Durée 3h

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la **clarté**, à la **précision** et à la **concision** de la **rédaction**. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un **stylo noir ou bleu foncé non effaçable** pour la rédaction de votre composition ; **d'autres couleurs, excepté le vert**, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les **schémas** et la **mise en évidence des résultats**.*
- ***Ne pas utiliser de correcteur**.*
- ***Numéroter** les copies : ''i/nombre total''.*
- ***Respecter les notations** de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la **numérotation de la question posée**.*
- *Écrire le mot **FIN à la fin de votre composition**.*

Ex 1 : Supports : adhérence ou pas ? (CCINP)

Le sujet s'intéresse à différents cas de frottements secs qui induisent des types de mouvement relatif possible dans certaines conditions pour un couple solide1-solide2. Ces propriétés viennent du choix du support pour un mobile donné.

La **partie I** est une question de cours à propos des lois de Coulomb dont les réponses attendues permettront aux candidats de mieux exploiter les parties II, III et IV qui peuvent néanmoins être traitées de manière indépendante.
Les **parties II** et **III** présentent des exemples de mesures de coefficients de frottement solide.

Partie I - Lois de Coulomb relatives au glissement

On note f_s et f_g les coefficients statique et dynamique du frottement et $\vec{T}$ et $\vec{N}$ les composantes tangentielle et normale de la réaction.

Q1. **a)** Définir ce qu'on appelle la vitesse de glissement $\overrightarrow{v_g}$ d'un solide par rapport à un autre en un point de contact.
b) Doit-on préciser dans quel référentiel elle est exprimée ?

Q2. Expliquer à quelle condition on passe de l'adhérence au glissement.

Q3. Expliquer à quelle condition on passe du glissement à l'adhérence.

Partie II - Mesure du coefficient de frottement dynamique

On utilise le dispositif représenté sur la **figure 1**. Un solide 1 de masse M est lié, par un fil inextensible et supposé sans masse, à un solide 2 de masse αM ($\alpha > 1 > f_s$). Le fil sans masse de longueur L passe sur la gorge d'une poulie idéale. Le solide 1 se déplace sur un support fixe S horizontal. On appelle H l'altitude du centre de masse du solide 2 au-dessus d'un support horizontal S'.
À l'état initial, les solides sont tous immobiles, le solide 1 est à l'abscisse $X(t=0) = X_0$ et le solide 2 est à l'altitude $H(t=0) = H_0$.
On veut dans cette expérience déterminer la valeur du coefficient f_g de frottement relatif au glissement entre le matériau constitutif de S et celui du solide 1. On mesure la distance D parcourue par le solide 1 sur le support S, sachant que le solide 2 touche S'avant que le solide 1 ne s'arrête.

Consignes : on note g l'accélération de la pesanteur. On notera systématiquement T et N les normes des composantes tangentielle et normale de la réaction du support S sur le solide 1 (**figure 1**), avec f_g le coefficient de frottement dynamique. On supposera l'appui du solide 1 uniformément réparti avec une même valeur du coefficient de frottement en tout point de la surface de contact.

Q4. Décrire qualitativement les deux phases successives du mouvement de l'ensemble en précisant pour chacune d'elles si le fil est tendu ou non tendu.

Q5. On note F la norme de la tension du fil, la nature idéale de la poulie et du fil permet de considérer que F est conservée tout le long du fil. En appliquant le principe fondamental de la dynamique au solide 1 et au solide 2, déterminer 3 relations liant N, T, F, g, α, M, l'accélération horizontale $\ddot{X}$ du solide 1 et l'accélération verticale $\ddot{Z}$ du solide 2.

Q6. Traduire la loi de Coulomb pour exprimer $\vec{T}$.

Q7. On s'intéresse à la première phase du mouvement.
a) Exprimer le lien entre $\ddot{X}$ et $\ddot{Z}$ en le justifiant dans cette première phase.
b) Établir dans cette phase la vitesse $\dot{X}(t)$ en fonction de α, f_g et g.
c) Quelle est la durée t_1 de cette première phase ?
d) Quelle est la vitesse correspondante atteinte V_1 ?

