

Manipulate des eqs de Maxwell

$$\begin{cases} \vec{E}(M,t) = f(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_z \\ \vec{B}(M,t) = g(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_y \end{cases}$$

separate var/spatiales
temporelle

espace vide

$$1). \text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \Rightarrow \text{div } \vec{E} = 0 \text{ ok avec M-G ds le vide } \rho = 0$$

$= 0$ car E_x ne dépend que de z

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (B_x = 0 = B_z \text{ et } B_y \text{ indpt de } y) \Rightarrow \text{div } \vec{B} = 0 \text{ ok avec Maxwell-Flux.}$$

$$2). \text{M-F} \quad \vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{e}_y = \frac{df}{dz} \cdot e^{-t/\tau} \vec{e}_y$$

selon $\vec{e}_y$:

$$\frac{df}{dz} e^{-t/\tau} = \frac{g(z)}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow g(z) = \tau \cdot \frac{df}{dz}$$

$$\bullet - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - g(z) \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-t/\tau} \vec{e}_y$$

$$3). \text{M-A ds le vide} \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial B_y}{\partial z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \frac{dg}{dz} e^{-t/\tau} \vec{e}_x$$

selon $\vec{e}_x$:

$$\frac{dg}{dz} e^{-t/\tau} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{f(z)}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{\tau}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{dg}{dz}$$

$$4). f(z) = \frac{\tau}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \frac{dg}{dz} = \frac{\tau}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \frac{d}{dz} \left(\tau \cdot \frac{df}{dz} \right) = \frac{\tau^2}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{d^2 f}{dz^2}$$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\tau^2} \cdot f(z) \rightarrow \text{eq caract. } \lambda^2 = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\tau^2} = \frac{1}{c^2 \tau^2} > 0$$

$$f(z) = A e^{z/\lambda} + B e^{-z/\lambda}$$

$$\vec{E}(M,t) = f(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_x$$

$$\bullet \vec{E}(z=0, t=0) = E_0 \vec{e}_x = f(0) \cdot 1 \vec{e}_x$$

$$\Leftrightarrow f(0) = E_0$$

$$\Leftrightarrow A+B = E_0$$

$$\bullet \forall t, \lim_{z \rightarrow +\infty} \vec{E}(z,t) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \forall t, \lim_{z \rightarrow +\infty} (A e^{z/c\tau} + B e^{-z/c\tau}) e^{-t/\tau} \vec{e}_x = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=E_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A=0$$

$$\Rightarrow f(z) = E_0 e^{-z/c\tau}$$

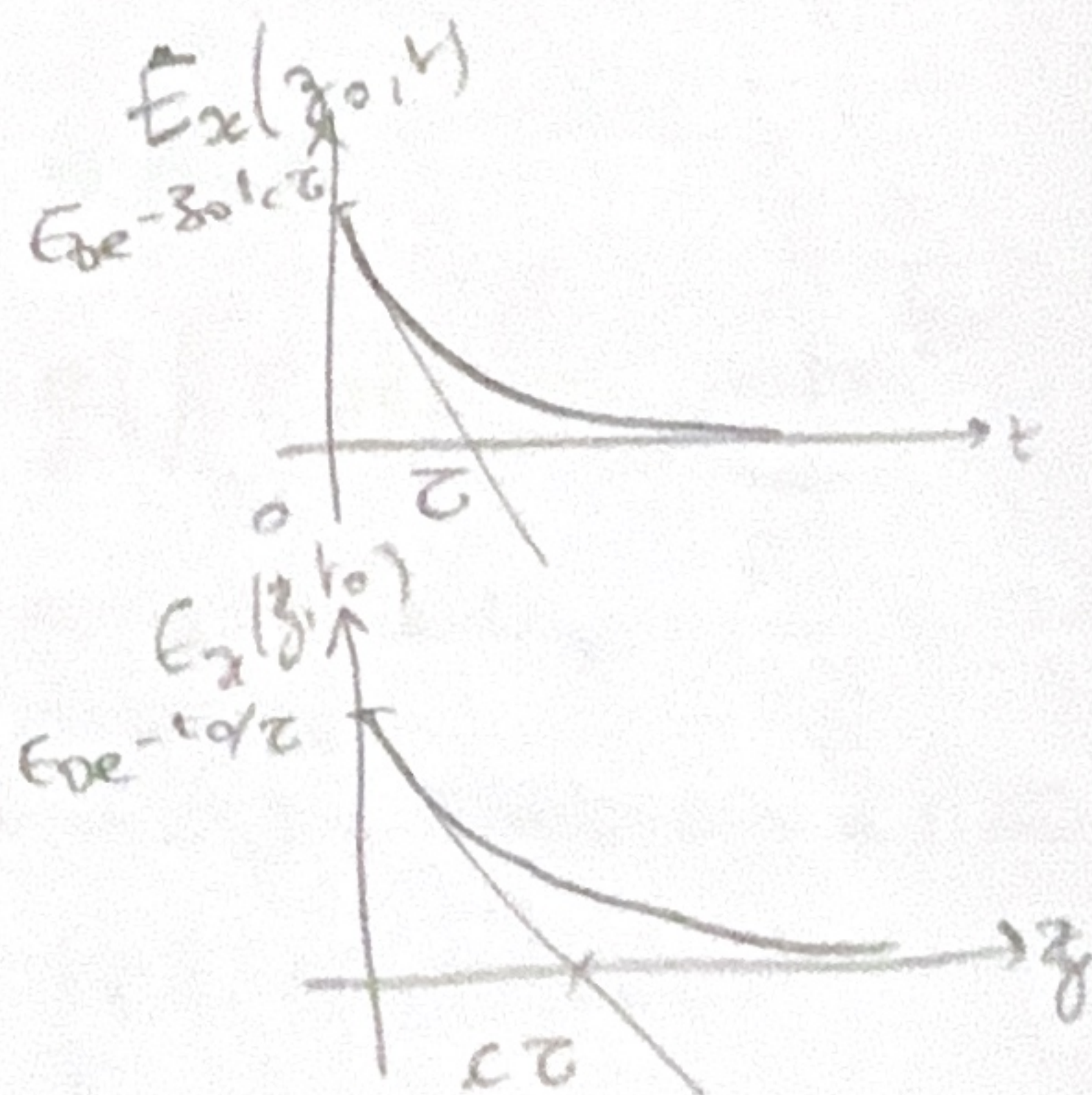
$$\bullet \Rightarrow \vec{E}(M,t) = E_0 e^{-z/c\tau} \cdot e^{-t/\tau} \vec{e}_x$$

$$\text{On a } g(z) = \tau \cdot \frac{df}{dz} = \tau \cdot E_0 \left(-\frac{1}{c\tau} \right) e^{-z/c\tau}$$

$$\text{ainsi } \vec{B}(M,t) = -\frac{E_0}{c} e^{-z/c\tau} \cdot e^{-t/\tau} \vec{e}_y$$

le champ transitoire
et atténué

ne correspond pas
aux ondes que l'on étudiera
ds les ch. propagat°.



