MP Devoir surveillé n°4 – Physique le 19/12/25

Durée 3h

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la **clarté**, à la **précision** et à la **concision** de la **rédaction**. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un **stylo noir ou bleu foncé non effaçable** pour la rédaction de votre composition ; **d'autres couleurs, excepté le vert**, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les **schémas** et la **mise en évidence des résultats**.*
- ***Ne pas utiliser de correcteur**.*
- ***Numéroter** les copies : ''i/nombre total''.*
- ***Respecter les notations** de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la **numérotation de la question posée**.*
- *Écrire le mot **FIN à la fin de votre composition**.*

Ex 1 : Transports planétaires

Ce problème étudie divers aspects physiques du voyage à l'échelle planétaire. Il est composé de deux parties indépendantes, la première envisage le déplacement d'un train dans un tunnel creusé dans la sphère terrestre, la seconde étudie la montée d'un ascenseur le long d'un câble vertical fixé à l'équateur. Dans tout le problème la Terre est assimilée à un corps sphérique homogène de rayon r_T , de centre O_T et de masse volumique homogène μ_T.

Pour les applications numériques on prendra μ_T = 5,50.10^3 kg.m^{-3}, r_T = 6,38.10^6 m, et les résultats numériques seront donnés avec un seul chiffre significatif. On rappelle la valeur de la constante universelle de la gravitation de Newton G = 6,67 10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires $\hat{u}_x$ ou d'une flèche dans le cas général $\overrightarrow{OP}$. Une quantité surmontée d'un point désigne la dérivée totale par rapport au temps de cette quantité $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$.

I.- Le métro gravitationnel

Dans toute cette partie on néglige tous les effets de la rotation de la terre sur elle-même et on se place dans le référentiel géocentrique que l'on supposera galiléen.

I.A.—Étude préliminaire

On considère un point P situé **à l'intérieur** de la sphère terrestre. On note $\overrightarrow{O_T P} = \vec{r} = r\hat{u}_r$ et $\vec{g}(P)$ le champ gravitationnel créé par la terre en P.

1 — Justifier que $\vec{g}(P)$ est porté par $\hat{u}_r$ et que son module ne dépend que de r, on notera donc $\vec{g}(P) = g(r)\hat{u}_r$. En utilisant le théorème de Gauss gravitationnel déterminer l'expression de $g(r)$ en fonction de $\omega^2 = \frac{4}{3}\pi G\mu_T$ et r.

2 — Déduire de la question précédente que la force de gravitation s'exerçant sur un point de masse m situé en P dérive de l'énergie potentielle

$$E_p(r) = E_{p0} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

où E_{p0} est une constante qui dépend de la référence choisie et que l'on ne demande pas d'expliciter. Quelle est la dimension de ω ?

I.B. — Le tunnel droit

On relie deux points A et B de l'équateur terrestre par un tunnel cylindrique traversant la Terre selon le schéma de la figure 1 qui présente également les notations utilisées.

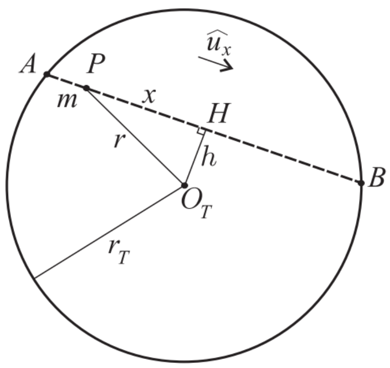

FIG. 1 – Le tunnel droit

On considère un mobile ponctuel P de masse m se déplaçant dans le tunnel sous l'effet du champ gravitationnel terrestre. La position du mobile est repérée sur le segment [AB] par la coordonnée x telle que $\overrightarrow{PH} = x\hat{u}_x$ où le vecteur unitaire $\hat{u}_x$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et de même sens et H est la projection orthogonale de O_T sur [AB]. On note finalement $h = O_TH$.

Dans toute la partie I, on suppose que le point P reste en permanence dans l'axe du tunnel grâce à un système de confinement. Il n'y a donc pas de contact avec les parois et donc pas de frottement avec celles-ci. Un tel confinement est envisageable en utilisant des parois magnétiques. On suppose enfin qu'un vide suffisamment poussé a été créé dans le tunnel. Sous toutes ces hypothèses, on considérera que la seule force qui s'applique au mobile est la force de gravitation qu'exerce sur lui la terre.