Q8. On s'intéresse à la deuxième phase du mouvement.
a) Exprimer $X(t)$ dans cette phase en fonction de t, t_1, V_1, X_0, H_0, g et f_g.
b) Exprimer f_g en fonction de α, H_0 et D.

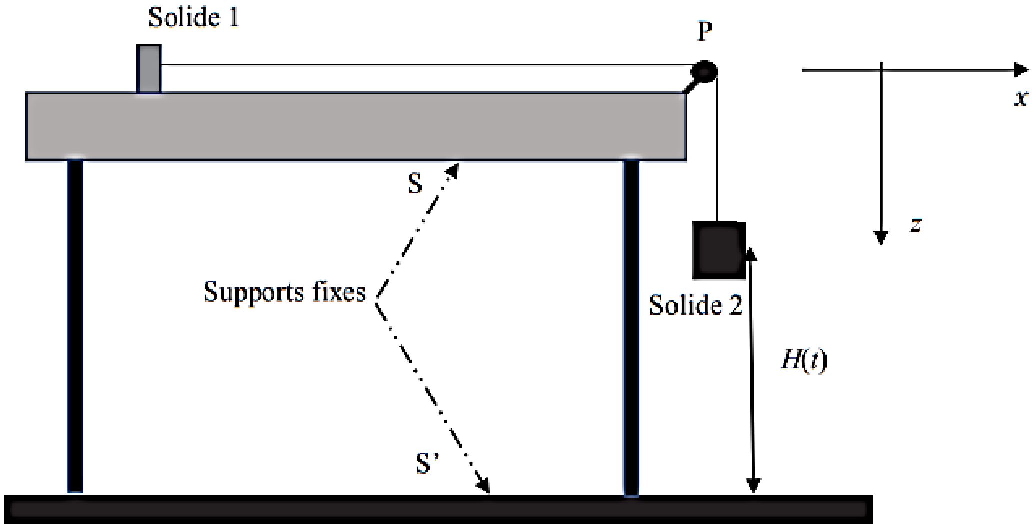

Figure 1 - Premier dispositif : mesure du coefficient de frottement dynamique.

Q10. On réalise l'expérience plusieurs fois de suite, en partant toujours de la valeur de $H_0 = 40{,}0\,\text{cm}$. La masse du solide 1 vaut $M = 50$ g et celle du solide 2 vaut $\alpha M = 60$ g. Calculer la valeur du coefficient de frottement f_g sachant qu'on a trouvé une valeur moyenne de la distance D égale à $\langle D \rangle = 1{,}50\,\text{m}$. On donnera le résultat avec un seul chiffre significatif.

Partie III - Mesure du coefficient de frottement statique

Q11. On pose maintenant le solide 1 sur le support S qui fait un angle θ avec le plan horizontal. Le dispositif est représenté sur la **figure 2**. On fait augmenter, à partir d'une valeur faible, l'angle θ en déplaçant lentement un coin et on mesure pour quelle valeur $\theta = \theta_{lim}$ le solide 1 se met à glisser. Montrer que cette expérience permet de mesurer le coefficient de frottement f_s.

