– Interro n°04 – Sujet A –

– 10 octobre 2025 –

1. Calculer pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} 2^k$.
2. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$.
3. Déterminer : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$
4. Déterminer la nature et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 - t + t^2}$.
5. Trouver un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

– Interro n°04 – Sujet B –

– 10 octobre 2025 –

1. Calculer pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} 3^k$.
2. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\ln n - (-1)^n}$.
3. Déterminer : $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$
4. Déterminer la nature et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$.
5. Trouver un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

1. Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. Alors,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}2^k = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}2^k = 2n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}2^p$$

avec le changement de variable $p = k-1$. On obtient ainsi avec la formule du binôme

$$S_n = n2(3)^{n-1}$$

2. Pour tout $n \geqslant 2$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\ln(n)}\frac{1}{1+\dfrac{(-1)^n}{\ln n}} = \frac{(-1)^n}{\ln(n)}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\ln(n)} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right)$$

La suite $\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et tend vers 0. Par critère spécial des séries alternées, la série de tg $\dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$ converge.

De plus, en posant $w_n = u_n - \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{\ln(n)^2}$. Or, $\dfrac{1}{n} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{(\ln n)^2}\right)$ donc par comparaison, la série de tg $\dfrac{1}{\ln(n)^2}$ diverge puis la série de tg w_n diverge.

On en déduit que la série de tg u_n diverge.

3. Soit $x > -1$ et $x \neq 0$.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}$$

Or, $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$. Donc $\ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x^2}{2}$. De plus, $x\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$. Alors

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2}{2x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\frac{3}{4} + \left(t+\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\mathrm{d}t$. On fait le changement de variable affine $u = \dfrac{2}{\sqrt{3}}t + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Alors,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

5. Pour tout $n \geqslant 1$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

$$n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n - \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$$

Alors, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} = \dfrac{\mathrm{e}^n}{\sqrt{\mathrm{e}}}\exp(\mathrm{o}(1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^n}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.