

Durée 4h

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la **clarté**, à la **précision** et à la **concision** de la **rédaction**. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

#### RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un **stylo noir ou bleu foncé non effaçable** pour la rédaction de votre composition ; **d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.**
- **Ne pas utiliser de correcteur.**
- **Numéroter les copies : "i/nombre total".**
- **Respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.**
- **Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.**

**La page 15 de ce sujet est à rendre avec la copie (document réponse).**

### Ex 1 : Batterie d'accumulateurs au plomb

Données numériques :

Facteurs de conversion,  $P^\circ = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ ;  $0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$ ;  $1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ L}$ . Concentration de référence  $C^\circ = 1 \text{ mol/L}$ . Masse volumique de l'eau liquide pure  $\rho_0 = 1,0 \text{ kg/L}$ .

Constantes physiques :

Charge élémentaire	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante d'AVOGADRO	$\mathcal{N}_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de FARADAY	$\mathcal{F} = e\mathcal{N}_A = 9,6 \cdot 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante molaire des gaz parfaits	$R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de NERNST à $25^\circ\text{C}$	$\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10 = 0,059 \simeq 0,06 \text{ V}$
Permittivité électrique du vide	$\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Quelques potentiels rédox standard à  $25^\circ\text{C}$  :

Couple oxydant/réducteur	$\text{Pb}^{2+} / \text{Pb}$	$\text{H}_2\text{O} / \text{H}_2$	$\text{O}_2 / \text{H}_2\text{O}$	$\text{PbO}_2 / \text{Pb}^{2+}$
Potentiel standard $E^\circ$ (V)	-0,13	0	1,23	1,69

L'acide sulfurique  $\text{H}_2\text{SO}_4$  (masse molaire  $M = 98 \text{ g/mol}$ ; masse volumique de l'acide sulfurique liquide pur  $\rho = 1,8 \text{ kg/L}$ ) est un diacide :

Couple acide/base	$\text{H}_2\text{SO}_4 / \text{HSO}_4^-$	$\text{HSO}_4^- / \text{SO}_4^{2-}$
Constante d'acidité $K_A^\circ$	$pK_{\text{a}_1} = -3,0$	$pK_{\text{a}_2} = 1,9$

Une batterie au plomb est constituée d'un certain nombre d'éléments accumulateurs logés dans un bac en plastique fermé par un couvercle scellé (figure 1). Chacun de ces accumulateurs est composé d'une électrode positive et d'une électrode négative, baignant toutes deux dans la même solution aqueuse d'acide sulfurique  $H_2SO_4$  (à la concentration  $c$ ) et de sulfate de plomb II ( $Pb^{2+}$ ,  $SO_4^{2-}$ ) (à la concentration  $c'$ ). Les électrodes sont formées d'une grille (chimiquement inerte mais conduisant l'électricité) dont les alvéoles sont remplies d'une pâte poreuse ; cette pâte est formée de peroxyde de plomb  $PbO_2$  pour une des électrodes et de plomb métallique  $Pb$  pour l'autre. Les espèces en solution dans l'eau sont donc seulement  $H^+$  (qu'on pourra choisir de noter  $H_3O^+$ ),  $Pb^{2+}$  et les ions  $HSO_4^-$  issus de l'acide sulfurique et  $SO_4^{2-}$  ;  $Pb$  et  $PbO_2$  sont des solides.



FIGURE 1 – Une batterie 12 V, 65 A·h fabriquée au Royaume-Uni par Yuasa<sup>©</sup>

- 1 – 1.** Laquelle des deux électrodes est l'électrode positive ?

Justifier et préciser, pour chacune des deux électrodes, l'équation-bilan de la réaction à l'électrode en fonctionnement spontané (c'est-à-dire en régime de décharge de la batterie).

- 1 – 2.** Établir l'expression de la force électro-motrice  $E$  d'un tel accumulateur (à 25°C) en fonction des données et des seules concentrations  $[H^+]$  (ou bien  $[H_3O^+]$ ) et  $[Pb^{2+}]$ .

Supposant pour une batterie la concentration de sulfate de plomb II  $c' = [Pb^{2+}] = 1,0 \text{ mol/L}$ , calculer le pH de la solution nécessaire pour obtenir  $E = 1,9\text{V}$  ; commenter.

En toute rigueur l'étude de l'accumulateur devrait être complétée à cause de la formation d'un précipité solide de sulfate de plomb  $PbSO_4$  selon le bilan  $Pb^{2+} + SO_4^{2-} = PbSO_4$ . La prise en compte de cette réaction se traduit par une modification de la force électromotrice  $E$  des accumulateurs au plomb par rapport au calcul précédent, qui devient de l'ordre de 2,0 V. À part cette modification numérique nous ne tiendrons pas compte du précipité de sulfate de plomb dans ce qui suit.

Les batteries d'accumulateurs automobiles ont une force électromotrice  $E_t$  de l'ordre de 12 V ; la batterie étudiée ici est caractérisée par sa capacité  $Q_t = 65 \text{ A}\cdot\text{h}$  (on rappelle que la capacité électrique d'une pile est la valeur de la charge électrique qui la traverse avant que la réaction électrochimique de décharge s'arrête).

- 3. Combien d'accumulateurs faut-il associer pour réaliser une batterie automobile ?

Représenter cette association sur un schéma.

Quelle est la capacité  $Q$  de chacun des accumulateurs ?

En déduire les quantités de matière totales  $n_{\text{Pb}}$  et  $n_{\text{PbO}_2}$  contenues dans les grilles de l'ensemble des électrodes contenues dans la batterie au complet (on admettra que ces espèces Pb et PbO<sub>2</sub> sont les seuls réactifs limitants).

Obtenir une valeur imposée du pH impose de pouvoir contrôler la concentration molaire volumique  $c$  (ou, ce qui revient au même, la concentration massique  $c_m$ ) de l'acide sulfurique dans l'accumulateur. On mesure en pratique cette concentration au moyen d'un *pèse-acide*, dispositif qui évalue la masse volumique  $\rho_{\text{sol}}$  de la solution ou bien sa densité relativement à l'eau pure  $d = \rho_{\text{sol}}/\rho_0$ . Celle-ci dépend en effet simplement de la concentration totale  $c$  en formes sulfatées,  $d = a + b \cdot c$  avec  $c = [\text{H}_2\text{SO}_4] + [\text{HSO}_4^-] + [\text{SO}_4^{2-}]$ ,  $a$  et  $b$  étant des constantes.

