MP-MPI Devoir maison n°4 – Physique

Copies finalisées à présenter le 15/12/25

Copies auto-corrigées ramassées le 17/12/25

Contenu :

Ex 1 : Effets de ralentissement et de modification de la distance Terre-Lune

Données
– Constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6{,}67.\ 10^{-11}\ \mathrm{N.m^2.kg^{-2}}$ – Masse du Soleil : $m_S = 1{,}99.10^{30}$ kg – Masse de la Terre : $m_T = 5{,}98.10^{24}$ kg – Masse de la Lune : $m_L = 7{,}34.10^{22}$ kg – Distance Terre-Soleil : $D = 1{,}50.10^{11}$ m – Distance moyenne Terre-Lune : $d = 3{,}84.10^{8}$ m – Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}37.10^{3}$ km – Rayon de la Lune : $R_L = 1{,}75.10^{3}$ km – Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00.10^{8}\ \mathrm{m.s^{-1}}$ – Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}}$ – Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$ – Nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}02.10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$ – Définition du coefficient $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$: rapport des capacités thermiques isobare C_P et isochore C_V d'une même quantité de matière. Pour un gaz parfait de quantité de matière n, on a : $C_P - C_V = nR$.

Le Soleil, la Terre et la Lune sont tous trois supposés à symétrie sphérique. On note T le centre de la Terre, S le centre du Soleil, L le centre de la Lune et O le centre de masse du système solaire. Le vecteur $\overrightarrow{e_z}$ est le vecteur unitaire de l'axe Tz des pôles, autour duquel la terre tourne sur elle-même avec une vitesse angulaire égale à $\Omega_T = 7{,}29.10^{-5}$ rad.s^{-1}. La Lune tourne sur elle-même avec une vitesse angulaire de rotation propre $\Omega_L = 2{,}66.10^{-6}$ rad.s^{-1} autour de l'axe Lz.

Q4. Définir les référentiels : de Copernic R_O, géocentrique noté R_T et terrestre noté R_T*.

On suppose le référentiel de Copernic R_O galiléen. On lui associe le repère $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.
De même, au référentiel géocentrique R_T, on associe $(T, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ et au référentiel terrestre R_T*, on associe $(T, \overrightarrow{e_X}, \overrightarrow{e_Y}, \overrightarrow{e_z})$. On définit un référentiel sélénocentrique R_L ou référentiel barycentrique de la Lune associé au repère $(L, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

Q5. Justifier l'ordre de grandeur de la vitesse de rotation propre de la Terre.

Q6. À quelle condition peut-on considérer le référentiel géocentrique comme galiléen ?
À quelle condition peut-on considérer le référentiel terrestre comme galiléen ?

Q7. La Lune présente toujours la même face à la Terre. Qu'en déduisez-vous en supposant que le centre de la Lune L décrit une trajectoire circulaire à vitesse uniforme autour de T dans le référentiel géocentrique ? Évaluer en jours l'ordre de grandeur de la durée d'une révolution lunaire autour de la Terre.

Dans le référentiel géocentrique, on suppose qu'on peut écrire le principe fondamental pour un point matériel de masse μ, placé en un point M sous la forme

$$\mu\left(\frac{d^2\overrightarrow{TM}}{dt^2}\right)_{R_T} = \overrightarrow{Rext} + \mu\,\overrightarrow{G_{Terre}(M)} + \mu\,\overrightarrow{G_{Lune}(M)} + \mu\,\overrightarrow{G_{autres}(M)} - \mu\left(\frac{d^2\overrightarrow{OT}}{dt^2}\right)_{R_O},$$

en appelant $\overrightarrow{G_{Terre}(M)}$, $\overrightarrow{G_{Lune}(M)}$ et $\overrightarrow{G_{autres}(M)}$ les champs gravitationnels créés respectivement par la Terre, la Lune et les autres astres.

Q8. Interpréter chaque terme de l'égalité ci-dessus en précisant quel théorème de la mécanique est utilisé. Le référentiel géocentrique est-il supposé galiléen ?

Q9. Écrire le théorème de la résultante cinétique (ou théorème de la quantité de mouvement) appliqué à la Terre dans le référentiel de Copernic.

On néglige les effets du Soleil et des autres astres : on considère le système Terre-Lune isolé. On s'intéresse au mouvement du centre de la Lune autour de la Terre dans le référentiel géocentrique considéré galiléen dans la suite de la **partie I-2**. On assimilera la trajectoire de la Lune autour de la Terre à un cercle centré en T.