À l'instant t = 0, on abandonne le mobile au point A sans vitesse initiale.

3 — Déterminer l'équation différentielle (linéaire) du second ordre vérifiée par $x(t)$. En déduire l'expression de $x(t)$ en fonction de h, r_T, ω et t.

4 — Déterminer l'expression de la vitesse maximale atteinte par le point P sur le trajet. En quel point cette vitesse est-elle atteinte?

5 — Exprimer la durée τ_0 du trajet entre AB et calculer sa valeur numérique.

II. - Ascenseur spatial

Ce problème étudie un aspect physique de la réalisation d'une idée récurrente dans de nombreux contextes « l'ascenseur spatial ». Il s'agit d'un mécanisme permettant de s'extraire du champ de pesanteur terrestre sans utiliser de fusée. On suppose pour cela qu'un câble réalisé par filage de nanotubes de carbone, de plus de 100 000 km de long, inextensible, a pu être dressé à la verticale d'un point de l'équateur de la Terre. Ce câble possède une masse linéique λ = 1,00 kg.m^{-1} extrêmement faible et une résistance mécanique extrêmement forte par rapport à un câble en acier, qui le rend capable de supporter de très fortes tensions sans casser. Dans cette partie, le référentiel terrestre est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles par rapport au référentiel géocentrique supposé galiléen. Il effectue un tour en un jour sidéral de durée T_σ = 8,62.10^4 s. La terre est toujours supposée sphérique et homogène de masse $m_T = \frac{4}{3}\pi r_T^3 \mu_T$ = 5,98 .10^{24} kg.

II.A. — Étude de l'équilibre du câble

Les notations sont celles de la figure 3 : Le point d'ancrage E du câble est un point de l'équateur terrestre, r_T est le rayon de la Terre et O_T son centre. L'altitude d'un point M du fil est notée z, $r = r_T + z$ est le rayon O_TM et h est la hauteur totale du câble. Le point H représente l'extrémité haute du câble : $z_H = h$ et $r_H = r_T + h$. Ce point est libre. On pourra enfin utiliser le vecteur unitaire $\hat{u}_r = \frac{\overrightarrow{O_T M}}{r}$.

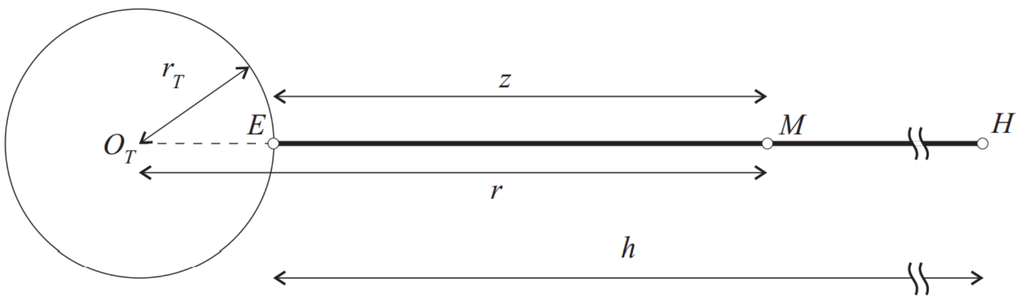

FIG. 3 – Vue générale de la Terre et du câble

6 — Rappeler la définition de l'orbite géostationnaire terrestre. Montrer que le rayon r_s correspondant à cette orbite s'écrit $r_s = \left(\frac{Gm_T}{\omega_\sigma^2}\right)^{1/3}$ avec ω_σ la pulsation sidérale terrestre : $\omega_\sigma = \frac{2\pi}{T_\sigma}$.

Dans toute la suite du problème, on considèrera un câble de longueur totale $h = 4r_s - r_T$, on a donc $O_TH = r_H = 4r_s$. On note g_s le module du champ de gravitation en $r = r_s$, c'est-à-dire la quantité telle que $f_s = mg_s$ où f_s est le module de la force de gravitation subie par un corps de masse m situé en $r = r_s$. Enfin, on note g le module du champ de gravitation en $r = r_T$.

