MP-MPI Devoir maison n°6 – Physique

Copies finalisées à présenter le 23/02/26

Copies auto-corrigées ramassées le 25/02/26

CCINP - Ex 1 : Principe de la spectrométrie d'absorption

Le rayonnement synchrotron est utilisé pour sonder la matière, en particulier grâce à la technique de spectroscopie d'absorption qui permet de caractériser un milieu gazeux (nature, composition, température, densité) en mesurant les longueurs d'onde absorbées par le milieu.

Cette technique d'analyse utilise un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air, éclairé par une source collimatée permettant un éclairage en incidence normale par rapport à la lame d'air. L'intensité du rayonnement émergeant de l'interféromètre est mesurée par une photodiode placée au foyer image F′ d'une lentille convergente dont l'axe optique est parallèle aux rayons émergents de l'interféromètre.

Le signal s fourni par la photodiode est proportionnel à l'intensité I en F′, soit $s = KI$ avec K une constante.

Q27. Faire un schéma du dispositif, faisant apparaître les principaux éléments constitutifs de l'interféromètre, la source collimatée, le dispositif en sortie, ainsi que les rayons lumineux traversant l'interféromètre.

L'interféromètre est éclairé par une source monochromatique de longueur d'onde λ_m.

Q28. Rappeler l'expression de l'intensité en F′ en fonction de l'épaisseur d de la lame d'air équivalente, de la longueur d'onde λ_m et de l'intensité maximale I_{max} en F′. L'indice de réfraction de l'air est confondu avec celui du vide. Préciser quelle propriété de l'interféromètre permet d'obtenir un contraste maximal.

Q29. L'épaisseur d augmente avec le temps à vitesse constante $v_0 = 7{,}0 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ à partir du contact optique, soit $d = v_0 t$. Le signal $s(t)$, appelé interférogramme, est donné **figure 5**. En déduire la longueur d'onde λ_m et estimer son incertitude-type.

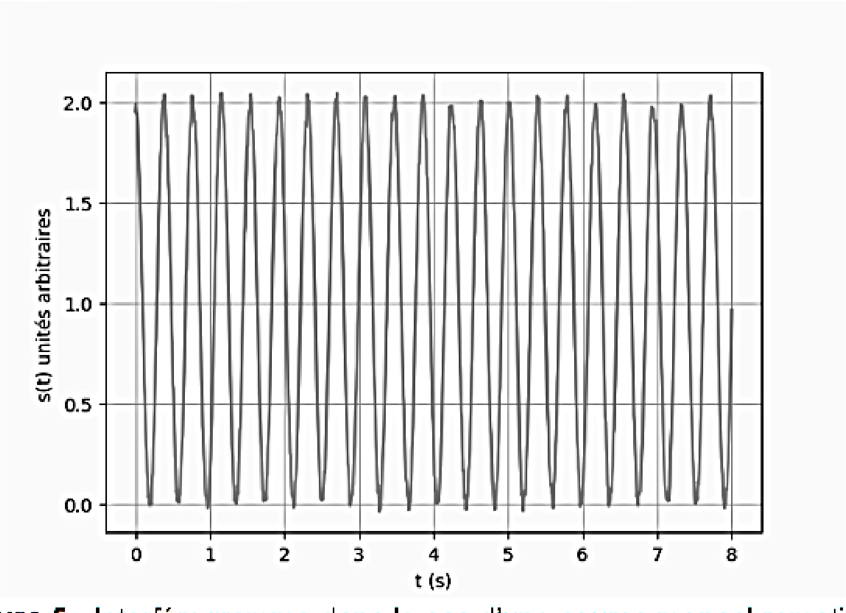

Figure 5 - Interférogramme dans le cas d'une source monochromatique

On sélectionne en fait une bande spectrale dans le rayonnement synchrotron. La source est, de ce fait, quasi-monochromatique. On modélise son spectre par un profil gaussien de longueur d'onde moyenne λ_m et de largeur spectrale à mi-hauteur $\Delta\lambda$ (**figure 6a**). L'interférogramme obtenu sur une durée d'une minute a l'allure donnée **figure 6b**.