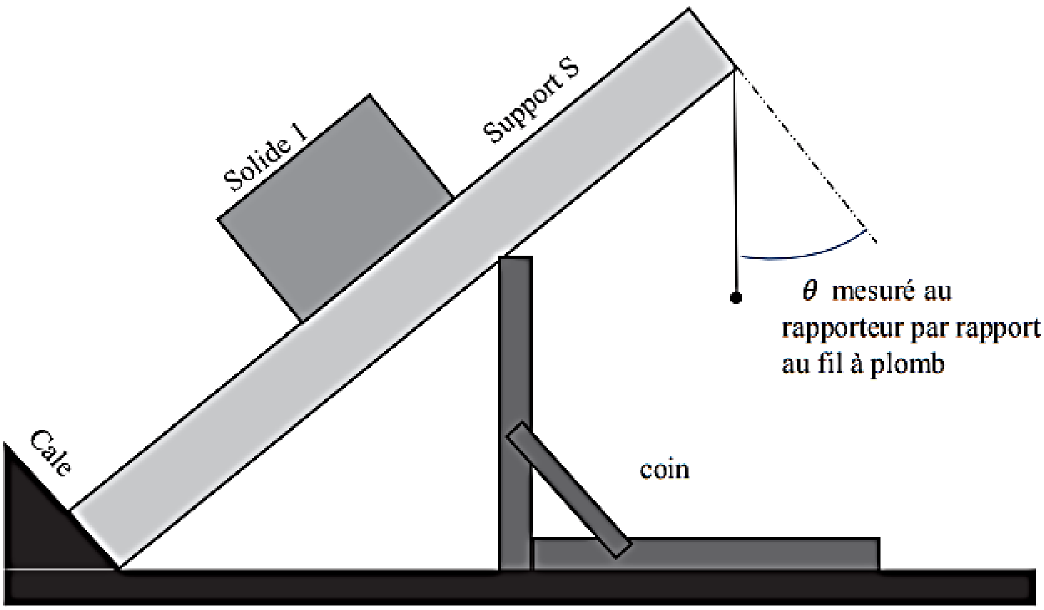

Figure 2 - Second dispositif : mesure du coefficient de frottement statique.

Q12. On réalise plusieurs essais successifs de décrochement et la valeur moyenne de θ_{lim} est de l'ordre de 29,5°. En déduire l'ordre de grandeur du coefficient de frottement mesuré.

Ex 2 : Oscillateur mécanique (CCMP)

Dans tout le problème un point surmontant une fonction désigne sa dérivée temporelle : $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

On considère un ressort d'extrémités N et M, de raideur k, de longueur à vide l_0 et de longueur $l(t) = NM$ à un instant t quelconque. Ce ressort est suspendu verticalement par son extrémité N à un point O fixe d'un support immobile dans le référentiel galiléen d'étude $\mathcal{R}$. À son extrémité M est accroché un point matériel P de masse m. L'extrémité N (resp. M) du ressort se confond avec le point O (resp. P) (cf. figure 1).

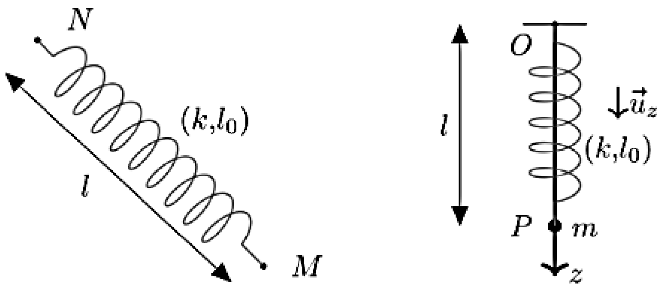

FIGURE 1 – Ressort et oscillateur vertical

On suppose que le mouvement du point matériel P reste vertical : en se repérant dans le système de coordonnées cartésiennes $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ d'origine O, le point P appartient à la droite $(O,\vec{u}_z)$.

Dans tout le problème, le ressort reste dans son domaine élastique de fonctionnement associé à une force de rappel proportionnelle à son allongement. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme égal à $\vec{g} = g\vec{u}_z$ avec $g > 0$. On néglige toute forme de frottement.

On suppose tout d'abord que le ressort a une masse m_r nulle.

❏ – **1.** Établir l'expression de l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{p,k}$ du ressort dont on prendra l'origine lorsque la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide. On exprimera $\mathcal{E}_{p,k}$ en fonction de k, l_0 et l.

❏ – **2.** Établir, en fonction de m, g et l, l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{p,p}$ du point matériel P dont on prendra l'origine en O.

❏ – **3.** En déduire l'expression de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du point matériel P de masse m dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ en fonction notamment de $l(t)$.

❏ – **4.** Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par $l(t)$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

❏ – **5.** Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente en supposant qu'à $t = 0$, le point matériel P est lâché sans vitesse initiale de la position $l(t = 0) = L > 0$. On fera apparaître une pulsation ω_0.

Quelle condition doit-on imposer à L pour que le point matériel P ne heurte pas le support fixe où est suspendu le ressort ? On exprimera cette condition en fonction de k, l_0, m et g.

Qualifier le mouvement observé : tracer l'allure de $l(t)$ en fonction de t.

Donner l'expression de la période T_0 du mouvement du point matériel P et calculer sa valeur numérique pour $k = 0{,}300 \times \pi^2 \approx 2{,}96\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ et $m = 300\,\mathrm{g}$.