Bilan d'énergie d'un condensateur plan en rég. lentement variable.

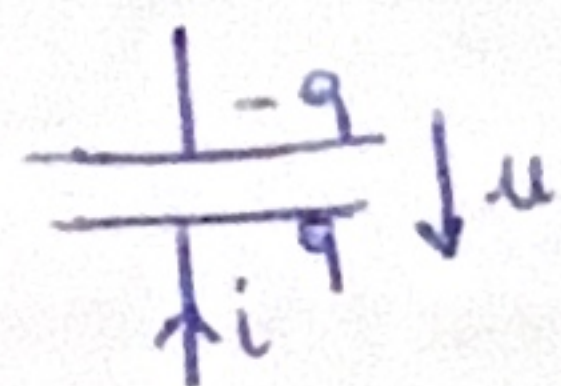
1).

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = I_0 \cos(\omega t).$$

$$\Rightarrow q(t) = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t) + q_0$$

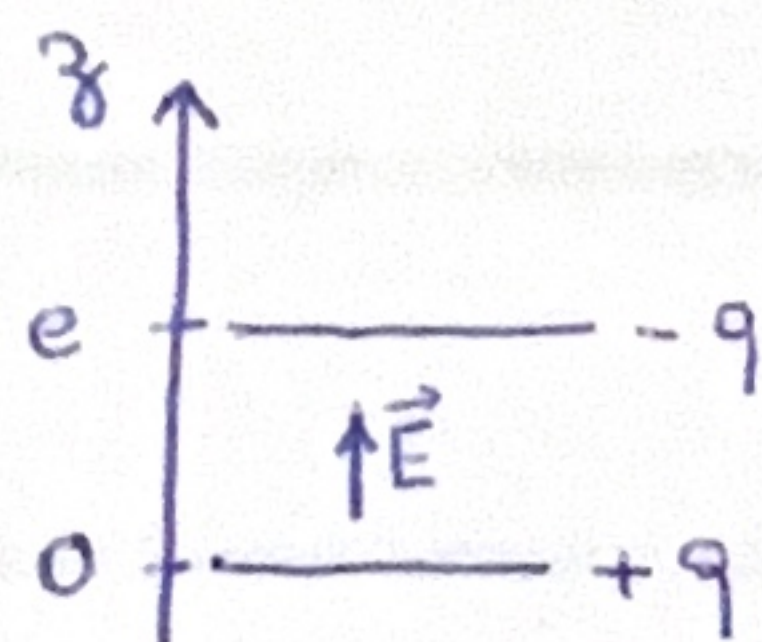
$$\langle q(t) \rangle = \underbrace{\left\langle \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t) \right\rangle}_{=0} + q_0 = 0$$

$$\text{d'où } q(t) = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t)$$



$$u = \frac{q}{C} \quad \text{d'où} \quad u(t) = \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t)$$

2).



$$\vec{E}(z,t) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } z < 0 \text{ ou } z > e \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{pour } z \in]0, e[\end{cases}$$

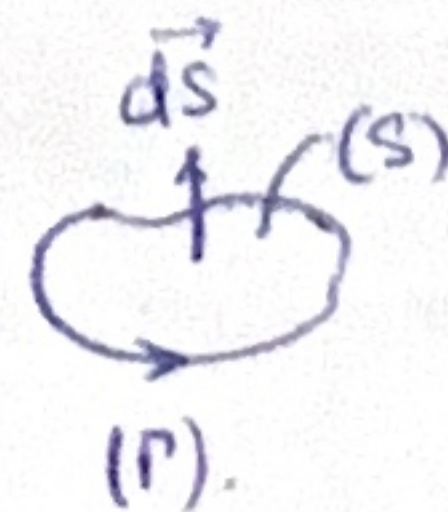
$$\text{avec } \sigma = \frac{q}{\pi a^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M,t) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } z < 0 \text{ ou } z > e \\ \frac{I_0}{\pi a^2 \epsilon_0 \omega} \sin(\omega t) \vec{u}_z & \text{pour } z \in]0, e[. \end{cases}$$

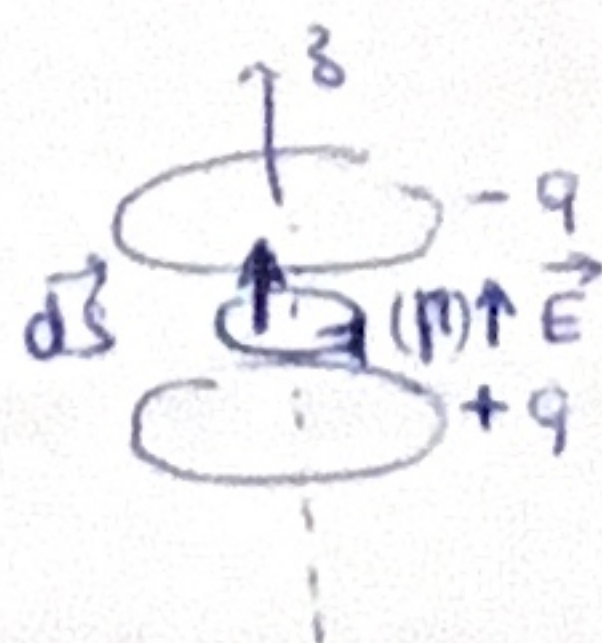
$$3). \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

entre les armatures $\vec{j} = \vec{0}$, mais $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{B} \neq \vec{0}$.

• th. d'Ampère généralisé: $\oint_{(P)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \right)$



$\vec{B}$ selon $\vec{u}_\theta$ car plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ de sym. de la diste de charges et du champ $\vec{E}$



+ invariance par rotation autour de $(Oz) \Rightarrow \vec{B}(M,t) = B(r,z,t) \vec{u}_\theta$.