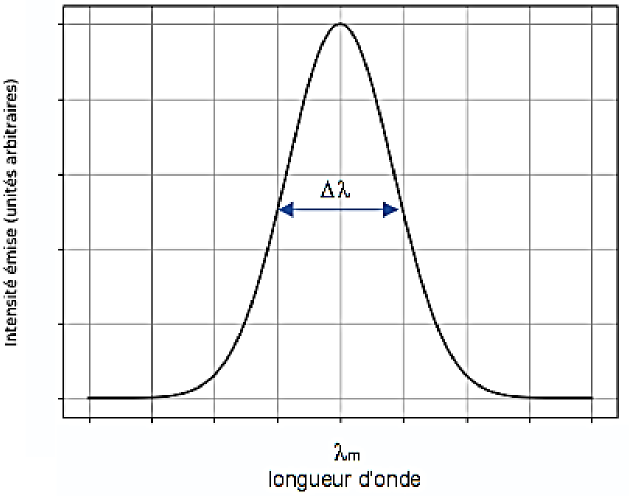

Figure 6a - Profil spectral de la source

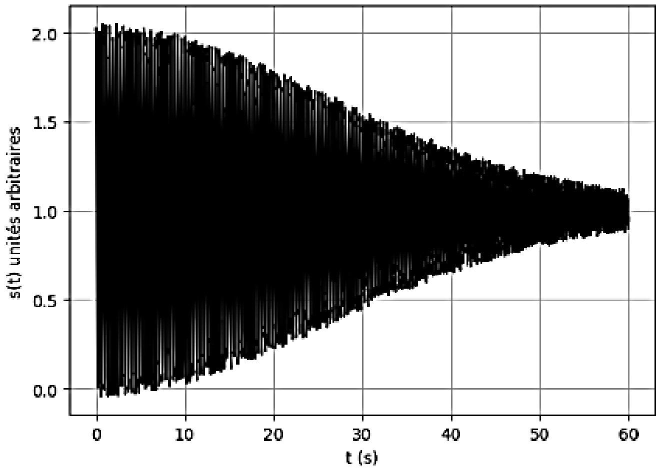

Figure 6b - Interférogramme

Q30. Déduire de l'interférogramme de la **figure 6b** une estimation de la longueur de cohérence de la source, puis de la largeur spectrale $\Delta\lambda$ de la source. On rappelle la relation entre le temps de cohérence τ_c et la largeur en fréquence $\Delta\nu$ de la source :

$$\Delta\nu \cdot \tau_c \approx 1.$$

Dans le cas général, une opération mathématique informatisée permet de déterminer le spectre à partir de l'interférogramme.

Données	
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3{,}0\cdot10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$
Masse de l'électron	$m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}\ \mathrm{kg} = 5{,}1\cdot10^{2}\ \mathrm{keV/c^2}$
Charge élémentaire	$e = 1{,}6\cdot10^{-19}\ \mathrm{C}$
Valeur de l'électron-volt	$1\ \mathrm{eV} = 1{,}6\cdot10^{-19}\ \mathrm{J}$
Constante de Planck	$h = 6{,}6\cdot10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6{,}0\cdot10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Constante molaire des gaz parfaits	$R = 8{,}3\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$

Bien que ces données soient fournies avec deux chiffres significatifs, les résultats numériques calculés seront fournis, sauf indication contraire, avec UN SEUL chiffre significatif.

CCMP - Ex 1 : Mesures interférométriques de longueurs d'onde

En 1907, MICHELSON est le premier américain à recevoir le prix Nobel de physique pour *ses instruments optiques de précision et les mesures spectroscopiques et métrologiques réalisées au moyen de ceux-ci.* En particulier, il publiera en 1892 des mesures relatives aux spectres d'émission de plusieurs sources, obtenues par spectroscopie interférentielle, et notamment pour les raies H_α (rouge) et H_β (bleue) d'émission par les atomes d'hydrogène.

III.A L'interféromètre de Michelson

Le schéma du montage utilisé par MICHELSON est proposé figure 2. Le dispositif monochromateur, formé d'un prisme de verre dispersif et d'une fente étroite, éclaire l'appareil en sélectionnant une raie quasi-monochromatique de longueur d'onde λ_0, appartenant au domaine visible. L'observation est réalisée au moyen d'un oculaire afocal, réglé à l'infini : il donne d'un objet situé à grande distance une image également à grande distance, mais agrandie.