Dans les 6 questions suivantes, on tient compte de la masse m_r non nulle du ressort. On suppose que l'expression de l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{p,k}$ du ressort établie à la question **1** n'est pas modifiée. Par contre, son énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{p,p}$ est affectée par cette modification. Pour la déterminer, on suppose que, quelque soit sa longueur l, la masse m_r du ressort est uniformément répartie sur toute sa longueur l et que, pour tout z compris entre 0 et l, la tranche élémentaire de ressort comprise entre z et $z + dz$ possède, dans le référentiel $\mathcal{R}$, une vitesse proportionnelle à z. On conserve les mêmes origines que précédemment pour les énergies potentielles.

❑ – **6.** Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{p,p}$ associée au ressort en fonction de m_r, g et l.

❑ – **7.** Établir l'expression de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ du ressort en fonction de m_r et l.

❑ – **8.** En déduire l'expression de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du système constitué par le point matériel P de masse m et le ressort de masse m_r dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ en fonction de m, m_r, k, g, l_0 et l.

❑ – **9.** Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par $l(t)$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Commenter.

❑ – **10.** Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente en supposant qu'à $t = 0$, le point matériel P est lâché sans vitesse initiale de la position $l(t = 0) = L$. On fera apparaître une pulsation ω_1.
Qualifier le mouvement observé en supposant que le point matériel P ne heurte pas le support fixe.
Déterminer l'expression de la période T_1 du mouvement du point matériel en fonction de T_0, m et m_r puis calculer sa valeur numérique pour $k = 0{,}300 \times \pi^2 \approx 2{,}96\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$, $m = 300\,\mathrm{g}$ et $m_r = 36{,}0\,\mathrm{g}$ (on pourra utiliser l'approximation $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$).

❑ – **11.** Quelle condition doit satisfaire m_r pour que l'écart relatif entre T_0 et T_1 ne dépasse pas 1 % ? On fera l'application numérique dans les conditions de la question précédente.

Le point matériel P de masse m est maintenant astreint à se déplacer, sans frottement, horizontalement sur une glissière parfaite qui se confond avec la droite $(O',\vec{u}_x)$ (cf figure 2). Le ressort précédent, dont on suppose la masse m_r nulle dans toute la suite du problème, est toujours accroché par son extrémité N au point O fixe dans le référentiel galiléen d'étude $\mathcal{R}$ et par son extrémité M au point matériel P :

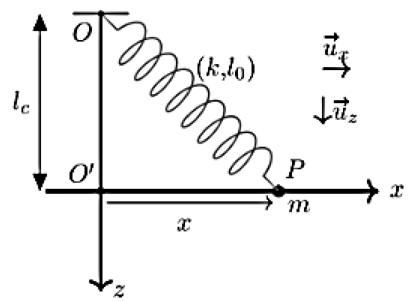

FIGURE 2 – Oscillateur horizontal

On se place maintenant dans le système de coordonnées cartésiennes $(O',\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ d'origine O' telle que la droite $(O,\vec{u}_z)$ soit perpendiculaire à la droite $(O',\vec{u}_x)$: le point matériel P est ainsi repéré par son abscisse x sur la droite $(O',\vec{u}_x)$. On note l_c la distance OO'.

❑ – **12.** Établir l'expression de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,P}$ du point matériel P en fonction de k, l_0, l_c et x en prenant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur en O' et celle de l'énergie potentielle élastique du ressort pour $l = l_0$.

❑ – **13.** En fonction du paramètre l_c, discuter des positions d'équilibre du point P et de leur stabilité respective : on exprimera les abscisses d'équilibre x_e associées en fonction des données et on donnera les allures correspondantes de $\mathcal{E}_{p,P}$ en fonction de x en précisant les valeurs remarquables.

❑ – **14.** Dans quel cas peut-on parler de barrière de potentiel ? Préciser sa hauteur U_b en fonction des données.

❑ – **15.** Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par $x(t)$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
Que représente physiquement $\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx}(x)$ en termes de force ?