(P) cercle $\begin{cases} \text{d'axe } (Oz) \\ \text{de rayon } r. \\ \text{en } z \in [0, e] \end{cases}$

$$\begin{aligned} \oint_{(P)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= B(r,z,t) \cdot 2\pi r \\ \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{I_0}{\pi a^2 \epsilon_0 \omega} \sin(\omega t) \cdot \pi r^2 \\ &\quad \text{disque s'appuyant sur (P)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B(r,z,t) \cdot 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \frac{I_0 r^2}{a^2 \omega} \cos(\omega t) \Rightarrow B(r,z,t) = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi a^2} \cos(\omega t)$$

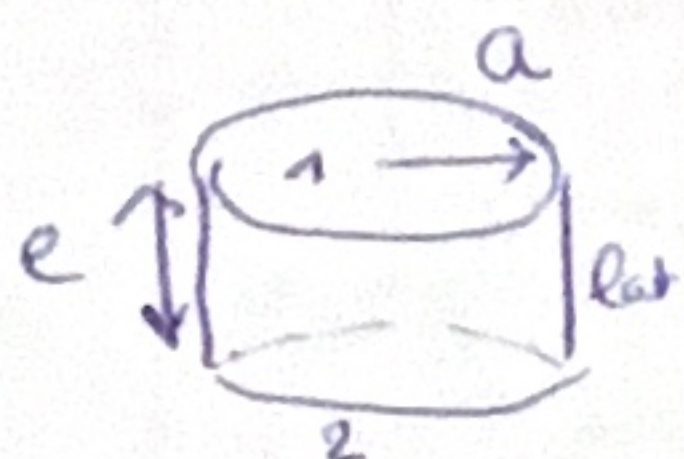
$$\vec{B}(M,t) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } z < 0 \text{ ou } z > e \\ \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a^2} \cos(\omega t) \vec{u}_\theta & \text{pour } z \in]0, e[. \end{cases}$$

$$\frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi a^2} \ll \frac{I_0}{\pi a^2 \omega a} \quad \omega \ll \frac{2}{\mu_0 \epsilon_0 a^2} = \frac{2c^2}{a^2}$$

$$4). \vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{I_0}{\pi a^2 \epsilon_0 \omega} \sin(\omega t) \vec{u}_3 \wedge \frac{\mu_0 I_0 \pi}{2\pi a^2} \cos(\omega t) \vec{u}_\theta \quad \text{pour } z \in]0, e[.$$

$$\vec{\pi} = - \frac{I_0^2 \pi \sin^2(\omega t) \cos(\omega t)}{2\pi^2 a^4 \epsilon_0 \omega} \vec{u}_r$$



$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_{\text{lat}}$$

$$d\vec{S}_1 = dS_1 \vec{u}_3 \perp \vec{\pi}$$

$$d\vec{S}_2 = -dS_2 \vec{u}_3 \perp \vec{\pi}$$

$$d\vec{S}_{\text{lat}} = dS_{\text{lat}} \vec{u}_r.$$

$$\rightarrow \phi_\pi = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{\pi} \cdot d\vec{S}_{\text{lat}} = - \frac{I_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{2\pi^2 a^4 \epsilon_0 \omega} \cdot 2\pi a e$$

$$e) \phi_\pi = - \frac{I_0 \sin(\omega t) e}{\pi a^2 \epsilon_0 \omega} \cdot i(t).$$

$$\phi_\pi = - \left(\frac{I_0 \sin(\omega t)}{C \omega} \right) i(t).$$

donnée

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e} = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{e}$$

ainsi

$$\phi_\pi = \underbrace{-u \times i}_{p^e \text{ reçue par } C} = p^e \text{ fournie par } C \rightarrow p^e \text{ rayonnée.}$$

flux ϕ_π sortant

$$\frac{1}{\pi i} \downarrow u$$

Profil de masse volumique au sein de la Terre

1). $\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi\epsilon_g M_{int}$

→ th. de Gauss électrostatique

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{g} \leftrightarrow \vec{E}$$

$$\epsilon_g \leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$M_{int} \leftrightarrow Q_{int}$$

2). $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ← densité vol³ de charges

$\text{div } \vec{g} = -4\pi\epsilon_g \rho$ ← masse vol³

3). $r \in [0, R_N[\quad g(r) = a \cdot r$ avec $a = \frac{g_0}{R_N}$

$$\text{div } \vec{g} = -4\pi\epsilon_g \rho$$

en sphériques:

$$\text{div } \vec{g} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot (-g(r)))$$

$$\Leftrightarrow \text{div } \vec{g} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (-r^2 \cdot a \cdot r) = \frac{1}{r^2} \cdot (-3a r^2)$$

$$\Rightarrow +4\pi\epsilon_g \rho = +3a \quad \Leftrightarrow$$

analyse sym. Ω_m

$(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ plans de sym de Ω_m
 $(M, \vec{e}_r, \varphi)$

$$\Rightarrow \vec{g}(M) = -g(M) \vec{e}_r$$

invariance de Ω_m par rotation autour de 0

$$\Rightarrow g(M) = g(r)$$

$$\left[\rho = \frac{3a}{4\pi\epsilon_g} = \frac{3g_0}{4\pi R_N \epsilon_g} \right]$$

• $r \in]R_N, R_T[\quad g(r) = g_0$

$$\text{div } \vec{g} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot (-g_0)) = -\frac{1}{r^2} \cdot 2g_0 r = -\frac{2g_0}{r}$$