- 4. Déduire des données les valeurs numériques de  $a$  et  $b$ .

D'après un site technique automobile, la densité de l'électrolyte d'une batterie scellée en bon état doit être de l'ordre de 1,3. En déduire  $c$  et commenter.

Dans une solution aqueuse contenant de l'acide sulfurique à la concentration molaire volumique  $c$ , on note  $x_1 = [\text{H}_2\text{SO}_4]/c$ ,  $x_2 = [\text{HSO}_4^-]/c$  et  $x_3 = [\text{SO}_4^{2-}]/c$  et les tracés de  $x_1(\text{pH})$ ,  $x_2(\text{pH})$  et  $x_3(\text{pH})$  porte le nom de *courbes de prédominance*. Ces courbes sont tracées sur la figure 2.

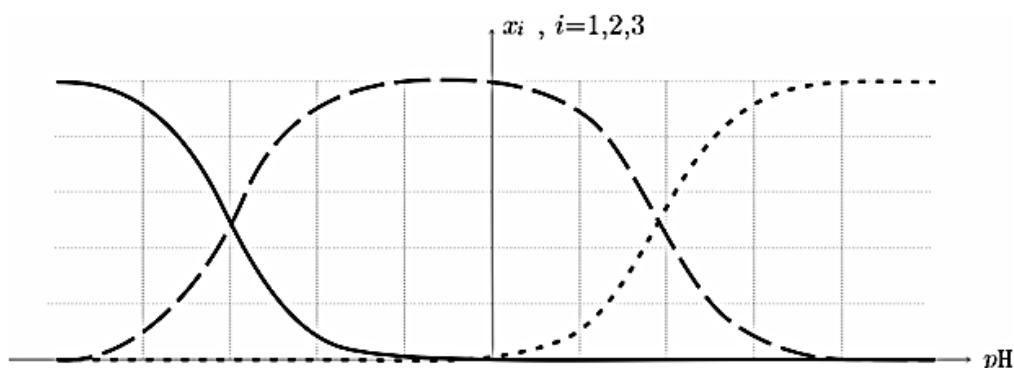


FIGURE 2 – Diagramme de prédominance pour l'acide sulfurique

- 5. Donner les expressions des constantes d'acidité  $K_{\text{a}_1}$  et  $K_{\text{a}_2}$ .

Reproduire rapidement sur votre copie ce diagramme, complété par l'identification des trois courbes et préciser en les justifiant les graduations des axes horizontal et vertical.

- 6. Déterminer les valeurs de  $c$  et  $c_m$  dans un accumulateur au plomb à usage automobile ; proposer un commentaire des valeurs numériques obtenues.

Les courbes de la figure 2 ont été tracées au moyen d'un script Python utilisant une fonction dont l'en-tête est `def Pred(pH):` qui, pour une valeur donnée du pH, donne pour résultat le triplet  $(x_1, x_2, x_3)$ .

- 7. Déduire des expressions de  $K_{\text{a}_1}$  et  $K_{\text{a}_2}$  celles des  $x_i$  et proposer le code Python de la fonction `Pred`.

## **Ex 2 : Oscillateur à portes logiques**

On étudie une situation physique instable conduisant à des oscillations de relaxation, terme qui désigne des oscillations non linéaires obtenues par l'augmentation continue d'une contrainte, suivie du relâchement subit de celle-ci.

Le problème est consacré à l'étude des régimes stables et instables d'un montage à portes logiques. Il s'agit de la résolution par morceaux d'une équation différentielle linéaire, avec raccordement par continuité d'une grandeur physique.

### **Formulaire et données numériques**

On donne  $\ln(2) = 0,7$  et  $\ln(3) = 1,1$ .

$$\text{Si } t = \tan \theta \text{ alors } \cos^2 \theta = \frac{1}{1+t^2} \text{ et } \sin^2 \theta = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

On rappelle par ailleurs que  $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$  et  $\sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta$ .

$$\text{On pourra prendre } \sqrt{3} \simeq 1,73, \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0,58, \pi \simeq 3,14 \text{ et } 2/\pi \simeq 0,64;$$

## **II Oscillateur à portes logiques**

Dans la partie précédente, les oscillations étaient dues aux deux états du dipôle  $\mathcal{D}$ . On peut également utiliser un circuit comportant une rétroaction pour engendrer des oscillations : c'est le cas dans cette partie.

### **II.A Identification d'un circuit intégré**

On récupère au laboratoire un circuit intégré comportant un certain nombre de portes logiques identiques, dont on est sûr :

- de leur tension d'alimentation  $V_{cc} = 15$  V associée à la technologie CMOS employée ;
- de la faible valeur ( $i < 0,1 \mu\text{A}$ ) des courants d'entrée, qu'on négligera donc dans tout ce qui suit.

Les références du circuit intégré n'étant plus lisibles, on n'est plus sûr de la nature des portes en question ; on sait cependant qu'il s'agit nécessairement de portes figurant dans la liste AND, OR, NAND, NOR (ou en français ET, OU, NON ET, NON OU). Pour déterminer la nature de ces portes, on réalise deux séries de mesures de la caractéristique *entrée-sortie* selon les schémas des figures 3 et 4

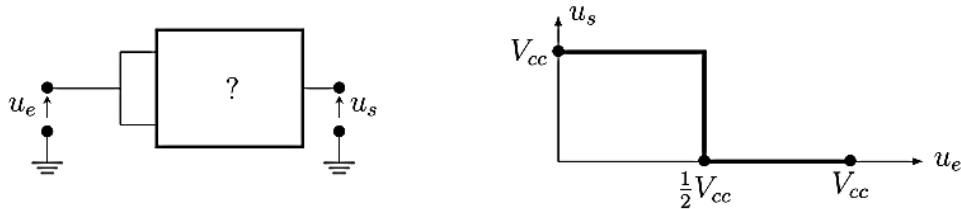


FIGURE 3 – Montage d'une première série de mesures (à gauche) et ses résultats (à droite).

