

ChEM6. Ondes EM dans un plasma - Dispersion.

A.1.c). Mvt des particules chargées du plasma.

i) syst $\{e^- (m_e, -e)\}$ étudié dans le réf terrestre galiléen.

Bdf: $\vec{p} = m_e \vec{v}$ $\|\vec{p}\| \approx 10^{-23} \text{ N}$

forces de fact $\approx$ négligées car plasma dilué.

$$\vec{F}_L = \vec{F}_e + \vec{F}_m = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

on considère que la relat: $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$
obtenue dans le vide
pour une OPP

reste vraie en ODG dans le plasma
cf § A.3.

on a $\frac{\|\vec{p}\|}{\|\vec{F}_e\|} \ll 1 \Leftrightarrow \|\vec{E}\| \gg \frac{\|\vec{p}\|}{e} = 6 \cdot 10^{-11} \text{ V.m}^{-1}$ OK

$\frac{\|\vec{F}_m\|}{\|\vec{F}_e\|} \ll 1 \Leftrightarrow e\|\vec{v}\| \cdot \frac{\|\vec{E}\|}{c} \ll e\|\vec{E}\| \Leftrightarrow \|\vec{v}\| \ll c$ e^- non relativiste OK.

ii) PFD: $m_e \vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} = -e\vec{E} \Leftrightarrow m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \rightarrow$ EDL linéaire

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

$\hookrightarrow$ notat: $\underline{v}$

avec $\underline{v} = \underline{v}_0 e^{i(\omega t - kx)}$

avec $v \ll c \Rightarrow \omega \Delta x \ll c$ et on considère que la relat: $\omega = kc$ obtenue ds le vide
amplitude du mvt des e^- pour une OPPM

reste vraie en ODG dans le plasma

$$\Rightarrow kc \Delta x \ll c \Leftrightarrow k \Delta x \ll 1 \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \Delta x \ll \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

ampl. du mvt $\ll$ longueur d'onde

$$\Rightarrow \frac{d\underline{v}}{dt} \approx \underline{v}_0 \frac{d}{dt} e^{i\omega t} \quad \text{car } \frac{d}{dx} e^{ikx} = ik e^{ikx}$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{d\underline{v}}{dt}} \approx \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \underline{m_e \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}} = -e\vec{E}$$

A.1.d). $\vec{j} = \underline{\gamma}$

i) $\vec{j} = -en^* \underline{v}$

ii) $m_e \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -e\vec{E} \Leftrightarrow m_e i\omega \underline{v} = -e\vec{E} \Leftrightarrow \underline{v} = \frac{-e}{i\omega m_e} \vec{E}$

$$\Rightarrow \underline{j} = -en^* \cdot \frac{-e}{i\omega m_e} \cdot \vec{E} = \frac{-in^* e^2}{\omega m_e} \vec{E} \Rightarrow \underline{\gamma} = \frac{-in^* e^2}{\omega m_e}$$

A.2. Eq^e de propagation.

M-G $\text{div } \vec{E} = 0 \rightarrow \text{plasma localement neutre}$

M-f $\text{div } \vec{B} = 0$

M-F $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

plasma $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$

M-A $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \stackrel{\uparrow}{=} \mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

on calcule $\Delta \vec{E} = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \text{rot}(\text{rot } \vec{E})$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{\downarrow \text{MG}}{=} \text{grad}(0) - \text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \stackrel{\downarrow \text{MF}}{=} \\
 & = \vec{0} + \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) \stackrel{\downarrow \text{Schwarz}}{=} \\
 & = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \stackrel{\downarrow \text{MA}}{=} \text{avec } c^2 \mu_0 \epsilon_0 = 1 \\
 \Rightarrow \Delta \vec{E} & = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

A.3.a) Dérive de la relation de dispersion.

on injecte $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{x})}$ dans l'éq^e de propagation:

• $\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}$

• $\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \gamma i\omega \vec{E} + \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 \vec{E}$

$\Rightarrow -k^2 \vec{E} = \left(\mu_0 \gamma i\omega - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{E}$

$\Rightarrow k^2 = \frac{1}{c^2} \left(\omega^2 - i\omega c^2 \mu_0 \gamma \right) \quad \downarrow \vec{E} \neq \vec{0}$

$\Rightarrow k^2 = \frac{1}{c^2} \left(\omega^2 - \frac{i\omega}{\epsilon_0} \cdot \frac{-in^* e^2}{\omega m_e} \right) \quad \downarrow \text{expr de } \gamma \text{ (§A1d)}$

$\Rightarrow k^2 = \frac{1}{c^2} \left(\omega^2 - \frac{n^* e^2}{\epsilon_0 m_e} \right)$

ω_p^2

A.3.b) Interprétation - pulsation de coupure

Aspect énergétique: M-f: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

• onde évanescente: $\text{rot } \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t + \varphi_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{E_0}{\delta} e^{-x/\delta} \cos(\omega t + \varphi_0) \end{pmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\Rightarrow \vec{B} = \frac{E_0}{\delta \omega} e^{-x/\delta} \sin(\omega t + \varphi_0) \vec{u}_3 + \vec{B}_0 = \vec{0} \text{ (champ statique)}$

$\hookrightarrow$ en quadrature de phase / à $\vec{E}$

• onde progressive $\text{rot } \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +kE_0 \sin(\omega t - kx + \varphi_0) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = kE_0 \sin(\omega t - kx + \varphi_0) \vec{u}_3$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{kE_0}{\omega} \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \vec{u}_3$$

↳ en phase / à $\vec{E}$.

A.3.c). Cas de l'ionosphère - OOG de ω_p .

i). $\omega_p = \sqrt{\frac{n^+ e^2}{m_e \epsilon_0}}$

avec $\begin{cases} n^+ = 10^6 \text{ cm}^{-3} = 10^{12} \text{ m}^{-3} \\ e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ m_e \simeq 10^{-30} \text{ kg} \\ \epsilon_0 \simeq 10^{-11} \text{ F.m}^{-1} \end{cases}$

$$\Rightarrow \omega_p = \sqrt{\frac{10^{12} \cdot (1,6)^2 \cdot 10^{-38}}{10^{-30} \cdot 10^{-11}}}$$

$$\Rightarrow \omega_p \simeq 1,6 \cdot \sqrt{10^{15}} \simeq 1,6 \sqrt{10} \cdot 10^7$$

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \simeq \frac{1,6 \cdot \sqrt{10} \cdot 10^7}{2 \cdot \pi} = 8 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow \underline{f_p \simeq 10 \text{ MHz}}$$

ii) exp. de Marsini: $f = 300 \text{ kHz} < f_p$

→ onde non transmise dans l'ionosphère

réfléchi par l'ionosphère → "rebound" fig. p5.

→ onde peut atteindre un point éloigné du point d'émission

f. communicateur satellite - sol: $f = 100 \text{ MHz} > f_p$

GPS

→ onde se propage dans l'ionosphère

→ peut aller du satellite au sol (et inversement).

A.4. Vitesse de phase - Phé. de dispers.

pour $\omega > \omega_p$ $k' = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$

$$\Rightarrow v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c \omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$$

$$\Rightarrow \underline{v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}}$$