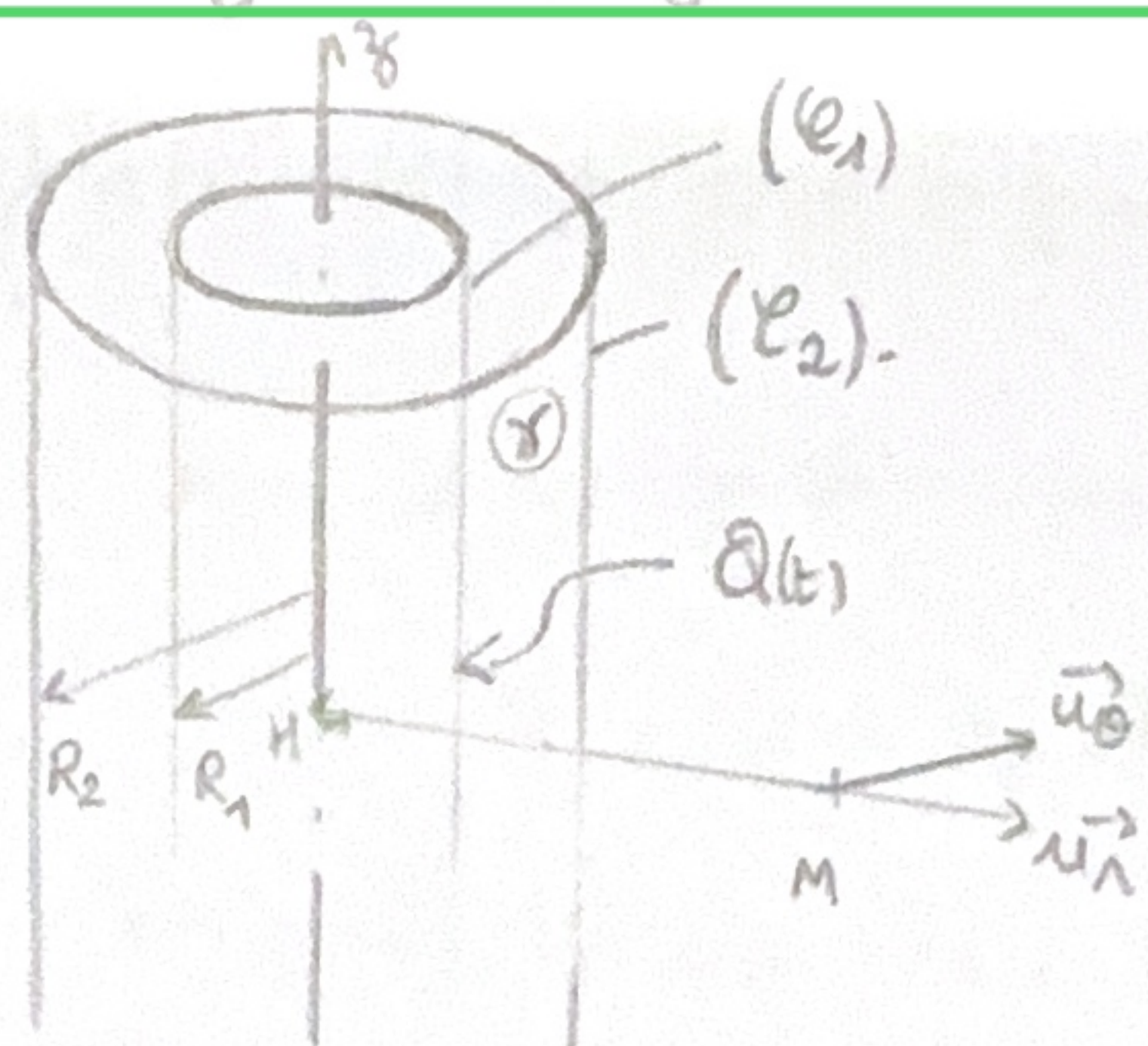
$$\Rightarrow +4\pi\epsilon_g \cdot \rho = +\frac{2g_0}{r} \quad \Leftrightarrow \left[\rho = \frac{g_0}{2\pi\epsilon_g r} \right]$$

• $r \in]R_T, +\infty[\quad g(r) = \frac{b}{r^2}$

$$\text{div } \vec{g} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \left(-\frac{b}{r^2} \right) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = 0}$$

Décharge d'un cylindre dans un autre



on suppose la longueur de $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$

$$\gg R_1, R_2$$

→ on néglige les effets de bord

1) Pour M point qcq de l'espace

① plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z) =$ plan de sym. de la distr. de charges

plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

$$\Rightarrow \vec{E}(M, t) = E(M, t) \vec{u}_r$$

invariance de $\partial \varphi$

- par rotatⁿ autour de (Oz)

- par translatⁿ le long de (Oz)

$$\} E(M, t) = E(r, t)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{u}_r$$

2) Pour M situé entre $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$: $\vec{j} = \epsilon \vec{E}$ (loi d'ohm locale) $\Rightarrow \vec{j} = \epsilon E(r, t) \vec{u}_r$

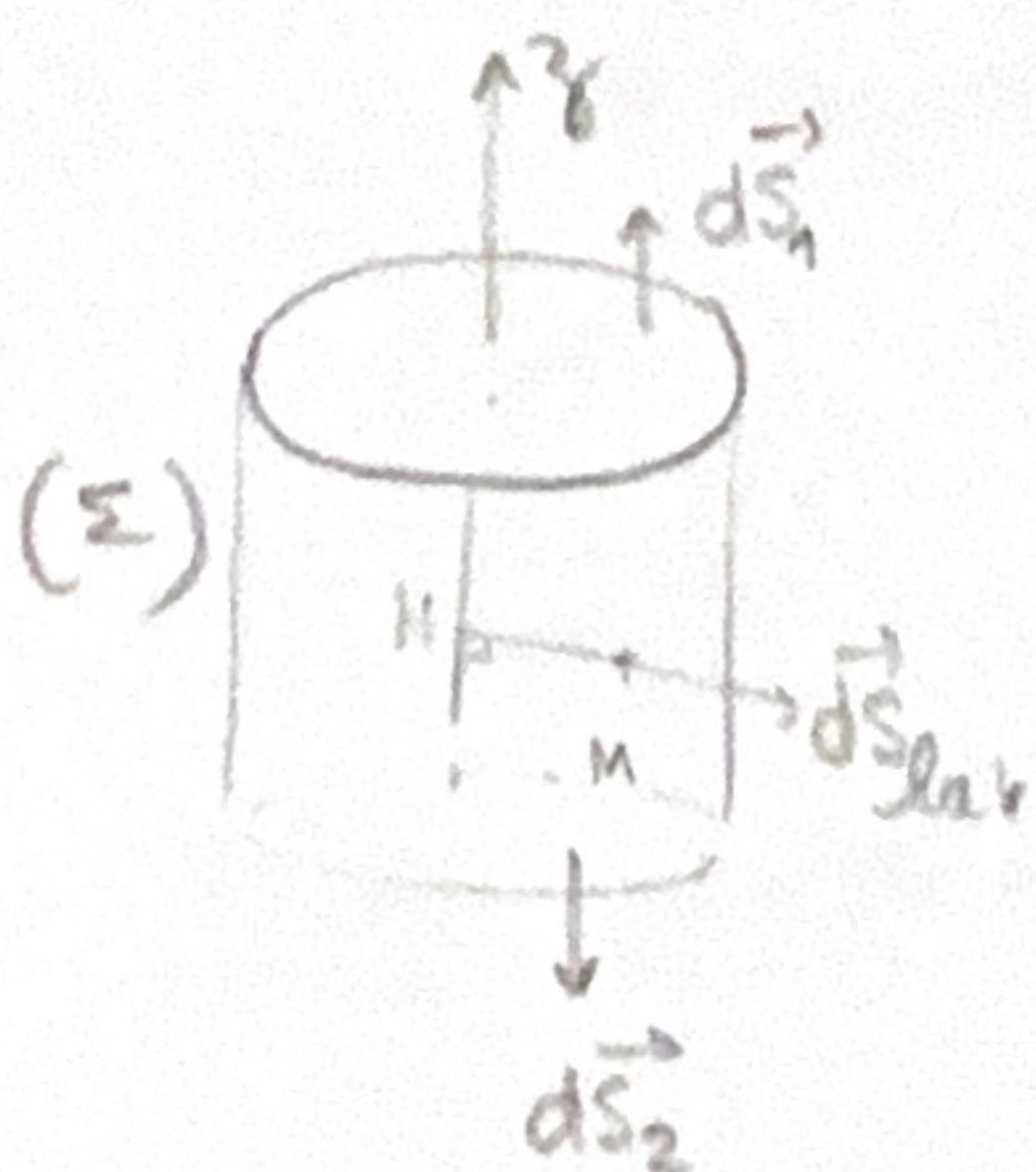
$(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ } plans de sym de $\partial \varphi$ $\Rightarrow \vec{B}(M)$ doit $\hat{=}$ $\perp$ à chacun de ces plans