7 — En écrivant que le câble est en équilibre, montrer que la dérivée de la tension du câble en M vérifie la relation

$$\frac{dT}{dr} = \chi\left[\frac{r_s^2}{r^2} - \frac{r}{r_s}\right]$$

où χ est un paramètre que l'on exprimera en fonction de λ et g_s. En admettant que $T(r_H) = 0$, déterminer l'expression de la tension $T(r)$ en fonction de χ, r et r_s.

8 — Déterminer les valeurs numériques de r_s, g_s, de la tension du fil au point d'ancrage notée $T_E = T(r_T)$, ainsi que la valeur maximale $T_{\max}$ de $T(r)$. Commenter le résultat obtenu, on donne le module d'Young de l'acier ε_a = 210 GPa et d'un câble en nanotubes de carbone ε_c = 1 TPa.

II.B. — Montée de la cage d'ascenseur le long d'un fil

Le système de propulsion de la cabine est modélisé sur la figure 4. La montée est assurée par la rotation en sens inverses de deux gros cylindres de caoutchouc identiques, chacun de rayon R_c = 1,00 m, de masse m_c = 2,00 .10^3 kg, de moment d'inertie par rapport à son axe J = $m_c R_c^2/2$. Ces cylindres sont mus par un moteur électrique exerçant sur chacun un couple. Le moment résultant de ce couple est $\vec{\Gamma}_g = +\Gamma_0 \hat{u}_y$ pour le cylindre de gauche et $\vec{\Gamma}_d = -\Gamma_0 \hat{u}_y$ pour le cylindre de droite. Les deux cylindres serrent le câble grâce à un ressort reliant leurs centres. La longueur à vide l = R_e et la constante de raideur k du ressort permettent d'assurer un roulement sans glissement au contact du câble. On prend f_s = 0,5 pour le coefficient de frottement statique entre le caoutchouc des cylindres et le câble. On néglige les masses de la cabine, de ses occupants et des moteurs par rapport à celle des cylindres.

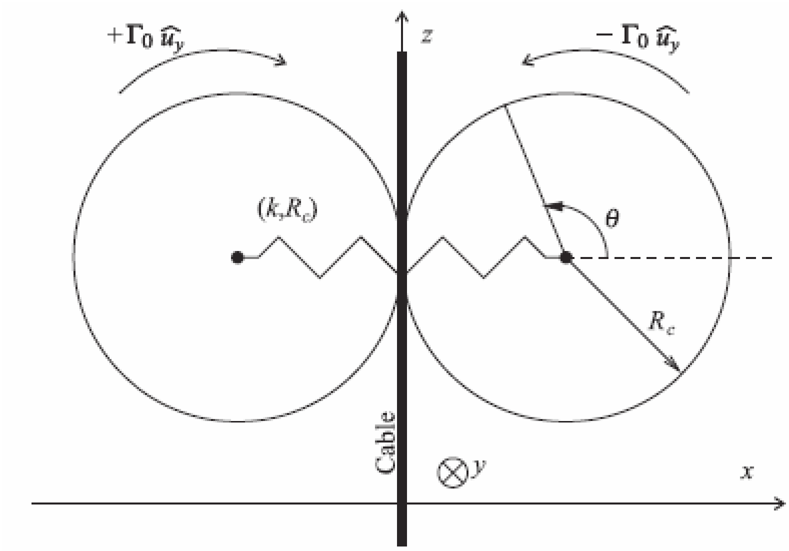

FIG. 4 - Vue générale des cylindres assurant la montée de la cabine

On négligera toute action de l'air (frottement et vent) sur le système.

Dans le référentiel $(E, \hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$ avec $\hat{u}_z = \hat{u}_r$ la cabine, repérée par le point M, est en E à t = 0. La montée de z = 0 (où la vitesse est nulle) à $z = h$ dure au total t_m = 4 jours et se décompose en une phase d'accélération constante d'intensité a = 1 m.s^{-2} pendant une durée t_0 suivie d'une phase à vitesse constante de module v_0.

9 — Calculer les valeurs numériques de la durée t_0, de la vitesse v_0 et de l'altitude z_0 atteintes à la fin de la première phase. On vérifiera que $z_0 \ll h$.