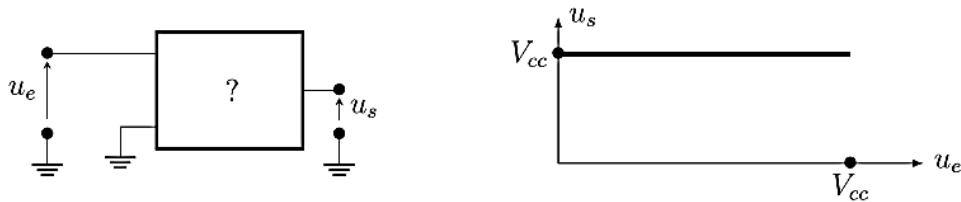
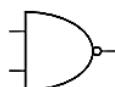


FIGURE 4 – Montage de la seconde série de mesures (à gauche) et ses résultats (à droite).

- – 9.** Que peut-on déduire de la *première* expérience (figure 3) ? Et de la *seconde* expérience (figure 4) ?

On poursuivra l'étude, indépendamment des conclusions ci-dessus, en n'utilisant que des portes NAND (NON ET) que l'on symbolisera à l'aide du schéma suivant :



- – 10.** Proposer des montages n'utilisant que des portes NAND réalisant les fonctions NOT, AND et OR. On vérifiera le comportement de chaque montage en donnant sa table de vérité.
- – 11.** Le circuit intégré *Texas Instruments CD-4011* (photographie de la figure 5) comporte quatorze broches (*pins* en anglais). Combien de portes NAND comporte-t-il au maximum ? Justifier.



FIGURE 5 – Circuit intégré TI CD-4011

## II.B Emploi de portes logiques

De nombreux documents destinés à la réalisation de montages d'électronique musicale proposent l'utilisation du circuit théorique présenté sur la figure 6 avec  $R = 1 \text{ M}\Omega$  et  $C = 100 \text{ nF}$ . La tension d'entrée marquée  $v$  (pour « valid ») peut être, selon le cas :

- maintenue égale à  $v = 0 \text{ V}$  (le circuit est alors dit *invalidé*) ;
- portée à la valeur constante  $v = +V_{cc}$  (le circuit est alors dit *validé*). On considérera qu'à l'instant de la validation le condensateur est déchargé.

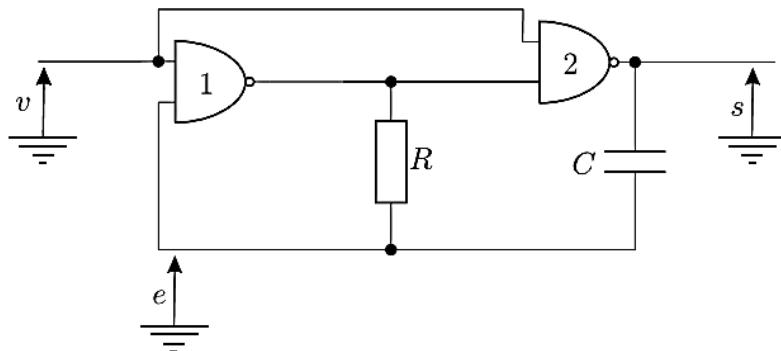


FIGURE 6 – Un circuit classique de l'électronique musicale

On notera  $s(t)$  la tension en sortie de la porte 2 et  $e(t)$  la tension à l'autre entrée de la porte 1 (voir figure 6). Les tensions  $e$ ,  $s$  et  $v$  sont toutes déterminées relativement à la masse électrique du montage. Dans toute la suite de cette partie, on suppose que le seuil de basculement des portes NAND utilisées est égal à  $V_{cc}/2$ . On notera respectivement  $b_s$  et  $b_e$  les valeurs binaires associées à  $s$  et  $e$ ; ainsi par exemple  $b_s = 1$  si  $s > V_{cc}/2$  et  $b_s = 0$  sinon.

- – 12. Lorsqu'il est invalidé, montrer que le circuit atteint toujours un état stable pour lequel on déterminera les valeurs de  $s$  et  $e$ , et de  $b_s$  et  $b_e$ .
- – 13. À l'instant  $t = 0$  le circuit est alors validé. Montrer qu'une seule des deux portes NAND change d'état (on dit qu'elle bascule); laquelle ?  
Que dire de la différence  $e(t) - s(t)$  en  $t = 0^+$  et en  $t = 0^-$ ? Exprimer  $e(t)$  et en déduire que cet état dure jusqu'à un instant  $t_1$ , que l'on déterminera en fonction de  $R$  et  $C$ .

Un nouveau changement d'état a lieu à l'instant  $t = t_1$

- – 14. Exprimer  $s(t_1^+)$  et  $e(t_1^+)$  où la notation  $t_1^+$  désigne la limite  $t \rightarrow t_1$  par valeur supérieure. Déterminer alors  $e(t)$  pour  $t > t_1$  et en déduire que cet état dure jusqu'à un instant  $t_2$  que l'on exprimera en fonction de  $R$  et  $C$ .
- – 15. Avec la même convention, exprimer  $s(t_2^+)$  et  $e(t_2^+)$ , puis  $e(t)$  pour  $t > t_2$ . En déduire l'existence d'un nouvel instant de basculement  $t_3 > t_2$  que l'on exprimera en fonction de  $R$  et  $C$ .
- – 16. Tracer l'allure de  $e(t)$  et  $s(t)$  sur une durée au moins égale à  $2t_3$ , en positionnant clairement les instants  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  ainsi que les valeurs de  $e$  et  $s$  correspondantes.
- – 17. Commenter le comportement du circuit et calculer la valeur numérique de la durée caractéristique associée.  
Proposer une application dans le domaine pour lequel ce circuit a été conçu.

### Ex 3 : Projet Hyperloop – Etude de la propulsion de la capsule

Le projet de transport commun terrestre Hyperloop<sup>1</sup> a été présenté en 2013. Son principe est de transporter des passagers à haute vitesse dans des capsules placées à l'intérieur d'un tube partiellement vidé pour réduire les frottements.