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \vec{0}$$

3) surface de Gauss: cylindre d'axe (Oz)

(Σ)

de rayon $r = HM$
de hauteur h



$$\begin{aligned} \oint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{lat} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 \\ &= \int_{S_{lat}} E(r, t) \cdot \vec{u}_r \cdot d\vec{S}_{lat} \vec{u}_r \\ &= E(r, t) \cdot 2\pi r h \end{aligned}$$

et $Q_{int} = \frac{Q(t)}{S} \cdot 2\pi r h$ avec S surface du cylindre $(\mathcal{C}_1)$ pour M situé entre $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$

d'ap. le théorème de Gauss: $E(r, t) \cdot 2\pi r h = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q(t)}{S} \cdot 2\pi r h$

ainsi $\vec{E}(M, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q(t)}{S} \vec{u}_r$ pour $r \in]R_1, R_2[$

4) On a $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (M-A)

or $\vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \cancel{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\cancel{\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} \vec{u}_n$

dans le milieu chimique $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

$\Leftrightarrow \vec{0} = \mu_0 \cdot \gamma \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q(t)}{S} \vec{u}_n + \mu_0 \cdot \frac{dQ}{dt} \vec{u}_n$

on projette sur $\vec{u}_n$: $0 = \frac{\gamma}{\epsilon_0} \cdot Q(t) + \frac{dQ}{dt}$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{\tau} = 0}$ avec $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$

5) Si c'est $(\mathcal{C}_2)$ qui porte Q_0 à $t=0$:

analyse sym - invariances $\rightarrow \vec{E}(M,t) = E(r,t) \vec{u}_r$
de $\mathcal{C}_1$

$\vec{j} = \gamma \vec{E} \rightarrow$ analyse sym. de $\mathcal{C}_1 \rightarrow \vec{B}(M,t) = \vec{0}$.

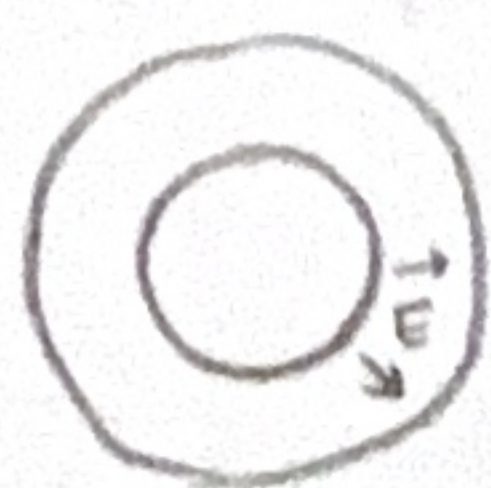
on surface de Gauss pour M tq $r \in]R_1, R_2[$

$\rightarrow Q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M,t) = \vec{0}}$.

$\Rightarrow \vec{j} = \vec{0}$: pas de courant de conduction

$\Rightarrow \boxed{\forall t, Q(t) = Q_0}$.

NB: 1^{er} cas part. chargées présentes à $t=0$ sur $(\mathcal{C}_1)$ se repoussent
de charge totale Q_0



subissent $\vec{F}_e = q_0 \cdot \vec{E}$
charge d'une part. chargée

quittent $(\mathcal{C}_1)$ pour s'étaler sur une $\oplus$ de surface
celle de $(\mathcal{C}_2)$

2^e cas pas de mécanisme semblable $\rightarrow$ charges restent sur $(\mathcal{C}_2)$

Chute ohmique dans un électrolyseur

1)



$$I = \iint_{S_{lat}} j(r) \vec{e}_r \cdot d\vec{s} \vec{e}_r = j(r) \cdot 2\pi r h$$

$$\Rightarrow j(r) = \frac{I}{2\pi r h}$$

loi d'ohm locale: $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} = \frac{I}{2\pi r h \sigma} \vec{e}_r$

2) en rég. stationnaire $\vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}}_0 \vec{e}_\theta + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial z}}_0 \vec{e}_z$

or $\frac{dV}{dr} = -\frac{I}{2\pi h \sigma} \cdot \frac{1}{r}$

$$\Rightarrow V(r) = -\frac{I}{2\pi h \sigma} \ln r + \text{cte}$$



On a $U = V(r_1) - V(r_2)$

$$\Rightarrow U = -\frac{I}{2\pi h \sigma} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

$$\Rightarrow U = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi h \sigma} \cdot I$$

$$\Rightarrow R = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi h \sigma}$$

3) $P = \iiint_{(\tau)} (\vec{j} \cdot \vec{E}) d\tau = \iiint_{(\tau)} \frac{j^2}{\sigma} d\tau = \frac{1}{\sigma} \int_{r=r_1}^{r_2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h \frac{I^2}{(2\pi h)^2 r^2} \cdot dr r d\theta dz$