10 — Justifier le fait que l'on puisse considérer que pendant la première phase, la force de gravitation exercée par la Terre sur le système est sensiblement constante et négliger une des forces par rapport à celle-ci.

11 — Expliquer comment la montée du système le long du fil peut affecter la verticalité du câble au cours de sa montée.

Dans toute la suite de cette partie, on supposera que le fil reste parfaitement immobile, vertical, tendu et on négligera la ou les forces susceptibles d'affecter la verticalité du fil.

12 — L'angle de rotation du cylindre de droite est noté θ, compté positivement comme indiqué sur la figure 4, le vecteur vitesse angulaire de ce cylindre est donc $\vec{\Omega} = -\dot{\theta}\hat{u}_y$. On prend θ = 0 pour z = 0. Établir la relation entre θ et z.

13 — Enoncer la loi de Coulomb relative à la situation étudiée.

On peut montrer que la valeur minimale de la constante de raideur k du ressort assurant le roulement sans glissement du cylindre de droite sur le fil pendant la première phase (accélérée) du mouvement vaut $k_{min} = 2{,}16.10^4\ N/m$.

14 — Justifier par un calcul numérique que la montée du système n'affecte pas sensiblement la tension du fil dans la première phase.

Ex 2 : Oscillateur mécanique

Dans tout le problème un point surmontant une fonction désigne sa dérivée temporelle : $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

On considère un ressort d'extrémités N et M, de raideur k, de longueur à vide l_0 et de longueur $l(t) = NM$ à un instant t quelconque. Ce ressort est suspendu verticalement par son extrémité N à un point O fixe d'un support immobile dans le référentiel galiléen d'étude $\mathcal{R}$. À son extrémité M est accroché un point matériel P de masse m. L'extrémité N (resp. M) du ressort se confond avec le point O (resp. P) (cf. figure 1).

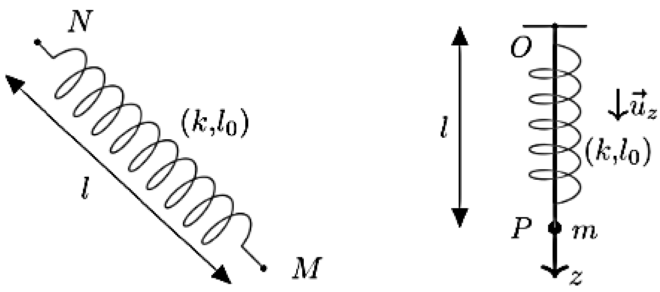

FIGURE 1 – Ressort et oscillateur vertical

On suppose que le mouvement du point matériel P reste vertical : en se repérant dans le système de coordonnées cartésiennes $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ d'origine O, le point P appartient à la droite $(O,\vec{u}_z)$.

Dans tout le problème, le ressort reste dans son domaine élastique de fonctionnement associé à une force de rappel proportionnelle à son allongement. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme égal à $\vec{g} = g\vec{u}_z$ avec $g > 0$. On néglige toute forme de frottement.

On suppose tout d'abord que le ressort a une masse m_r nulle.

❑ – **1.** Établir l'expression de l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{p,k}$ du ressort dont on prendra l'origine lorsque la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide. On exprimera $\mathcal{E}_{p,k}$ en fonction de k, l_0 et l.

❑ – **2.** Établir, en fonction de m, g et l, l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{p,p}$ du point matériel P dont on prendra l'origine en O.

❑ – **3.** En déduire l'expression de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du point matériel P de masse m dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ en fonction notamment de $l(t)$.

❑ – **4.** Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par $l(t)$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

❑ – **5.** Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente en supposant qu'à $t = 0$, le point matériel P est lâché sans vitesse initiale de la position $l(t = 0) = L > 0$. On fera apparaître une pulsation ω_0.

Quelle condition doit-on imposer à L pour que le point matériel P ne heurte pas le support fixe où est suspendu le ressort ? On exprimera cette condition en fonction de k, l_0, m et g.

Qualifier le mouvement observé : tracer l'allure de $l(t)$ en fonction de t.

Donner l'expression de la période T_0 du mouvement du point matériel P et calculer sa valeur numérique pour $k = 0{,}300 \times \pi^2 \approx 2{,}96\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$ et $m = 300\,\mathrm{g}$.

