». Ces fonctions définies mathématiquement sont implémentées dans de nombreuses bibliothèques informatiques (comme `scipy`) et peuvent être utilisées aussi simplement qu'une fonction sinus ou racine carrée qui sont elles aussi d'une certaine manière des fonctions spéciales et tout aussi analytiques ...

On rencontre bien souvent des résolutions numériques de problèmes physiques alors que l'utilisation de ces fonctions spéciales permet une résolution complète et analytique. Ce problème se propose d'illustrer l'intérêt de ces « fonctions spéciales ».

I La fonction de W de LAMBERT

I.A Tir d'un projectile sans frottements

Un projectile assimilé à un point matériel de masse m est lancé à partir du sol en O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 \in (O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et faisant un angle θ_0 avec l'horizontale dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

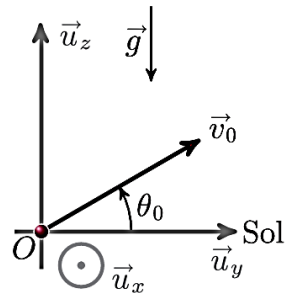


FIGURE 1 – Tir d'un projectile

- – 1. Rappeler la définition d'un référentiel galiléen. Dans quelle mesure le référentiel terrestre peut-il être supposé galiléen ?
- – 2. Établir les équations horaires du mouvement.
Montrer que le mouvement est plan.
- – 3. Établir l'équation de la trajectoire. Quelle est la forme de la trajectoire ? Est-elle symétrique ?
- – 4. Déterminer les coordonnées du sommet S de la trajectoire. Définir la portée ℓ du tir et établir son expression. Quel est l'angle θ_0 assurant un tir de portée maximale ?

I.B Tir d'un projectile avec frottements

On considère maintenant que le projectile est soumis à une force de frottements proportionnelle à la vitesse : $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ avec $\alpha > 0$.

- – 5. Quelle est la dimension du coefficient α ? Définir à partir de α un temps caractéristique τ . Le mouvement reste-t-il plan ?
- – 6. Établir, en fonction $g, \tau, v_0 = \|\vec{v}_0\|, \theta_0$ et t , les nouvelles équations horaires du mouvement.
- – 7. Dans la situation où $t \ll \tau$, simplifier les équations horaires de la trajectoire et donner l'allure du mouvement.
- – 8. Dans la situation où $t \gg \tau$, simplifier les équations horaires du mouvement en faisant apparaître une vitesse limite v_∞ .
Où retombe le projectile ?
- – 9. Dédire des résultats précédents, l'allure globale de la trajectoire dans une situation où le temps de vol est grand devant τ , en séparant la trajectoire en trois phases.
- – 10. Tracer l'allure de la trajectoire pour un temps de vol de l'ordre de τ .

I.C La portée maximale d'un tir avec frottement

- – 11. Dresser le tableau de variation de la fonction $T : \chi \mapsto T(\chi) = \chi e^\chi$ et déterminer la valeur β de son minimum global.

La fonction W de LAMBERT est définie comme étant la fonction réciproque de T sur $[\beta, +\infty[$. Reproduire le graphe de T représenté sur la partie gauche de la figure 2 et expliquer comment en déduire l'allure de W représenté sur la partie droite.

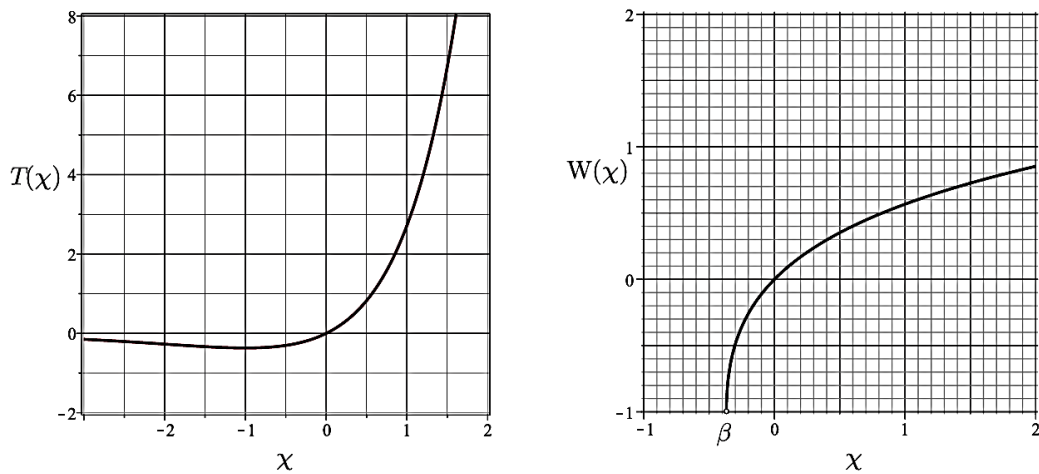


FIGURE 2 – Représentations graphiques de $T(\chi)$ (à gauche) et $W(\chi)$ (à droite)

- – 12. On peut montrer que : $(\chi + \exp[W(\chi)]) W'(\chi) = 1$. Quelle est la valeur de $W(0)$?

On souhaite appliquer le schéma d'EULER explicite avec un pas $h = 0.0001$ pour résoudre cette équation différentielle. Donner le code python permettant d'obtenir une représentation graphique de $W(\chi)$ sur l'intervalle $[0; 2,5[$.

La fonction $W(\chi)$ est implémentée dans `scipy`. On peut l'appeler avec : `from scipy.special import lambertw`.