Ce projet étudie la possibilité de relier Los Angeles à San Francisco, villes californiennes distantes d'environ 600 km, en 35 minutes. Les passagers sont transportés dans des capsules, propulsées par un moteur à induction, qui se déplacent sur coussin d'air dans un tube à pression réduite. L'ensemble est alimenté par des cellules solaires disposées le long du tube. L'objet de cette partie est l'étude de la propulsion de la capsule.

Certaines données et formules sont données en fin de cette 1<sup>e</sup> partie.

Il est prévu d'assurer les accélérations et freinages de la capsule par un moteur linéaire à induction. Ce moteur est constitué d'un stator, fixe par rapport au tube et produisant un champ magnétique variable et d'une partie mobile, appelée « rotor », solidaire de la capsule (cf figure 7). Dans ce moteur, le « rotor » ne suit pas un mouvement de rotation, mais un mouvement de translation dans la direction du tube.

#### **A – Production du champ magnétique**

Le champ magnétique est produit par des paires de bobines disposées de part et d'autre du rotor. En première approximation, on peut considérer que ces bobines sont assimilables à des solénoïdes infinis.

**A.1)** On considère un solénoïde infini, d'axe  $Oz$ , de rayon  $a$ , comportant  $n$  spires par unité de longueur, parcouru par un courant lentement variable d'intensité  $i(t)$ . On admet que l'on peut travailler dans le cadre de l'approximation des régimes quasi permanents. On considère que le champ magnétique créé à l'extérieur du solénoïde est nul.

*a)* Énoncer le théorème d'Ampère.

*b)* Etablir l'expression du champ magnétique créé à l'intérieur du solénoïde. On notera  $B_0$  le module de ce champ.

**A.2)** Pour produire le champ statorique, on dispose régulièrement le long du tube des paires de solénoïdes en inversant le sens du courant à chaque changement de paires de solénoïdes. Ce dispositif permet de créer un champ magnétique dirigé selon  $\vec{u}_z$  dont la représentation graphique est donnée figure 6.

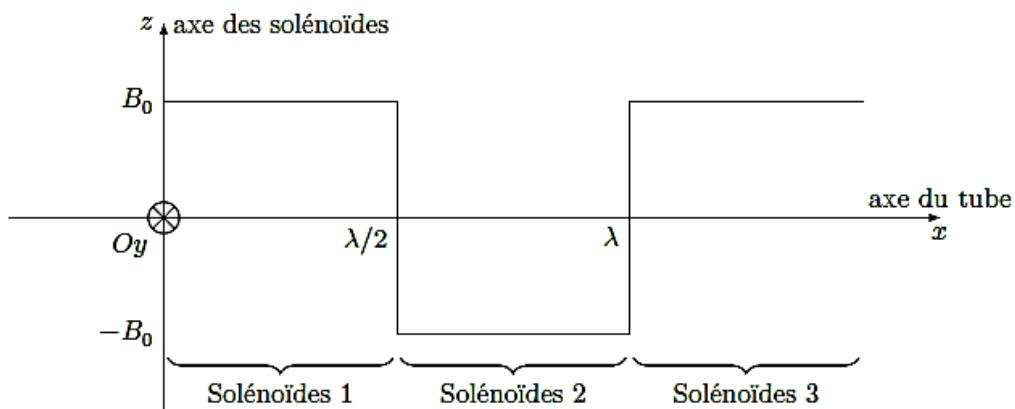


Figure 6

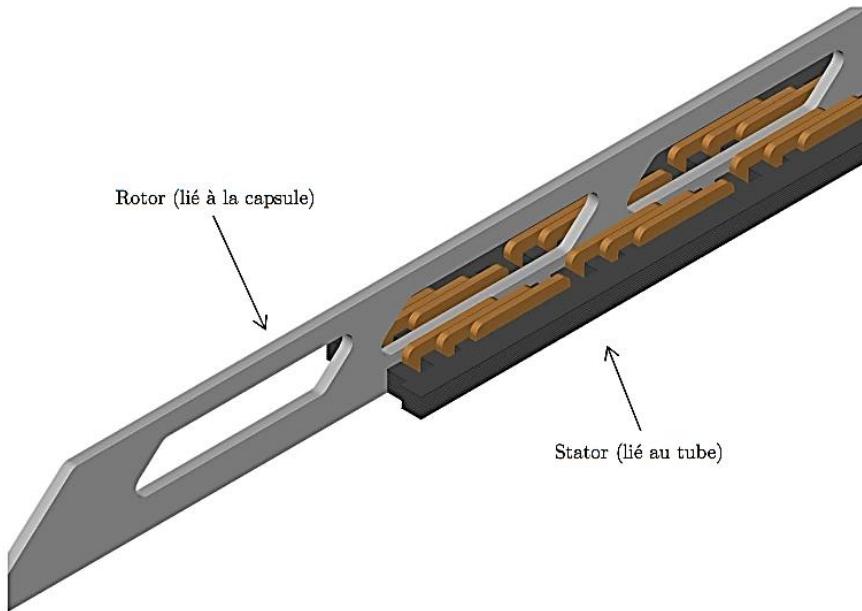
Le champ produit possédant une périodicité spatiale, il est possible de le décomposer en somme de fonctions sinusoïdales. En ne conservant que le premier terme de cette somme, on peut écrire  $\vec{B}(x) = \frac{4B_0}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \vec{u}_z$ . Le courant circulant dans les solénoïdes varie lentement de façon périodique  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ .

*a)* Exprimer  $\vec{B}(x, t)$ . On pourra poser  $B'_0 = \frac{4\mu_0 n I_0}{\pi}$ .

*b)* Montrer que  $\vec{B}(x, t)$  peut s'écrire comme la superposition de deux ondes progressives circulant en sens inverse. Donner l'expression de ces deux ondes, préciser leur sens de propagation et leur vecteur d'onde.

<sup>1</sup> [http://www.teslamotors.com/sites/default/files/blog\\_attachments/hyperloop\\_alpha3.pdf](http://www.teslamotors.com/sites/default/files/blog_attachments/hyperloop_alpha3.pdf)

**A.3)** Pour le moteur étudié, on doit éliminer l'onde progressant selon  $-\vec{u}_z$ . Pour cela, on va remplacer chaque paire de bobine par trois paires, décalées spatialement de  $\lambda/3$  et alimentées par des courants déphasés de  $2\pi/3$ .