Dans les 6 questions suivantes, on tient compte de la masse m_r non nulle du ressort. On suppose que l'expression de l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_\mathrm{p,k}$ du ressort établie à la question **1** n'est pas modifiée. Par contre, son énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_\mathrm{p,p}$ est affectée par cette modification. Pour la déterminer, on suppose que, quelque soit sa longueur l, la masse m_r du ressort est uniformément répartie sur toute sa longueur l et que, pour tout z compris entre 0 et l, la tranche élémentaire de ressort comprise entre z et $z+dz$ possède, dans le référentiel $\mathcal{R}$, une vitesse proportionnelle à z. On conserve les mêmes origines que précédemment pour les énergies potentielles.

❑ – **6.** Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_\mathrm{p,p}$ associée au ressort en fonction de m_r, g et l.

❑ – **7.** Établir l'expression de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_\mathrm{c}$ du ressort en fonction de m_r et l.

❑ – **8.** En déduire l'expression de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_\mathrm{m}$ du système constitué par le point matériel P de masse m et le ressort de masse m_r dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ en fonction de m, m_r, k, g, l_0 et l.

❑ – **9.** Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par $l(t)$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Commenter.

❑ – **10.** Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente en supposant qu'à $t=0$, le point matériel P est lâché sans vitesse initiale de la position $l(t=0)=L$. On fera apparaître une pulsation ω_1.
Qualifier le mouvement observé en supposant que le point matériel P ne heurte pas le support fixe.
Déterminer l'expression de la période T_1 du mouvement du point matériel en fonction de T_0, m et m_r puis calculer sa valeur numérique pour $k = 0{,}300 \times \pi^2 \approx 2{,}96\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$, $m = 300\,\mathrm{g}$ et $m_\mathrm{r} = 36{,}0\,\mathrm{g}$ (on pourra utiliser l'approximation $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$).

❑ – **11.** Quelle condition doit satisfaire m_r pour que l'écart relatif entre T_0 et T_1 ne dépasse pas 1 % ? On fera l'application numérique dans les conditions de la question précédente.

Le point matériel P de masse m est maintenant astreint à se déplacer, sans frottement, horizontalement sur une glissière parfaite qui se confond avec la droite $(O',\vec{u}_x)$ (cf figure 2). Le ressort précédent, dont on suppose la masse m_r nulle dans toute la suite du problème, est toujours accroché par son extrémité N au point O fixe dans le référentiel galiléen d'étude $\mathcal{R}$ et par son extrémité M au point matériel P :

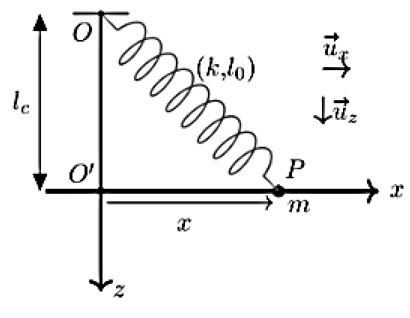

FIGURE 2 – Oscillateur horizontal

On se place maintenant dans le système de coordonnées cartésiennes $(O',\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ d'origine O' telle que la droite $(O,\vec{u}_z)$ soit perpendiculaire à la droite $(O',\vec{u}_x)$: le point matériel P est ainsi repéré par son abscisse x sur la droite $(O',\vec{u}_x)$. On note l_c la distance OO'.

❑ – **12.** Établir l'expression de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{\mathrm{p},P}$ du point matériel P en fonction de k, l_0, l_c et x en prenant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur en O' et celle de l'énergie potentielle élastique du ressort pour $l=l_0$.

❑ – **13.** En fonction du paramètre l_c, discuter des positions d'équilibre du point P et de leur stabilité respective : on exprimera les abscisses d'équilibre x_e associées en fonction des données et on donnera les allures correspondantes de $\mathcal{E}_{p,P}$ en fonction de x en précisant les valeurs remarquables.

❑ – **14.** Dans quel cas peut-on parler de barrière de potentiel ? Préciser sa hauteur U_b en fonction des données.

❑ – **15.** Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par $x(t)$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
Que représente physiquement $\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx}(x)$ en termes de force ?