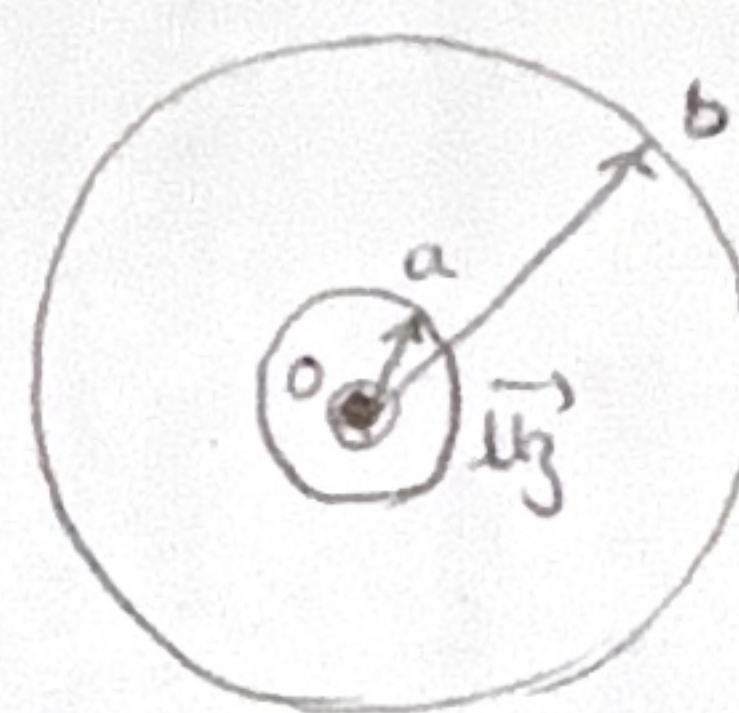
$$\Rightarrow P = \frac{1}{\sigma} \cdot \left(\frac{I}{2\pi h}\right)^2 \cdot 2\pi \cdot h \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{I^2}{2\pi h} \ln \frac{r_2}{r_1} = R \cdot I^2$$

Capteur capacitif de niveau de liquide.

1) dist. de charges invariante par translate le long de (Oz)
rotats autour de (Oz)

$$\Rightarrow V(r) = V(r).$$



2) liquide localement électriquement neutre

eq de Laplace $\Delta V = 0$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0.$$

$$r \frac{dV}{dr} = \text{cte} = A.$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r}$$

$$V(r) = A \ln r + B$$

$$V(r=a) = V_0 = A \ln a + B$$

$$V(r=b) = 0 = A \ln b + B$$

$$V_0 = A \ln \frac{a}{b}$$

$$A = \frac{V_0}{\ln(a/b)}$$

$$B = -A \ln b = -V_0 \cdot \frac{\ln b}{\ln(a/b)}.$$

$$V(r) = \frac{V_0}{\ln(a/b)} [\ln r - \ln b] = V_0 \cdot \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)}.$$

$$3). \vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{d}{dr}(V(r)) \vec{u}_r = -\frac{V_0}{\ln(a/b)} \cdot \frac{1}{r} \vec{u}_r = -\frac{V_0}{\ln(a/b)} \cdot \frac{1}{r} \vec{u}_r.$$

$$4). u_{e1} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E(r)^2 \text{ pour } z \in [h, H] \Rightarrow u_{e1} = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_h^H \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{V_0^2}{\ln^2(a/b)} \cdot \frac{1}{r^2} dr d\theta dz$$

$$u_{e2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_1^2(r) \text{ pour } z \in [0, h]$$

$$\Rightarrow u_{e1} = 2\pi \cdot (H-h) \cdot \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{V_0^2}{\ln^2(a/b)}$$

$$u_{e1} = \pi (H-h) \epsilon_0 V_0^2 \cdot \left(-\frac{1}{\ln(a/b)} \right)$$

$$\text{de m } u_{e2} = \pi h \epsilon_0 E_1 \cdot V_0^2 \cdot \left(-\frac{1}{\ln(a/b)} \right)$$

$$\Rightarrow u_{\text{tot}} = \pi \epsilon_0 V_0^2 \cdot \frac{1}{\ln(b/a)} [h \epsilon_n + (H-h)]$$

$$5). u_{\text{tot}} = \frac{1}{2} C u_c^2 = \frac{1}{2} C V_0^2 \text{ par identifi: } C = 2\pi \epsilon_0 \cdot \frac{h \epsilon_n + (H-h)}{\ln(b/a)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(b/a) \cdot C}{2\pi \epsilon_0} = h(\epsilon_n - 1) + H.$$

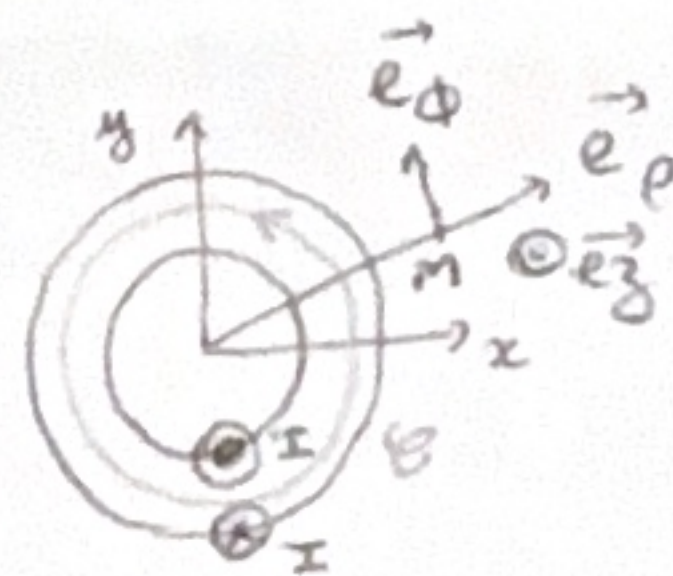
$$\Leftrightarrow h = \frac{1}{\epsilon_n - 1} \left(\frac{\ln(b/a) \cdot C}{2\pi \epsilon_0} - H \right)$$

Inductance câble coaxial

I.1.a) - plan $(M, \vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$ plan de sym de $\mathcal{D}_i$