**Figure 7** Moteur linéaire à induction

Le champ produit est alors la superposition des champs produits par les 3 paires et s'écrit

$$\vec{B}(x, t) = B'_0 \left( \cos(\omega t) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(x - \frac{\lambda}{3}\right)\right) + \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(x - \frac{2\lambda}{3}\right)\right) \right) \vec{u}_z$$

Montrer que le champ produit peut s'écrire :

$$\vec{B} = \frac{3B'_0}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t\right) \vec{u}_z$$

Caractériser ce champ.

#### B – Force s'exerçant sur le rotor

Le rotor, solidaire de la capsule, peut être modélisé par une spire filiforme carrée de côté  $l \ll \lambda$  et de résistance  $R$ . Cette spire est située dans le plan  $Oxy$  de la figure 6 et se déplace à la vitesse  $\vec{v} = v\vec{u}_x$  selon l'axe du tube. Initialement, le centre  $C$  de la spire est en  $x = 0$ .

**B.1)** En considérant pour cette question que le champ magnétique créé par le stator est uniforme à l'échelle de la spire, de valeur sa valeur en  $C$ , évaluer le flux de ce champ à travers la spire que l'on orientera préalablement sur un schéma.

**B.2)** Déterminer la force électromotrice induite  $e$  dans le rotor en tenant compte du choix d'orientation.

**B.3)** Déterminer l'équation électrique décrivant l'évolution du courant induit circulant dans le rotor. En déduire l'expression du courant induit  $i(t)$  en régime sinusoïdal établi.

**B.4)** En conservant l'expression de  $i(t)$  obtenue à la question précédente mais en ne considérant plus que le champ magnétique est uniforme à l'échelle de la spire, déterminer la résultante des forces de Laplace s'exerçant sur le rotor ainsi que sa valeur moyenne.

**B.5)** La capsule peut-elle démarrer par l'action de cette seule force ?

**B.6)** Que faut-il faire si l'on souhaite freiner la capsule à l'aide de ce système ?

#### Données et formulaire

##### Trigonométrie

$$\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin(a) \cos(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$$

## **Ex 4 : Instrument de bord pour la communication**

La plaisance, en tant que sport ou loisir, est pratiquée sur des bateaux à voile ou à moteur, sur des lacs ou sur la mer.

Contrairement aux bateaux de course ou aux bateaux à usage professionnel, les constructeurs de bateaux de plaisance ont mis l'accent sur le confort et la sécurité des plaisanciers.

Afin de pouvoir assurer les opérations de maintenance sur la coque d'un bateau, celui-ci est mis en cale sèche pour l'hiver. Au printemps, la plupart des plaisanciers remettent leur bateau à l'eau à l'aide d'un camion grue, puis vérifient tous les éléments de sécurité.

### **IV.1 - Communication**

Pour les échanges radio, il est obligatoire d'avoir une radio VHF (Very High Frequency) utilisable sur plusieurs canaux. L'**annexe** fournit les fréquences et leur utilisation.

Dans cette partie, nous nous occuperons du Canal 16 de la VHF.

On assimilera l'air au vide.

Le bateau est équipé d'une VHF RAYMARINE VHF Fixe RAY 55E dont les caractéristiques sont données dans la **figure 9** :

Modèle VHF	Caractéristiques
 RAYMARINE VHF Fixe RAY 55E	<ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Alimentation : 12 V</li> <li><input type="checkbox"/> Puissance de sortie audio : 5 W - 4 Ohms</li> <li><input type="checkbox"/> Mode de fixation : sur étrier</li> <li><input type="checkbox"/> Taille et type d'écran : LCD 52 mm</li> <li><input type="checkbox"/> Puissance en émission : 25 W</li> <li><input type="checkbox"/> Consommation en veille : &lt; 0,5 A</li> <li><input type="checkbox"/> Consommation à 25 W : &lt; 6 A</li> <li><input type="checkbox"/> Dimensions : L 191 mm x H 93,8 mm x P 98 mm</li> </ul>

**Figure 9** - Présentation du modèle de VHF RAYMARINE  
(D'après : <http://www.discount-marine.com/raymarine-vhf-fixe-ray-55e>)

Données	
Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$	Pulsion $\omega = 2\pi f$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$
Permittivité du vide : $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-7} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$	Longueur d'onde $\lambda$ en m
Célérité de l'onde dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	

**Q57.** Déterminer un ordre de grandeur de la longueur d'onde de cette fréquence associée au Canal 16 de la VHF.

L'onde émise par la radio est de la forme  $\vec{E} = E_0 \cdot \cos \left( \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{u}_y$  en prenant un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  tel que  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  soient parallèles au plan de la mer.

**Q58.** Qualifier cette onde. Plusieurs adjectifs sont attendus.

**Q59.** Quelle est la direction de propagation et quel est le sens de propagation de cette onde ?

**Q60.** Rappeler les équations de Maxwell dans le vide en l'absence de charges et de courant.

On rappelle la formule suivante :  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$ .

**Q61.** Déterminer l'équation de propagation du champ électrique  $\vec{E}$ .

**Q62.** Quelle relation doit exister entre  $c$ ,  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  pour que cette onde satisfasse cette équation de propagation ?

**Q63.** Préciser le vecteur d'onde  $\vec{k}$  de cette onde émise.

**Q64.** Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}$  associé à cette onde en fonction, entre autres paramètres et variables, de  $E_0$ ,  $k$  et de  $\omega$ .

**Q65.** Exprimer, en fonction de  $E_0$ ,  $\mu_0$  et de  $c$ , le vecteur de Poynting  $\vec{P}$  associé à cette onde. Quelle est sa signification physique ?

**Q66.** Exprimer la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting en fonction de  $c$ ,  $E_0$  et de  $\epsilon_0$ .