Q10. Dans cette hypothèse de trajectoire circulaire de rayon d, exprimer la vitesse V de L sur son orbite en fonction de d, $\mathcal{G}$ et m_T. Est-ce compatible numériquement avec le résultat de la question **Q7** ? Exprimer le moment cinétique $\sigma_L(T)$ par rapport au point T associé au mouvement orbital de la Lune en fonction de d, $\mathcal{G}$, m_L et m_T.

On admet que les effets d'attraction lunaire sur les océans créent des bourrelets d'eau symétriques dont la surface limite est un ellipsoïde, de centre T, tangent à la sphère terrestre. La situation est représentée **figure 1** dans le plan orthogonal à $\overrightarrow{e_z}$, donc dans le plan orthogonal à l'axe de rotation de la Lune autour de la Terre. On note θ l'angle entre le grand axe de l'ellipsoïde et la direction T L. Ces effets introduisent un couple de frottement proportionnel à la masse des océans δm et au terme $2\frac{\mathcal{G}m_L}{d^3}R_T$.

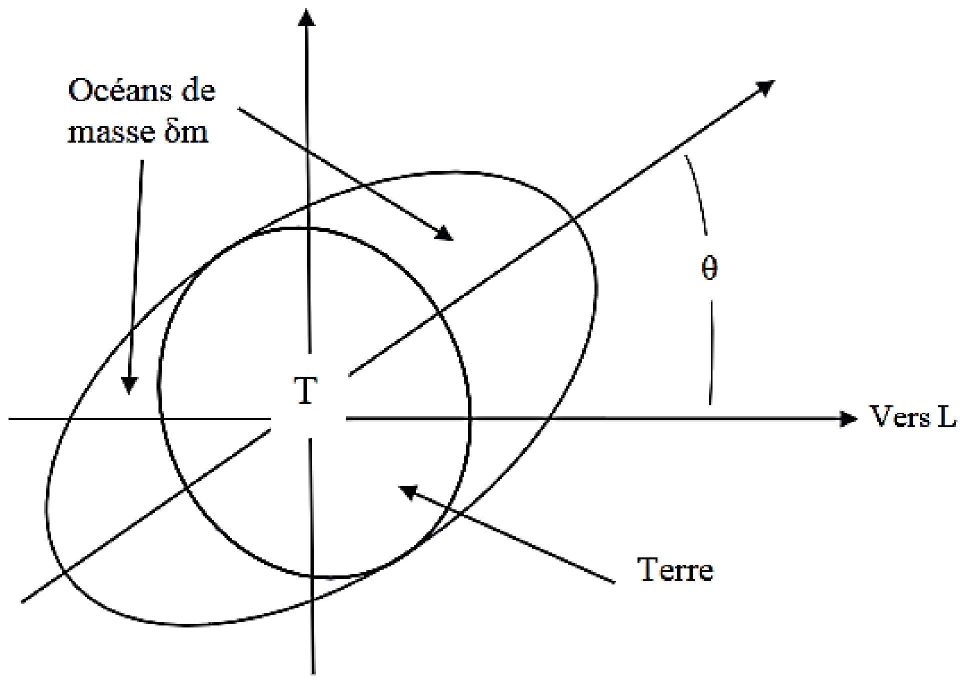

Figure 1 – Surface des océans (l'échelle n'est pas respectée par commodité de représentation)

Q11. Le couple de frottement exercé par la Lune sur la Terre est de la forme :

$$\vec{\Gamma}(T) = -\,a(\sin 2\theta)\delta m\,\frac{\mathcal{G}m_L}{d^3}R_T^2\,\vec{e_z}.$$

Quelle est la dimension de a ?

La quantité $a\delta m\,\frac{\mathcal{G}m_L}{d^3}R_T^2$ est une constante qui vaut $K = 4{,}3.10^{16}$(SI). Le moment d'inertie de la Terre autour de son axe de rotation propre s'exprime par $J = \frac{2}{5}m_T R_T^2$.

Q12. Ce couple de frottement $\vec{\Gamma}(T)$ peut faire diminuer la vitesse de rotation de la Terre Ω_T. À partir d'une méthode, que l'on justifiera, exprimer en fonction de K et J, la variation de celle-ci par unité de temps $\frac{d\Omega_T}{dt}$ pour une position $\theta = 45°$. Faire l'évaluation numérique de $\frac{1}{\Omega_T}\frac{d\Omega_T}{dt}$. Commenter.