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_\phi$$

invariance de $\mathcal{D}_i$ par $\left\{ \begin{array}{l} \text{translat. selon } (Oz) \\ \text{rotat. autour de } (Oz) \end{array} \right.$



$$\Rightarrow B(M) = B(\rho)$$

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = B(\rho) \vec{e}_\phi$$

I.1.b) - th. d'Ampère $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_e$

$\mathcal{C}$ cercle d'axe Oz de rayon ρ

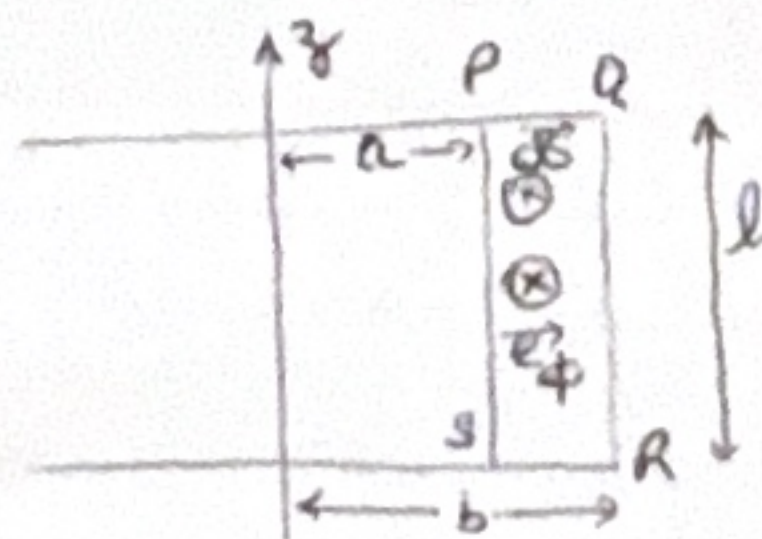
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(\rho) \cdot 2\pi \rho$$

$$I_e = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho < a \\ I - I = 0 & \text{si } \rho > b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \vec{0} \quad \begin{cases} \text{si } \rho < a \\ \text{ou } \rho > b \end{cases}$$

I.1.c) - $I_e = I$ si $a < \rho < b \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \vec{e}_\phi$ si $a < \rho < b$

I.2.a) -



$$\Phi_B = \int_{PQRS} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{PQRS} \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \vec{e}_\phi \cdot d\rho dz \vec{e}_\phi = \int_{\rho=a}^b \int_{z=0}^l \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{d\rho}{\rho} \cdot dz$$

$$\Rightarrow \Phi_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln \rho \right]_a^b \cdot l$$

$$\Rightarrow \Phi_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \cdot \ln \frac{b}{a}$$

I.2.b) - On a $\Phi_B = L \cdot I \Rightarrow L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$

I.2.c) - $L = \frac{2\pi \cdot 10^{-7} \times 1}{2\pi} \cdot \ln \frac{3}{1} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ H}$

Pince ampèremétrique

1). La dist^e de courants est invariante par rotatⁿ autour de l'axe (Oz)

→ coord. cylindriques

$$\rightarrow B(M) = B(r, \phi, z)$$

Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de sym. de la dist^e de courants

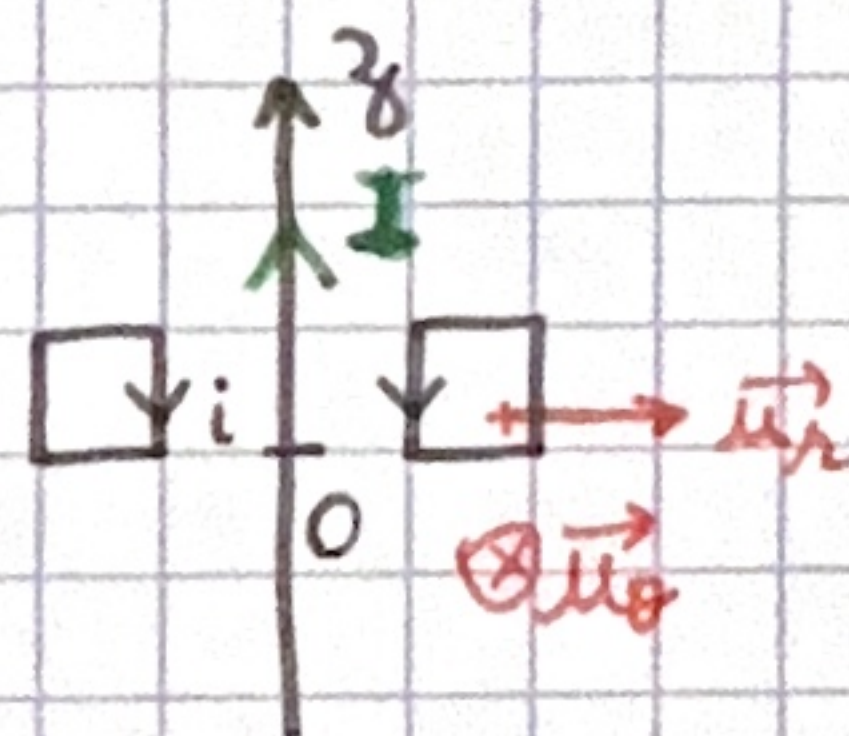
→ 1^e de Curie: $\vec{B}(M) \perp$ à ce plan $\Rightarrow \vec{B}(M) \parallel \vec{u}_\theta$: $\vec{B}(M) = B(M) \vec{u}_\theta$

CCL: $\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{u}_\theta$

• Pour P situé ds la sec^e d'une spire:

$$r \in [a, 2a]$$

$$z \in [0, a]$$

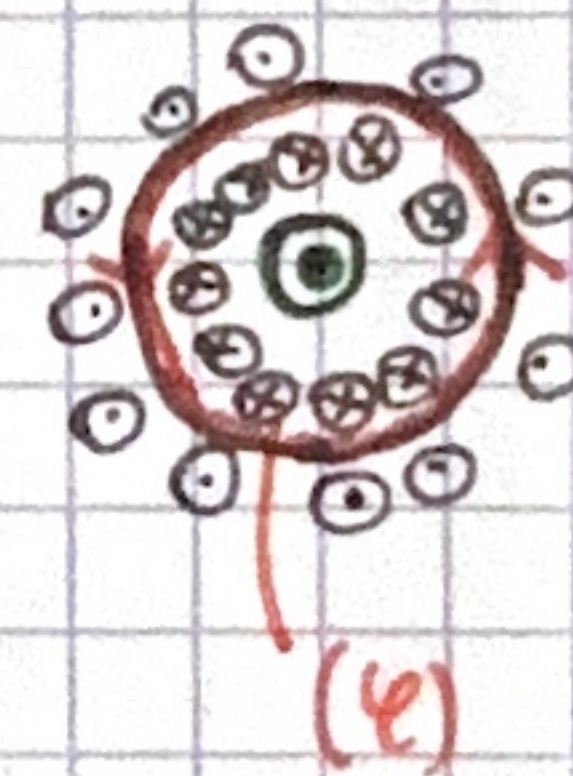


Th. d'Ampère

$$\oint_{(\ell)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_{\text{entacé}}$$