## ANNEXE

**Tableau des canaux pour la VHF**

Canal VHF	Fréquence en MHz	Commentaire
01	156,05	
02	156,100	
03	156,150	CROSS Centre Régional Opérationnel de Surveillance et de Sauvetage
04	156,200	CROSS
05	156,250	Autorités portuaires
06	156,300	Communication directe navire à navire
07	156,350	Marine Nationale
08	156,400	Communication de Navire à Navire
09	156,450	<b>Capitainerie des ports de plaisance</b>
10	156,500	Sémaphore de la Marine Nationale
11	156,550	Marine Nationale
12	156,600	Autorités Portuaires
13	156,650	CROSS (Interrogation des navires dans les 3 DST de la Manche) et Autorités portuaires
14	156,700	Autorités Portuaires
15	156,750	Surveillance des plages
16	156,800	<b>CANAL D'URGENCE - APPEL DE DÉTRESSE - SÉCURITÉ</b>
17	156,850	Marine Nationales et Autorités Portuaires
18	156,900	Écluses
19	156,950	Port : Annonces d'entrée, Régulation de trafic, Diffusion de consignes

## Ex 5 : Etude de systèmes optiques

Les différentes parties de cet exercice sont complètement indépendantes les unes des autres.

### Partie A : Lentille gravitationnelle

La détection des exoplanètes, planètes situées en dehors de notre système solaire, constitue l'un des domaines les plus fascinants et dynamiques de l'astronomie moderne. On étudie la possibilité d'obtenir une image détaillée d'une exoplanète située à une distance de 100 années-lumière du Soleil. On se ramène à une situation simplifiée : on considère deux points à la surface de l'exoplanète et on cherche à les distinguer ou à mesurer la distance qui les sépare.

Les données sont regroupées p.13.

Dans cette partie, on étudie la possibilité d'utiliser le Soleil comme lentille gravitationnelle pour former l'image d'une exoplanète. Il s'agit d'un projet exploratoire, proposé par Slava Turyshev (NASA Jet Propulsion Laboratory) et ses collaborateurs, qui a été sélectionné par la NASA pour son aspect prometteur .

Un astre massif tel qu'une étoile ou un trou noir crée un champ gravitationnel et courbe l'espace-temps selon les lois de la relativité générale. La présence de l'astre conduit à une déviation de la lumière – qui suit un chemin optimal (géodésique) dans l'espace-temps – et par suite au phénomène de lentille gravitationnelle.

Considérons un point  $A_0$  d'une exoplanète situé à l'infini, derrière le Soleil de centre  $S$ . Il émet des rayons lumineux parallèles à l'axe optique défini comme la droite passant par  $A_0$  et  $S$ . On admet que ces rayons sont déviés par le Soleil d'un angle :

$$\chi = \frac{2r_{\text{sch}}}{b}$$

où  $r_{\text{sch}} = \frac{2GM_s}{c^2}$  est le rayon de Schwarzschild du Soleil et  $b$  le paramètre d'impact du rayon lumineux, c'est-à-dire sa distance à l'axe optique. Suite à sa déviation, ce rayon intersecte l'axe optique en un point  $F_b$ . La courbure des rayons due au Soleil est très faible : ainsi, il est possible de modéliser le rayon lumineux par deux demi-droites, comme sur le schéma de la figure 7 (qui n'est évidemment pas à l'échelle). Le Soleil y est représenté par un cercle et son centre par le point  $S$ .

Pour un rayon lumineux rasant le Soleil (tracé en gris épais), on peut considérer que  $b = R_s$ , avec  $R_s$  le rayon du Soleil. On note  $F_0$  le point d'intersection de ce rayon avec l'axe optique et on l'appelle *foyer gravitationnel du Soleil*.

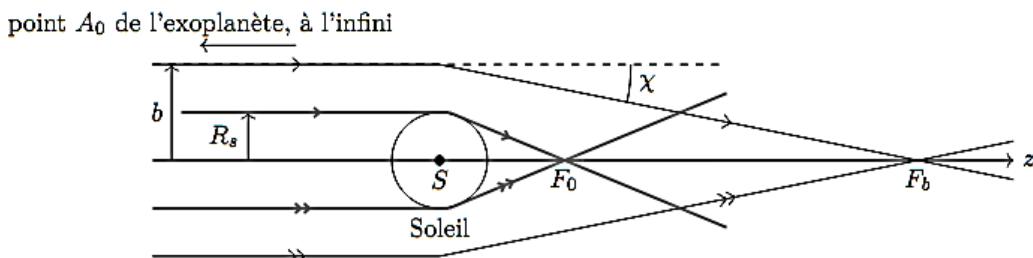


Figure 7

**Q15.** Exprimer la distance  $SF_b$  en fonction de  $r_{\text{sch}}$  et  $b$ . Calculer numériquement  $z_0 = SF_0$ . On exprimera cette distance en unités astronomiques et on la comparera au rayon de l'orbite de Neptune, qui est de 30 unités astronomiques.

**Q16.** Analyser la possibilité, pour un observateur situé entre  $S$  et  $F_b$ , d'exploiter l'effet de lentille gravitationnelle pour voir le point  $A_0$ .

On décrit ce phénomène de déviation de la lumière comme une *lentille gravitationnelle*.

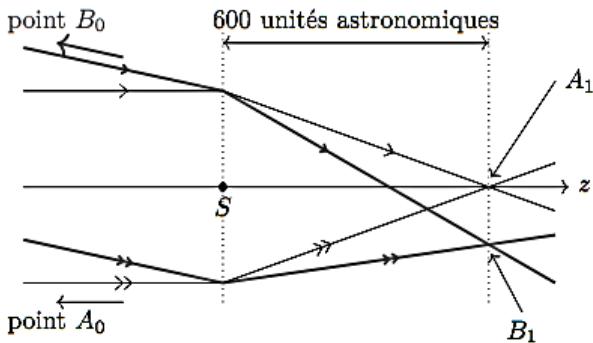
**Q17.** Comparer le devenir de rayons venant de l'infini, parallèles à l'axe optique, lorsqu'ils sont déviés par :

- une lentille mince en verre, utilisée en optique géométrique ;
- une lentille gravitationnelle.