On admet que la conservation du moment cinétique du système isolé Terre-Lune permet d'affirmer que, si la vitesse de rotation de la Terre diminue, il y aura augmentation du moment cinétique orbital de la Lune, donc augmentation de la distance Terre-Lune d, le moment cinétique de rotation propre de la Lune étant négligeable devant le moment cinétique orbital. On établit ainsi que la quantité $J\Omega_T + \sigma_L(T)$ reste constante.

Q13. En déduire la variation relative δd/d du rayon de l'orbite lunaire pour une période d'un an. Donner la valeur numérique de δd.

Ex 2 : Le crissement

III.A Les lois de Coulomb

Les crissements et grincements qui caractérisent certains frottements sont des oscillations de relaxation. La fréquence des relaxations est aussi celle de l'onde sonore émise, qui est souvent désagréable à entendre, notamment à cause de sa position dans la gamme des sons aigus. Nous allons en donner une description très simplifiée, dans le cadre des lois, dites de Coulomb, qui régissent le frottement de glissement d'un solide (Σ) en translation relativement à un support fixe (F).
Nous supposerons ici l'existence (figure 7) d'une surface de contact plane entre (Σ) et (F).

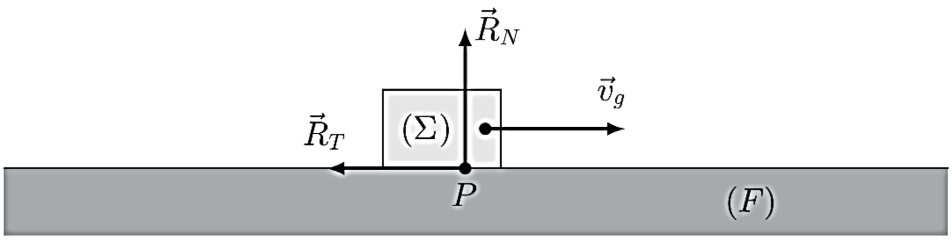

FIGURE 7 – Lois de Coulomb du frottement de glissement

III.B Le modèle de crissement

Lorsqu'on appuie une craie sur un tableau noir avant de la déplacer, on entend parfois distinctement le bruit du crissement lors du déplacement de la craie. Pour étudier cette situation, on modélise (figure 8) la craie et son appui par un solide rectangulaire (Σ) de masse M attaché à un ressort ; le tableau noir par un support fixe (F) confondu avec le plan horizontal (Oxy) ; le déplacement, par le mouvement à vitesse constante v_0 de l'extrémité A du ressort élastique de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.

Le ressort reste constamment parallèle à l'axe (Ox), à $t = 0$ il est à sa longueur naturelle ℓ_0.

L'autre extrémité du ressort, notée H, est liée au mobile (Σ) ; c'est sa vitesse que l'on souhaite étudier. À l'instant $t = 0$, on a $x_H(0) = -\ell_0$.

On note enfin $f_s > f_d$ les coefficients de frottement statique et dynamique de la craie sur le tableau et $g = \|\vec{g}\|$ l'accélération de la pesanteur.

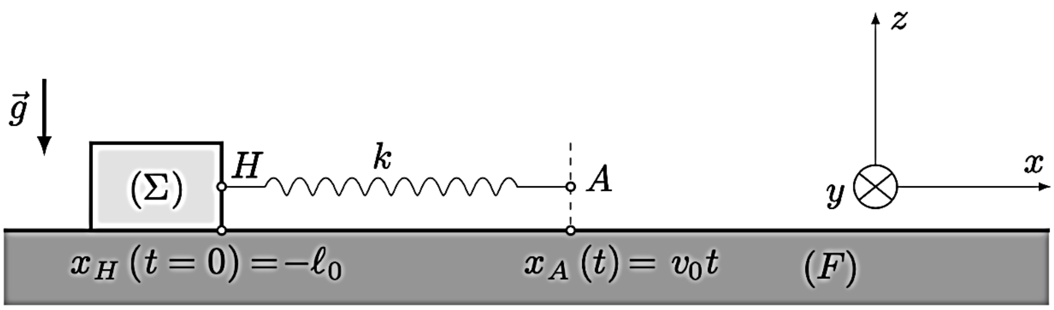

FIGURE 8 – Un modèle pour le crissement

❑ – **18.** Exprimer la force de traction exercée par le ressort sur le mobile en fonction de k, v_0, t et de $X_H(t) = x_H(t) + \ell_0$.
Exprimer aussi la composante normale $\vec{R}_N$ de la force de contact exercée sur la craie.