On montre que si $ad \neq 0$, la solution de l'équation $at + b + ce^{dt} = 0$ pour l'inconnue t est donnée par l'expression

$$t = -\frac{b}{a} - \frac{1}{d} W\left(\frac{cd}{a} \exp\left(-\frac{bd}{a}\right)\right).$$

- – 13. En déduire à quel instant $t^* > 0$ le projectile touche le sol. On posera $u = -\left(1 + \frac{v_0 \sin \theta_0}{g\tau}\right)$.

- – 14. On rappelle que par définition $W \exp(W) = \text{Id}$ où Id est la fonction identité : $\chi \mapsto \chi$.

En déduire que la portée est donnée par $\ell = \tau v_0 \cos \theta_0 (1 - W(u e^u)/u)$.

En posant $\gamma = v_0/v_\infty$, on montre que l'angle initial donnant la portée maximale est :

$$\theta_{\max} = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{\gamma W\left(\frac{\gamma^2 - 1}{e}\right)}{\gamma^2 - 1 - W\left(\frac{\gamma^2 - 1}{e}\right)}\right) & \text{si } \gamma \neq 1 \\ \arcsin\left(\frac{1}{e - 1}\right) \simeq 35,6^\circ & \text{si } \gamma = 1 \end{cases}$$

- – 15. À l'aide de la figure 2, déterminer la valeur numérique de l'angle assurant la portée maximale pour $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $\tau = 0,4 \text{ s}$.

II L'intégrale elliptique de première espèce

Dans toute cette partie on néglige les frottements de l'air.

On étudie un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m et d'une tige rigide de longueur ℓ et de masse négligeable, astreint à évoluer dans un plan vertical $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

On repère sa position par l'angle $\theta(t)$. À $t = 0$ on lâche le pendule sans vitesse initiale avec $\theta(t = 0) = \theta_0 \in]0, \pi/2[$.

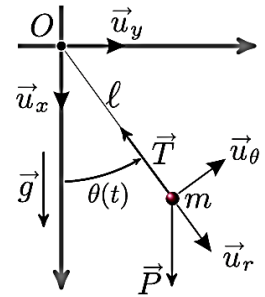


FIGURE 3 – Pendule simple

□ – 16. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la fonction $\theta(t)$.

□ – 17. On fait l'approximation des petits angles tels que $\sin \theta \sim \theta$.

Établir dans ces conditions la période T_0 des oscillations.

□ – 18. Déterminer l'expression générale de $\frac{d\theta}{dt}$ sans faire l'approximation des petits angles.

En déduire que la période T des oscillations du pendule est donnée par :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}.$$

En effectuant le changement de variable $\sin \frac{\theta}{2} = \sin \phi \sin \frac{\theta_0}{2}$, on montre que :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \mathcal{K} \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) \quad \text{avec} \quad \mathcal{K}(\chi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \chi \sin^2 \phi}}.$$

On souhaite calculer l'intégrale $\mathcal{K}(\chi)$ par la méthode des rectangles médians pour un angle $\theta_0 = \pi/3$.

□ – 19. Après avoir tracé le graphe de la fonction $\chi \mapsto 1 + \sqrt{\chi}$ pour $\chi \in [0; 9]$, illustrer le principe de la méthode des rectangles médians pour calculer le réel $I = \int_0^9 (\sqrt{\chi} + 1) d\chi$ en utilisant 9 rectangles.

Si on double le nombre de rectangles utilisés qu'en est-il de la différence entre la valeur exacte de I et la valeur approchée numériquement par la méthode des rectangles médians ?

□ – 20. Recopier et compléter le code suivant permettant de calculer $\mathcal{K}(\chi)$ par la méthode des rectangles médians.

```
1 import math as m
2 def f(x,phi):
3     return.....
4
5 S = 0.
6 N = 100
7 a = 0.
8 b = m.pi/2.
9 pas = .....
10 theta_0 = m.pi/3.
11 x = m.sin(theta_0)**2
12 for i in range(N):
13     phi = .....
14     S = .....
15
16 print(pas * S)
```

python code

La fonction $\chi \mapsto \mathcal{K}(\chi)$ est nommée intégrale elliptique complète de première espèce. La commande `from scipy.special import ellipk` permet de l'appeler directement dans `scipy`.

- – 21. En utilisant la figure 4, pour un pendule tel que $T_0 = 1$ s, évaluer T lorsque $\theta_0 = 50^\circ$. Quel est le décalage temporel induit par la prise en compte de l'approximation des petits angles si l'on envisage de mesurer une heure ?

Au XVII^e siècle les puissances maritimes désiraient posséder des instruments précis pour la mesure du temps afin de faciliter la navigation (notamment pour déterminer la longitude). Les rois de FRANCE et d'ANGLETERRE avaient offert des prix importants à qui serait capable de réaliser un chronomètre précis, fiable et utilisable en mer.

Christiaan HUYGENS (1629-1695) motivé par ce problème étudia le pendule conique et le pendule oscillant entre deux lames courbes. Il parvint à démontrer que des lames en forme de cycloïde assurent l'isochronisme rigoureux des oscillations.

- – 22. Dans quelle situation courante rencontre-t-on la cycloïde ?

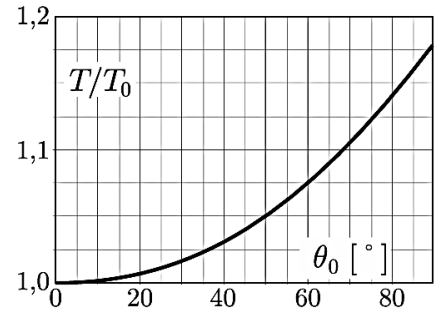


FIGURE 4 – $\theta_0 \mapsto T(\theta_0)/T_0$

-- FIN DE L'ENONCE --