❑ – **16.** Transformer l'équation différentielle du mouvement en 2 équations différentielles d'ordre 1 en variables $u_0(t) = x(t)$ et $u_1(t) = \dot{x}(t)$.
En introduisant les estimations $u_{0,n}$ de $u_0(t)$ et $u_{1,n}$ de $u_1(t)$ aux instants $t_n = n\Delta t$ pour $n \in \mathbb{N}$ où Δt désigne le pas de discrétisation temporelle, former les 2 relations exprimant $u_{0,n+1}$ et $u_{1,n+1}$ en fonction de $u_{0,n}$ et $u_{1,n}$ déduites de la méthode d'Euler explicite.
Quelles valeurs doit-on donner pour $n = 0$ à $u_{0,n}$ et $u_{1,n}$?

Pour $k = 0{,}300 \times \pi^2 \approx 2{,}96\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$, $m = 300\,\mathrm{g}$, $l_0 = 1{,}00\,\mathrm{m}$ et $l_c = 0{,}200\,\mathrm{m}$, on effectue la résolution numérique de l'équation différentielle du mouvement pour déterminer $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ en fonction de t pour 2 conditions initiales A et B différentes. Les résultats sont présentés sur la figure 3.

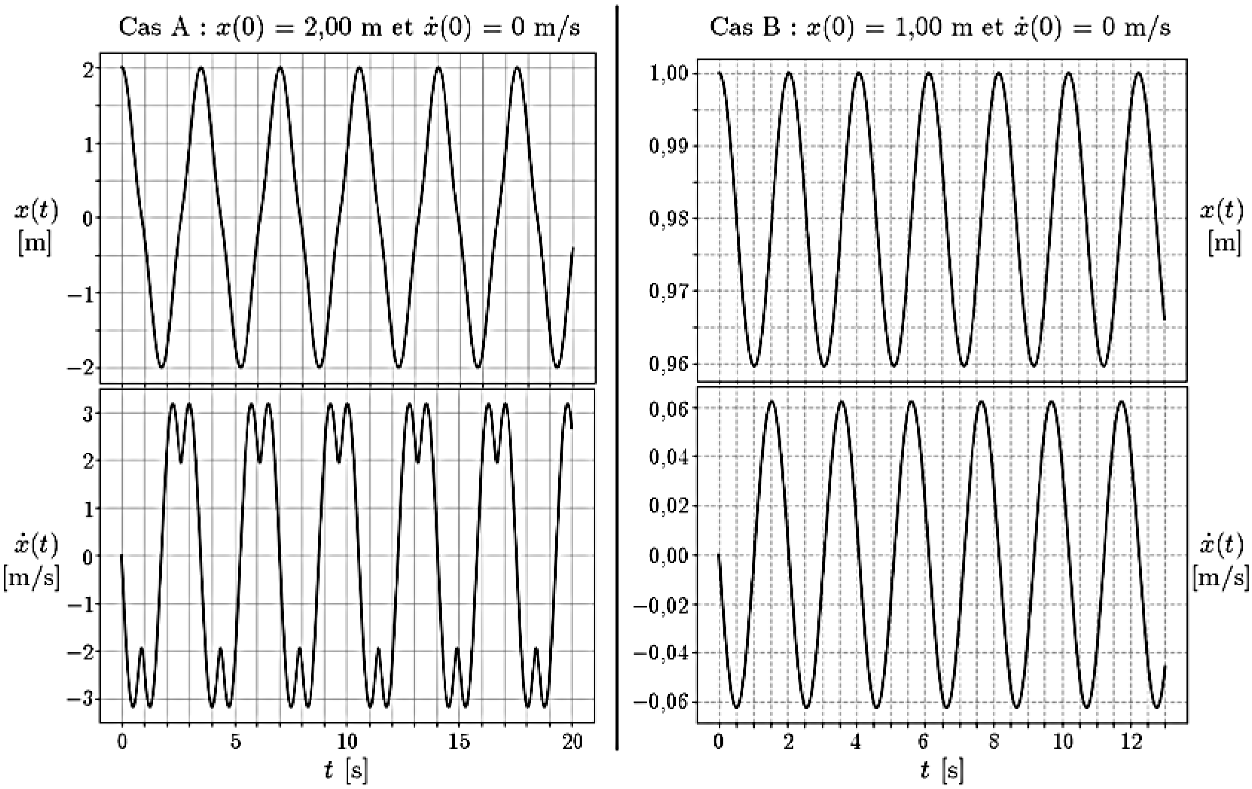

FIGURE 3 – Solutions numériques pour deux conditions initiales distinctes

❑ – **17.** Comparer le plus précisément possible la nature du mouvement dans les 2 cas.