❑ – **19.** En déduire qu'à partir de $t = 0$ la craie reste immobile jusqu'à l'instant $t = t_0$ que l'on déterminera en fonction de f_s, M, g, k et v_0.

❑ – **20.** On pose $\tau = t - t_0$. Préciser les valeurs de x_A, de X_H et de sa dérivée $V_H = \frac{dX_H}{d\tau}$ à l'instant $\tau = 0$ avant d'expliciter l'équation différentielle vérifiée par $X_H(\tau)$ sous la forme :

$$\frac{d^2X_H}{d\tau^2} + \omega^2 X_H = \omega^2 v_0 \tau + \gamma$$

où l'on exprimera les constantes ω et γ en fonction de k, M, g, f_s et f_d.

III.C Étude du mouvement de crissement

La suite du mouvement du mobile se poursuit en alternant les étapes d'immobilité et de glissement ; le mouvement ainsi observé est périodique de pulsation Ω et il est la cause du bruit de crissement, par exemple, de la craie sur un tableau.
On pourra se reporter au formulaire donné à la fin de cette partie.

❑ – **21.** Déterminer les expressions de $X_H(\tau)$ et $V_H(\tau)$ en fonction de τ, v_0, ω et $\alpha = \dfrac{\gamma}{\omega v_0}$.

On note $\tau_{\max}$ le premier instant où V_H atteint sa valeur maximale $V_{\max}$ et $\theta_{\max} = \omega\tau_{\max}$.

❑ – **22.** Sans nécessairement exprimer $\tau_{\max}$, déterminer les expressions de $\cos(\theta_{\max})$ et $\sin(\theta_{\max})$ en fonction de α. En déduire que $V_{\max} = v_0\left(1 + \sqrt{1 + \alpha^2}\right)$.

Tracer l'allure de la courbe donnant $V_H(\tau)$ puis montrer alors que cette vitesse s'annule à nouveau à un instant $\tau_1 > 0$ correspondant à l'angle $\theta_1 = \omega\tau_1$ dont on exprimera le cosinus et le sinus en fonction de α. On admettra dans la suite que $0 < \alpha < 1$.

La première mise en mouvement du mobile (Σ) correspond à l'intervalle $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$. À l'issue de cette phase, il s'immobilise alors pendant un laps de temps avant de rédémarrer par la suite. On rappelle que longueur du ressort est donnée à chaque instant par $\ell = x_A - x_H$.

❑ – **23.** Déterminer l'expression de $\ell(\tau)$ et en déduire la longueur du ressort $\ell(0)$ à l'instant $\tau = 0$. Montrer qu'à l'instant τ_1 elle est devenue $\ell(\tau_1) = \ell(0) - 2\alpha v_0/\omega$.

En déduire la durée τ_2 qui devra alors s'écouler avant que le mobile se remette en mouvement. Compléter alors le tracé de la question précédente en faisant apparaître une période T complète du mouvement du mobile ; préciser sur ce schéma dans quelle phase du mouvement il y a *augmentation continue d'une contrainte* et dans quelle phase il y a *relâchement subit* de celle-ci.

Exprimer Ω en fonction de τ_1 et τ_2 puis en fonction de ω, α et θ_1.

❑ – **24.** Pour estimer les ordres de grandeur du phénomène, on prend $\theta_{\max} = 5\pi/6$ avec un frottement caractérisé par $f_s \simeq 1$ et $f_d \simeq 0{,}6$ pour une vitesse de traction du ressort $v_0 = 1\,\mathrm{cm/s}$. On prendra $g \simeq 10\,\mathrm{m/s^2}$. En déduire les valeurs numériques de α, puis de Ω.

Quel lien existe-t-il entre cette pulsation et celle du son émis ?

Préciser et justifier le domaine fréquentiel du crissement.

Formulaire et données numériques

On donne $\ln(2) = 0{,}7$ et $\ln(3) = 1{,}1$.

Si $t = \tan\theta$ alors $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $\sin^2\theta = \dfrac{t^2}{1+t^2}$.

On rappelle par ailleurs que $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$.

On pourra prendre $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0{,}58$, $\pi \simeq 3{,}14$ et $2/\pi \simeq 0{,}64$;