↳ cercle de centre H de rayon $r = HP$ d'axe (Oz).

rue de dessus



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{(\ell)} B(r, z) \cdot d\ell = B(r, z) \times 2\pi r$$

$d\ell \vec{u}_\theta$ est sur (ℓ)
 r et z fixés

$$i_{\text{entacé}} = I + N(-i) = I - Ni$$

$$\text{d'où } B(r, z) = \frac{\mu_0}{2\pi r} (I - Ni)$$

$$\text{d'où } \vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{2\pi r} (I - Ni) \vec{u}_\theta \quad \text{indpt de } z \in [0, a].$$

$$2). \quad \Phi_1 = \oint_{(\gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{r=a}^{2a} \int_{z=0}^a \frac{\mu_0}{2\pi r} (I - Ni) \cdot (-dS) \vec{u}_\theta$$

↳ carré de côté a

$$= -\mu_0 (I - Ni) \times \frac{1}{2\pi} a \int_{r=a}^{2a} \frac{1}{r} dr$$

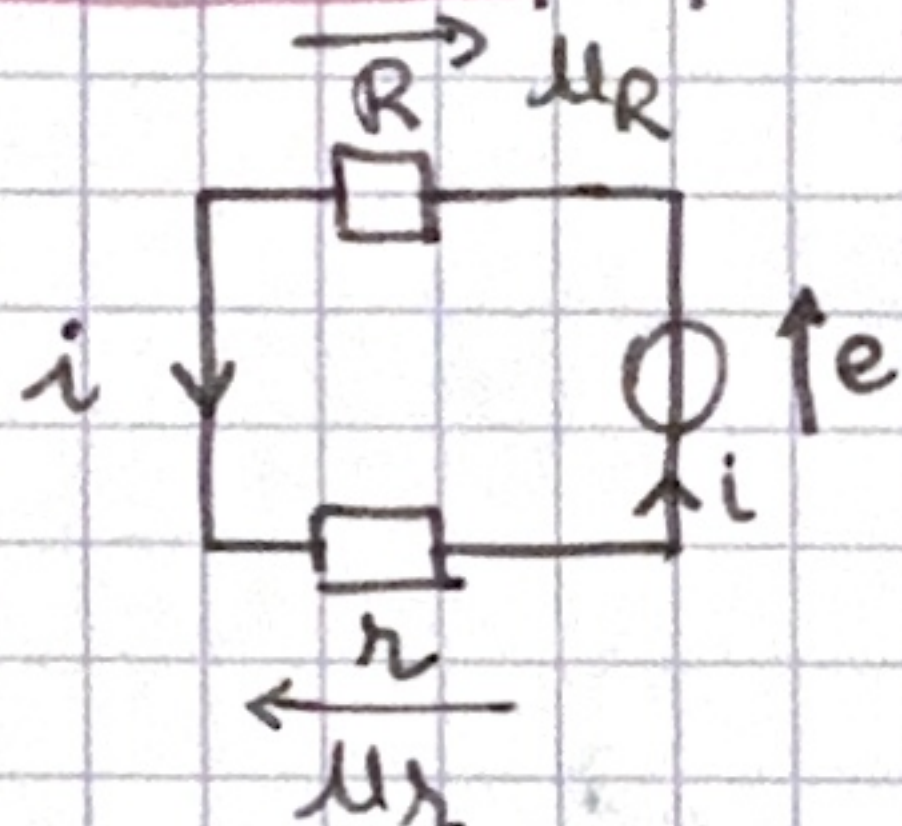
$$\Phi_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} (Ni - I) a \ln 2$$

$$\Rightarrow \Phi = N \Phi_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} Na (Ni - I) \ln 2$$

par définition $\Phi = L i + M I$

par identifi :
$$\begin{cases} L = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 a \ln 2 \\ M = - \frac{\mu_0}{2\pi} N a \ln 2 \end{cases}$$

3). schéma éq. pour le lone:



loi de Faraday : $e = - \frac{d\Phi}{dt}$

$$e = - L \frac{di}{dt} - M \frac{dI}{dt}$$

lois des mailles : $e - u_R - u_r = 0$

$$\Rightarrow L \frac{di}{dt} + M \frac{dI}{dt} + (R + r) i = 0$$

En RSF : $jL\omega i + jM\omega I + (R + r) i = 0$

$$\Rightarrow (jL\omega + R + r) i = - jM\omega I$$

$$\Rightarrow i = \frac{- jM\omega}{jL\omega + R + r} I \quad \text{avec } \begin{cases} I = I_0 e^{j\omega t} \\ i = i_m e^{j\omega t} e^{j\varphi} \end{cases}$$

En module :

$$i_m = \frac{|M|\omega}{\sqrt{(R+r)^2 + (L\omega)^2}} I_0$$

avec $\omega = 2\pi f$; $L = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 a \ln 2$; $M = - \frac{L}{N}$

$$\rightarrow L\omega = \mu_0 f N^2 a \ln 2 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \times 50 \times 10^3 \times 1 \cdot 10^{-2} \times \ln 2$$

$$\begin{aligned} &\approx 4 \times 3 \times 5 \\ &\approx 60 \, \Omega \end{aligned}$$

$$R + r = 0,5 \, \Omega \approx \frac{L\omega}{100} \Rightarrow (R + r)^2 \approx \frac{(L\omega)^2}{10^4} \Rightarrow (R + r)^2 + (L\omega)^2 \approx (L\omega)^2$$

d'où $i_m \approx \frac{|M|\omega}{L\omega} I_0 \Leftrightarrow \frac{i_m}{I_0} \approx \frac{|M|}{L} = \frac{1}{N} = 10^{-4}$

Mesure de I_0 sans avoir à "couper" le circuit du lequel circule $I(t)$
pour insérer un (A).

+ mesure de fortes intensités $\propto$ rapport $\frac{1}{N}$.