❑ – **18.** Dans le cas B, établir une expression approchée de la valeur moyenne $\langle x(t) \rangle$ des oscillations (en fonction de l_c et l_0) et de leur période T_2 en fonction de T_0, l_c et l_0.
Effectuer les applications numériques et comparer les résultats aux valeurs lues sur la figure 3. Conclure sur les approximations effectuées.

❑ – **19.** Les 2 cas A et B correspondent à deux types de mouvements différents du point P. Dans le cas où les conditions initiales sont du type $x(t=0) = X_0 > 0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$, établir la condition que doit vérifier X_0 pour que l'on soit dans le cas A.

En conservant les valeurs $k = 0{,}300 \times \pi^2 \approx 2{,}96\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ et $l_0 = 1{,}00\,\mathrm{m}$, on a représenté sur la figure 4 l'allure de $\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx}(x)$ en fonction de x dans les cas $l_c < l_o$ (à gauche) et $l_c > l_o$ (à droite).

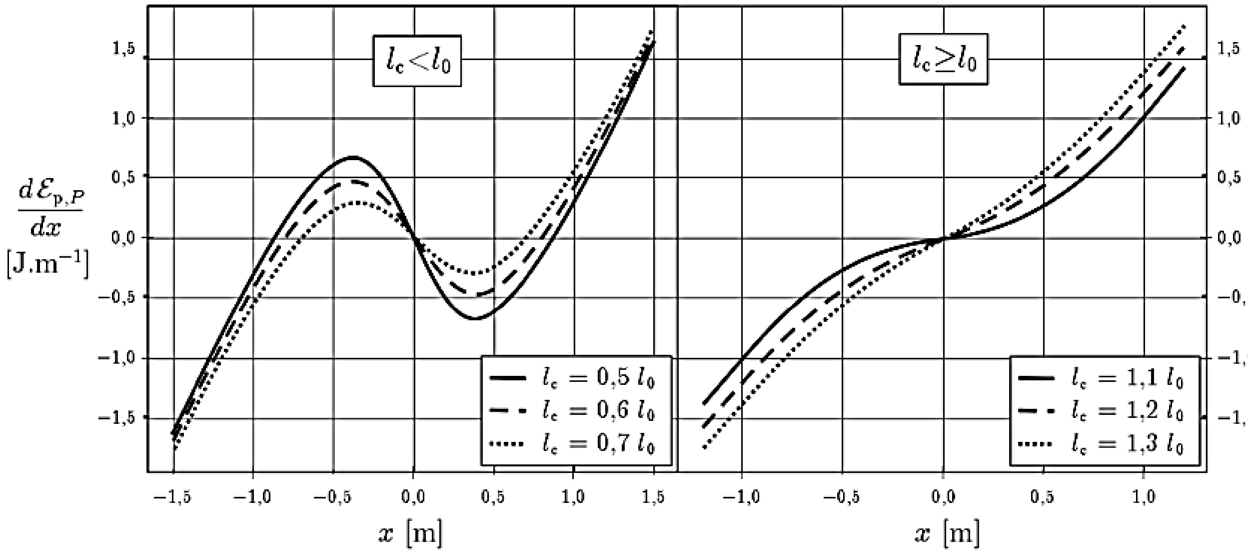

FIGURE 4 – Représentation graphique de la dérivée de l'énergie potentielle de P

On suppose pouvoir modéliser la fonction $\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx}(x)$ par un polynôme de degré 3 de la variable x de la forme :

$$\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx}(x) \simeq \alpha_m x + \beta_m x^3$$

❑ – **20.** Commenter cette affirmation et préciser en fonction de la valeur de l_c les signes des constantes α_m et β_m.

Réécrire alors l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par $x(t)$.

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Duffing non amortie.

-- FIN DE L'ENONCE –