– Interro n°06 – Sujet A –

– 21 novembre 2025 –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.
   Soit $k \in [\![1 \,;\, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les éléments propres de A.
3. Déterminer la nature de la série de terme général : $(-1)^n \left(\tan \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right)$.
4. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Justifier.
5. Calculer la dérivée de la fonction suivante : $f : x \mapsto \ln \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

– Interro n°06 – Sujet B –

– 21 novembre 2025 –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}$.
   Soit $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les éléments propres de A.
3. Déterminer la nature de la série de terme général : $(-1)^n \left(\sin \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \tan \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right)$.
4. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Justifier.
5. Calculer la dérivée de la fonction suivante : $f : x \mapsto \ln \dfrac{\sqrt{2+x^2}-1}{\sqrt{2+x^2}+1}$.

– Interro n°06 – Sujet A –

– 21 novembre 2025 –

1. Soit $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$. $z^k - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} 2\mathrm{i}\sin\left(k\frac{\pi}{n}\right)$. On a $\left|z^k - 1\right| = 2\left|\sin\left(k\frac{\pi}{n}\right)\right|$. Or, $0 < \frac{k\pi}{n} < \pi$, donc $\sin\left(k\frac{\pi}{n}\right) > 0$ et $\left|z^k - 1\right| = 2\sin\left(k\frac{\pi}{n}\right)$.

   On en déduit qu'un argument est $\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les éléments propres de A.

   On commence par calculer le polynôme caractéristique de A.

   $$\chi_A = (X-5)(X-3) - 3 = X^2 - 8X + 12 = (X-2)(X-6)$$

   A a 2 valeurs propres distinctes. On en déduit que A est diagonalisable (même si ce n'était pas demandé. De plus, $\dim E_2(A) = \dim E_6(A) = 1$.

   $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors $(A - 2I_2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors, $E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   $A - 6I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. On a alors $(A - 3I_2)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors, $E_6(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer la nature de la série de terme général : $(-1)^n\left(\tan\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

   Au voisinage de 0,

   $$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$$

   D'où $\tan(x) - \sin x = \frac{x^3}{2} + \mathrm{o}(x^3)$ et $\tan\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{3/2}}$.

   En posant $u_n = (-1)^n\left(\tan\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{3/2}}$. Comme $3/2 > 1$, la série de terme général u_n est absolument convergente, donc convergente.

4. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Justifier.

   $$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 1 \\ -2 & X-1 & 2 \\ -3 & 1 & X+2 \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=} (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & X-1 & 2 \\ 1 & 1 & X+2 \end{vmatrix}$$

   $$\underset{=}{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C1}} \quad (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & 2 \\ 1 & 0 & X+1 \end{vmatrix}$$

   On a en développant par rapport à la première ligne $\chi_A(X) = (X-1)^2(X+1)$.

On détermine $\dim(\operatorname{Ker}(A - I_3))$. On a déjà $\dim(\operatorname{Ker}(A - I_3)) \geqslant 1$ car 1 est valeur propre. De plus,

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes. Donc $\operatorname{rg}(A - I_3) \geqslant 2$ et $\dim(\operatorname{Ker}(A - I_3)) \leqslant 1$. On a donc $\dim(\operatorname{Ker}(A - I_3)) = 1 < 2$. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

5. Calculer la dérivée de la fonction suivante : $f : x \mapsto \ln \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} + 1}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $1 + x^2 > 1$ donc $\sqrt{1+x^2} > 1$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2}+1)\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - (\sqrt{1+x^2}-1)\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{4x}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \frac{4}{x\sqrt{1+x^2}}$$

– Interro n°06 – Sujet B–

– 21 novembre 2025 –

1. Soit $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$. $z^k - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{2n}} 2\mathrm{i}\sin\left(k\dfrac{\pi}{2n}\right)$. On a $\left|z^k - 1\right| = 2\left|\sin\left(k\dfrac{\pi}{2n}\right)\right|$. Or, $0 < \dfrac{k\pi}{2n} < \dfrac{\pi}{2}$, donc $\sin\left(k\dfrac{\pi}{n}\right) > 0$ et $\left|z^k - 1\right| = 2\sin\left(k\dfrac{\pi}{2n}\right)$.

   On en déduit qu'un argument est $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{k\pi}{2n}$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les éléments propres de A.

   On commence par calculer le polynôme caractéristique de A.

$$\chi_A = (X-4)(X-1) + 2 = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$$

   A a 2 valeurs propres distinctes. On en déduit que A est diagonalisable (même si ce n'était pas demandé. De plus, $\dim E_2(A) = \dim E_3(A) = 1$.

   $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. On a alors $(A - 2I_2)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors, $E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   $A - 3I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. On a alors $(A - 3I_2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors, $E_3(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Déterminer la nature de la série de terme général : $(-1)^n\left(\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

   Au voisinage de 0,

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$$

   D'où $\sin x - \tan x = -\dfrac{x^3}{2} + \mathrm{o}(x^3)$ et $\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \tan\dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^{3/2}}$.

   En posant $u_n = (-1)^n\left(\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^{3/2}}$. Comme $3/2 > 1$, la série de terme général u_n est absolument convergente, donc convergente.

3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Justifier.

   On a en développant par rapport à la première colonne

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & -4 \\ -1 & X & 8 \\ 0 & -1 & X-5 \end{vmatrix} = X\begin{vmatrix} X & 8 \\ -1 & X-5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & X-5 \end{vmatrix}$$

   Donc $\chi_A(X) = X(X^2 - 5X + 8) - 4 = X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X-1)(X^2 - 4X + 4) = (X-1)(X-2)^2$.

   On détermine $\dim(\mathrm{Ker}\,(A - 2I_3))$. On a déjà $\dim(\mathrm{Ker}\,(A - 2I_3)) \geqslant 1$ car 2 est valeur propre. De plus,

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes. Donc $\operatorname{rg}(A-2I_3) \geqslant 2$ et $\dim(\operatorname{Ker}(A-2I_3)) \leqslant 1$. On a donc $\dim(\operatorname{Ker}(A-2I_3)) = 1 < 2$. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

4. Calculer la dérivée de la fonction suivante : $f : x \mapsto \ln \dfrac{\sqrt{2+x^2}-1}{\sqrt{2+x^2}+1}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2 + x^2 > 1$ donc $\sqrt{2+x^2} > 1$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{2+x^2}+1)\dfrac{2x}{\sqrt{2+x^2}} - (\sqrt{2+x^2}-1)\dfrac{2x}{\sqrt{2+x^2}}}{(\sqrt{2+x^2}-1)(\sqrt{2+x^2}+1)} = \frac{4x}{(x^2+1)\sqrt{2+x^2}}$$