❑ – **16.** Transformer l'équation différentielle du mouvement en 2 équations différentielles d'ordre 1 en variables $u_0(t) = x(t)$ et $u_1(t) = \dot{x}(t)$.
En introduisant les estimations $u_{0,n}$ de $u_0(t)$ et $u_{1,n}$ de $u_1(t)$ aux instants $t_n = n\Delta t$ pour $n \in \mathbb{N}$ où Δt désigne le pas de discrétisation temporelle, former les 2 relations exprimant $u_{0,n+1}$ et $u_{1,n+1}$ en fonction de $u_{0,n}$ et $u_{1,n}$ déduites de la méthode d'Euler explicite.
Quelles valeurs doit-on donner pour $n = 0$ à $u_{0,n}$ et $u_{1,n}$?

Pour $k = 0{,}300 \times \pi^2 \approx 2{,}96\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$, $m = 300\,\mathrm{g}$, $l_0 = 1{,}00\,\mathrm{m}$ et $l_c = 0{,}200\,\mathrm{m}$, on effectue la résolution numérique de l'équation différentielle du mouvement pour déterminer $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ en fonction de t pour 2 conditions initiales A et B différentes. Les résultats sont présentés sur la figure 3.

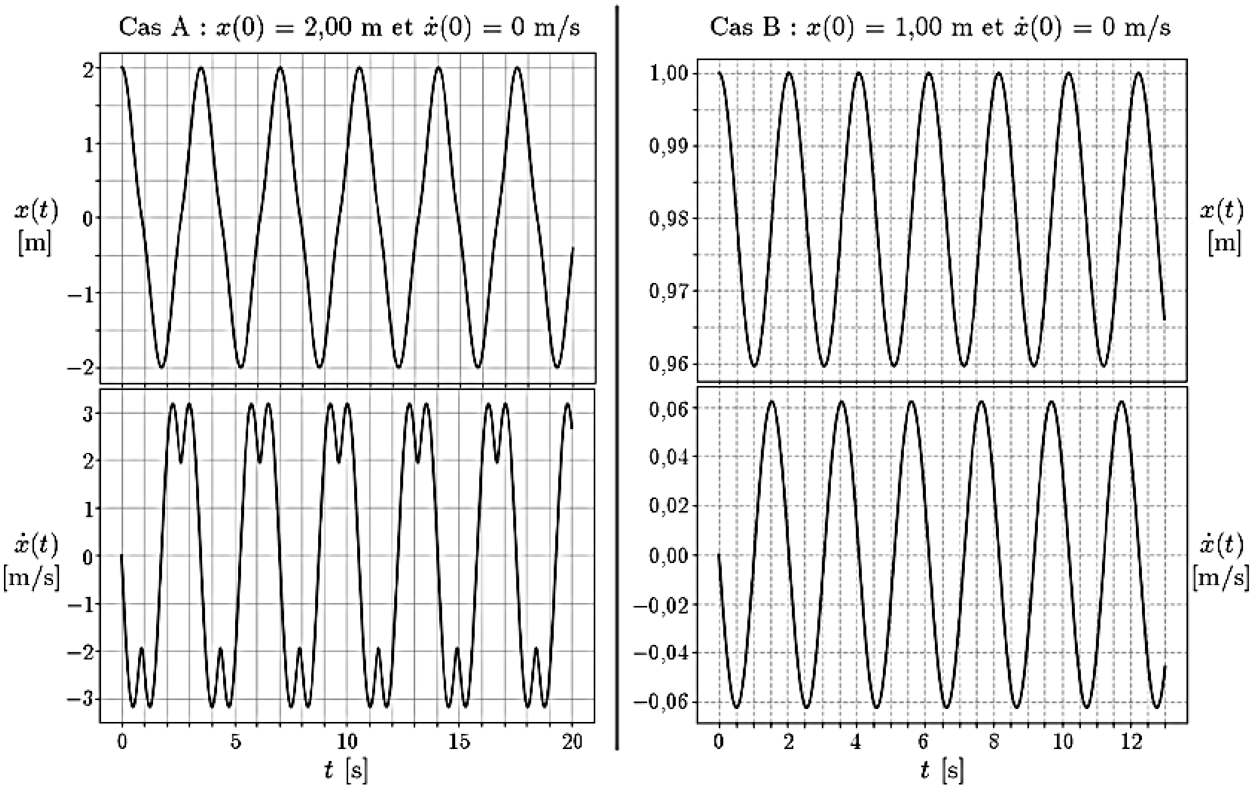

FIGURE 3 – Solutions numériques pour deux conditions initiales distinctes

❑ – **17.** Comparer le plus précisément possible la nature du mouvement dans les 2 cas.