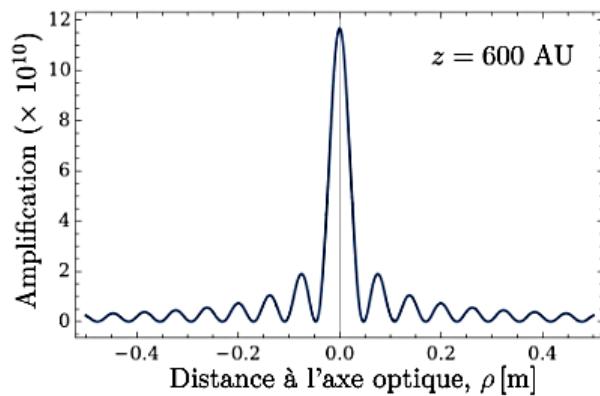
Il est conseillé d'illustrer votre réponse à l'aide de schémas.

Un des intérêts principaux de cette lentille gravitationnelle est le grand pouvoir de résolution qu'elle permet d'obtenir, c'est-à-dire une grande capacité à distinguer des détails. Les questions qui suivent ont pour but de déterminer la distance minimale entre deux points de la surface d'une exoplanète que l'on peut discerner grâce à une lentille gravitationnelle.

On suppose que l'exoplanète se trouve à une distance de 100 années-lumière. On se place au point  $F_1$  tel que  $SF_1 = 600$  au. Une image  $A_1$  de  $A_0$  se forme en ce point. On considère un deuxième point  $B_0$ , situé à la surface de l'exoplanète, hors de l'axe optique. La lentille gravitationnelle solaire forme une image  $B_1$  de  $B_0$  dans le plan perpendiculaire à l'axe optique passant par  $A_0$  (voir figure 8a). On admet que les points  $B_0$ ,  $S$  et  $B_1$  sont alignés.



(a)



(b)

Figure 8

**Q18.** Exprimer la distance  $A_1B_1$  en fonction de  $A_0B_0$ ,  $SA_0$  et  $SA_1$ .

En pratique, la lumière issue de  $A_0$  ne converge pas exactement vers  $A_1$  : on observe un étalement de la lumière au voisinage de ce point. La figure 8b montre l'intensité lumineuse en fonction de la distance à l'axe optique (l'ordonnée indique « Amplification » qu'on assimile à l'intensité lumineuse dans l'étude menée ici). On admet que la lumière issue de  $B_0$  s'étale avec le même profil d'intensité lumineuse autour du point  $B_1$ .

**Q19.** Proposer, à l'aide de la courbe figure 8b, une valeur numérique pour  $\rho_{\min}$ , valeur minimale de la distance  $A_1B_1$  telle que les taches centrales des intensités lumineuses autour de  $A_1$  et  $B_1$  ne se superposent pas.

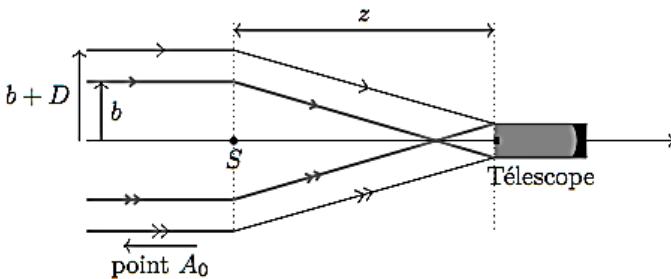
**Q20.** Déterminer la valeur numérique de  $A_0B_0$  correspondant à  $A_1B_1 = \rho_{\min}$ . Commenter.

Les images formées par cette lentille gravitationnelle solaire sont trop grandes pour être acquises d'un coup. Une sonde mesurerait donc point par point l'image.

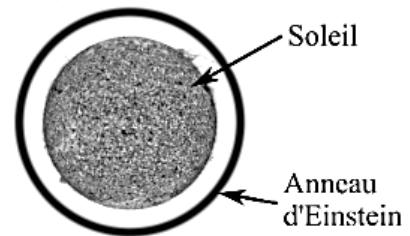
On considère une sonde qui collecte de la lumière issue du point  $A_0$  avec un télescope. Sur la figure 9a, le schéma représente la situation. La figure 9b est une illustration de l'image constituée par le télescope : la lumière qui a été déviée par la lentille gravitationnelle forme autour du Soleil un cercle qu'on appelle anneau d'Einstein.

On note  $D$  le diamètre du télescope et  $z$  la distance entre le centre du Soleil et l'entrée du télescope. En première approximation, le télescope capte tous les rayons qui ont un paramètre d'impact compris entre  $b$  et  $b + D$ .

**Q21.** Discuter la modification de l'anneau d'Einstein lorsque la sonde s'éloigne du Soleil.



(a)



(b)

Figure 9

Un autre intérêt principal de la lentille gravitationnelle est qu'elle amplifie la lumière reçue. On peut le mettre en évidence à l'aide d'un calcul simple. On définit le facteur d'amplification de cette lentille par :

$$\mu = \frac{\text{puissance lumineuse issue de } A_0 \text{ collectée par le télescope avec la lentille gravitationnelle}}{\text{puissance lumineuse issue de } A_0 \text{ collectée par le télescope sans la lentille gravitationnelle}}.$$

**Q22.** Justifier que  $\mu = \frac{8b}{D}$ . Calculer numériquement  $\mu$  pour un télescope situé en  $F_0$  (donc pour  $b = R_s$ ) et  $D = 1,0$  m. Commenter.

## Données numériques

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Année-lumière (al)	$1,00 \text{ al} = 9,46 \times 10^{15} \text{ m}$
Unité astronomique (au)	$1,00 \text{ au} = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$
Masse du Soleil	$M_s = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Rayon du Soleil	$R_s = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$
Constante de gravitation universelle	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$

Remarque : l'unité astronomique (symbole au) est une unité couramment utilisée en astronomie qui correspond approximativement à la distance entre la Terre et le Soleil.

## Partie B : Caractérisation d'une lame de verre



Figure 5 - Lamelles d'épaisseur  $e$ .

Une lame transparente est caractérisée par son épaisseur  $e$  et l'indice  $n$  du milieu qui la compose. On cherche à caractériser ce dioptre dans le cadre de l'optique géométrique.

- II.1** Donner un ordre de grandeur de l'indice du verre.
- II.2** Rappeler les relations de Snell-Descartes à la réfraction.
- II.3** Effectuer un rapide tracé de rayon sur la figure A1 (document réponse) afin de trouver graphiquement la position de  $A'$  image de  $A$  par la lame.
- II.4** Effectuer, de même, un rapide tracé de rayon sur la figure A2 (document réponse) avec un point objet  $A$  virtuel.
- II.5** Montrer, par des considérations géométriques, que la relation de conjugaison qui relie  $A$  et  $A'$  est donnée dans les conditions de Gauss par :

$$\overline{AA'} = e \left( 1 - \frac{1}{n} \right).$$

## Partie C : Viseur

On étudie un viseur à frontale fixe (figure 6) constitué par :

- un objectif  $\mathcal{L}_2$  de centre  $O_2$ , de distance focale  $f'_2 = 50 \text{ mm}$  ;
- un réticule gradué  $R_{oc}$  ;
- un oculaire modélisé par une lentille convergente  $\mathcal{L}_1$  de centre  $O_1$  et de distance focale  $f'_1 = 50 \text{ mm}$ .

On règle la lunette afin d'avoir, pour l'objectif, un grandissement transversal  $\gamma_{ob} = \left( \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \right)_{ob} = -2$ .

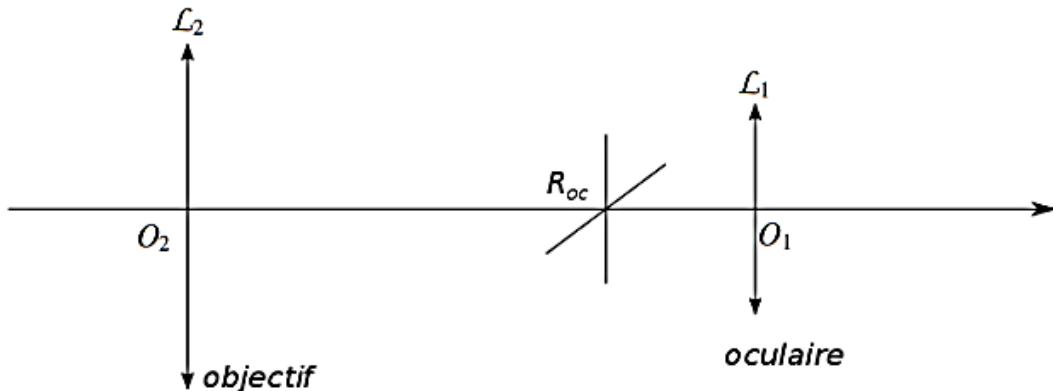


Figure 6 - Schéma d'un viseur à frontale fixe.

- II.6** Comment règle-t-on l'oculaire par rapport au réticule ?
- II.7** Préciser la position  $\overline{F_2 A}$  de l'objet visé par rapport à l'objectif en fonction de  $\gamma_{ob}$  et  $f'_2$ . On utilisera l'une des relations de grandissement (2). Faire l'application numérique.
- II.8** Déterminer l'encombrement  $\overline{O_2 O_1}$  de la lunette en fonction de  $f'_1$ ,  $\gamma_{ob}$  et  $f'_2$ . Effectuer l'application numérique.
- II.9** Valider vos résultats par un tracé de rayons justifiés sur la figure B (document réponse). Compléter la figure avec la présence du réticule  $R_{oc}$  et de la lentille  $\mathcal{L}_1$ .
- II.10** Citer une application de ce type de viseur.

**NOM :**

**Ex 5 :**

Questions II.3 et II.4.

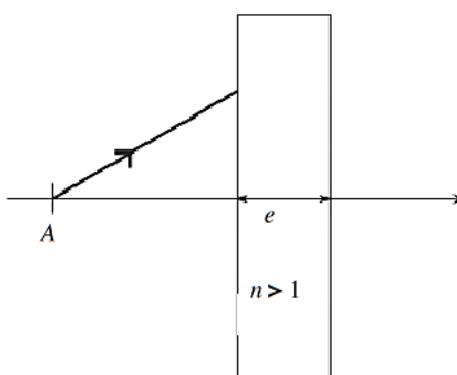


Figure A1

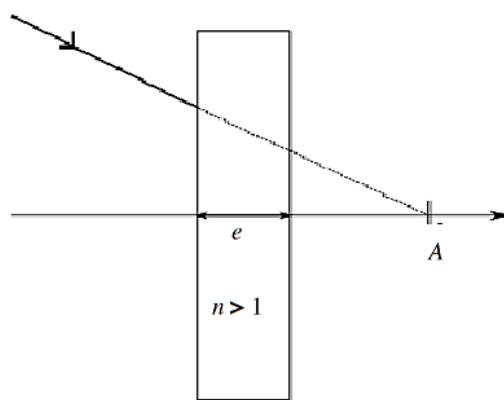


Figure A2

Question II.9

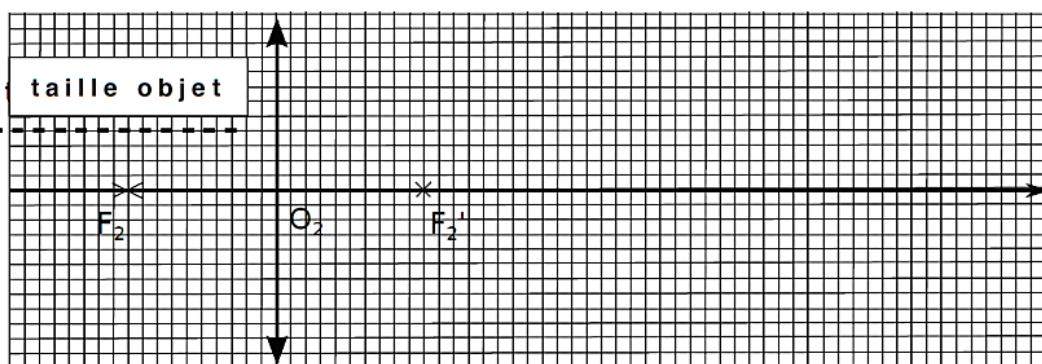


Figure B

**-- FIN DE L'ENONCE --**