❑ – **18.** Dans le cas B, établir une expression approchée de la valeur moyenne $\langle x(t) \rangle$ des oscillations (en fonction de l_c et l_0) et de leur période T_2 en fonction de T_0, l_c et l_0.
Effectuer les applications numériques et comparer les résultats aux valeurs lues sur la figure 3. Conclure sur les approximations effectuées.

❑ – **19.** Les 2 cas A et B correspondent à deux types de mouvements différents du point P. Dans le cas où les conditions initiales sont du type $x(t=0) = X_0 > 0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$, établir la condition que doit vérifier X_0 pour que l'on soit dans le cas A.

En conservant les valeurs $k = 0{,}300 \times \pi^2 \approx 2{,}96\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$ et $l_0 = 1{,}00\,\mathrm{m}$, on a représenté sur la figure 4 l'allure de $\frac{d\mathcal{E}_{\mathrm{p},P}}{dx}(x)$ en fonction de x dans les cas $l_c < l_o$ (à gauche) et $l_c > l_o$ (à droite).

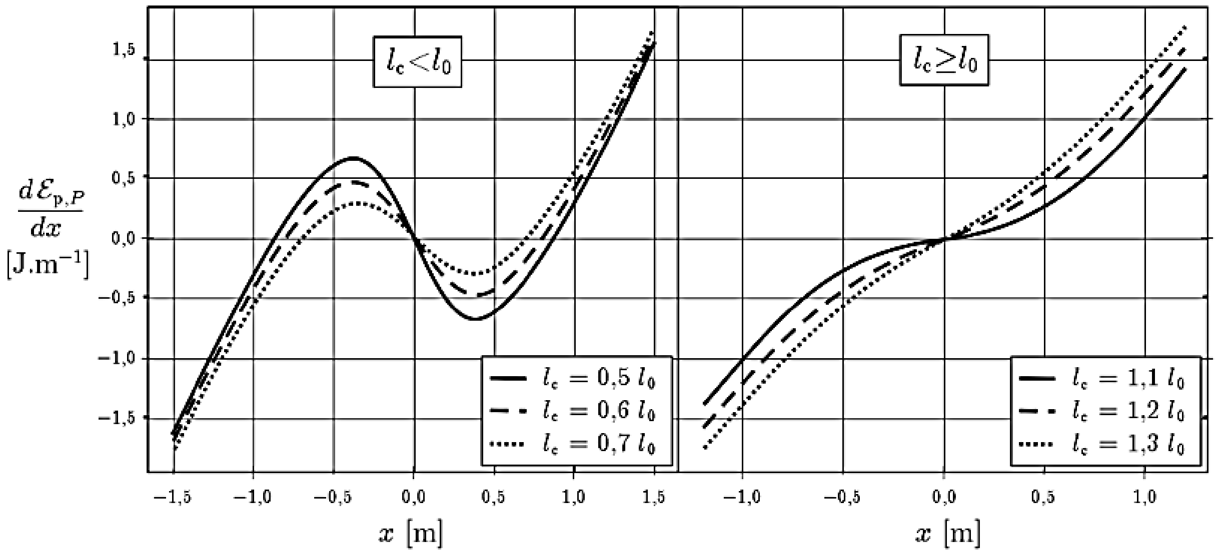

FIGURE 4 – Représentation graphique de la dérivée de l'énergie potentielle de P

On suppose pouvoir modéliser la fonction $\frac{d\mathcal{E}_{\mathrm{p},P}}{dx}(x)$ par un polynôme de degré 3 de la variable x de la forme :

$$\frac{d\mathcal{E}_{\mathrm{p},P}}{dx}(x) \simeq \alpha_{\mathrm{m}} x + \beta_{\mathrm{m}} x^3$$

❑ – **20.** Commenter cette affirmation et préciser en fonction de la valeur de l_c les signes des constantes α_{m} et β_{m}.

Réécrire alors l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par $x(t)$.

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Duffing non amortie.

-- FIN DE L'ENONCE –