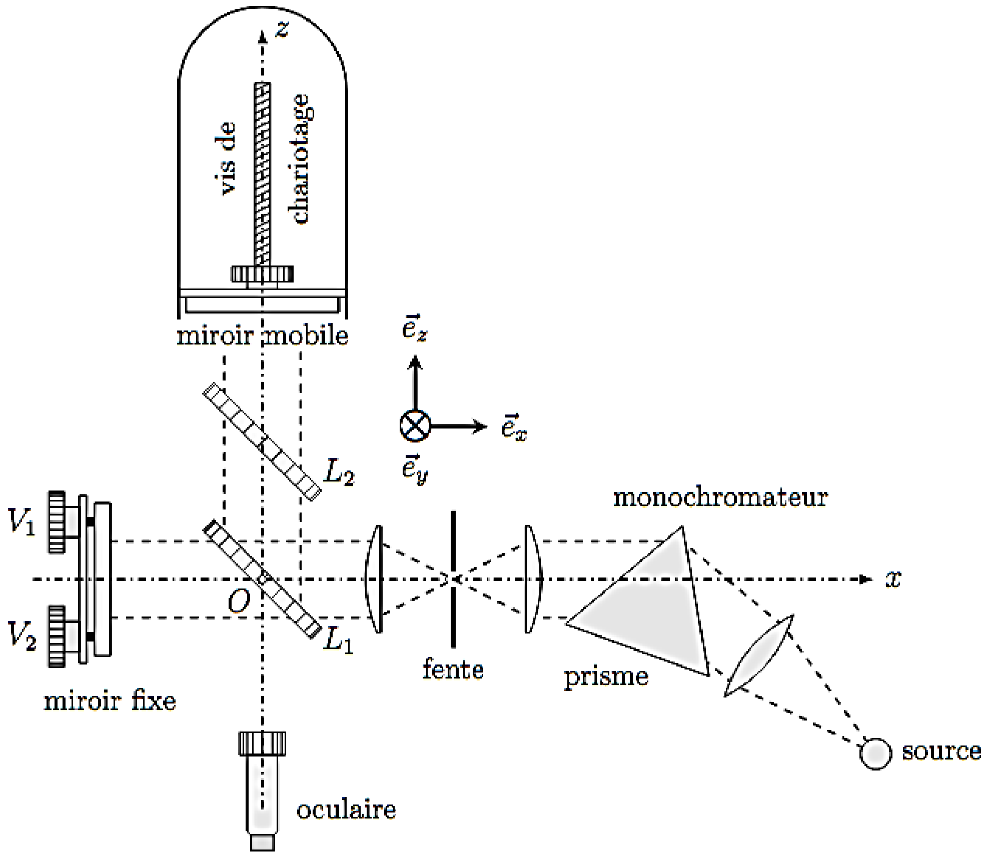

FIGURE 2 – Dispositif de mesure en spectroscopie interférentielle

| – 9. L'interféromètre comporte deux lames de verre L_1 et L_2, parallèles, de même épaisseur e et de même indice optique n, inclinées d'un angle $\pi/4$ relativement à l'axe $(O, \vec{e}_x)$ normal au miroir fixe. La lame L_1 est munie d'une couche semi-réfléchissante sur *une seule* de ses faces ; laquelle ? Justifier, en vous appuyant sur un schéma.

– **10.** Après réglage des vis V_1 et V_2 les miroirs fixe et mobile sont rendus rigoureusement perpendiculaires ; l'axe optique $(O, \vec{e}_z)$ de l'oculaire est alors confondu avec la normale au miroir mobile et l'opérateur observe, au moyen de cet oculaire réglé à l'infini, des franges d'interférence. Quelle est la forme de ces franges ?

Peut-on encore les observer si l'oculaire est déréglé ?

– **11.** Tout en observant les franges, l'observateur peut actionner la vis micrométrique et déplacer le miroir mobile dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, le long de l'axe $(O, \vec{e}_z)$. Relier le nombre ΔN de franges sombres qui défilent au centre du champ et le décalage Δz du miroir mobile.

– **12.** Exprimer, au moyen d'un schéma approprié, la différence de marche observée à l'infini dans une direction donnée, en fonction de l'écart séparant les deux miroirs.

Le déplacement maximal de la vis micrométrique à partir du contact optique est noté Δz_{max}. Déterminer, après ce déplacement, l'angle $\Delta\theta$ qui sépare le centre de la figure de la première frange de même nature.

– **13.** Dans le cas d'une des raies de l'hydrogène atomique, on observe le défilement de $N = 3\,156$ franges pour un décalage $\Delta z = 1\,035 \pm 2\,\mu\text{m}$. S'agit-il de la raie H_α ou H_β ?

Avec quelle précision relative mesure-t-on sa longueur d'onde λ_0 ?

Que vaut alors $\Delta\theta$? Commenter.

III.B Cohérence spectrale d'une source

Une source de lumière éclaire avec la même intensité I_0 les deux voies d'un interféromètre ; l'observation est réalisée en un point où la différence de marche est δ.

– **14.** Dans le cas où la source est rigoureusement monochromatique, de longueur d'onde λ_0, exprimer l'intensité $I(\delta)$ en fonction de I_0, λ_0 et δ. Définir et calculer le facteur de contraste C des franges.

Certaines sources lumineuses sont en fait *bichromatiques* : elles émettent deux radiations de longueurs d'onde très proches λ_1 et λ_2 et on pose alors $\lambda_0 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ et $\Delta\lambda = |\lambda_2 - \lambda_1|$ en admettant toujours $\Delta\lambda \ll \lambda_0$.

– **15.** Pour certaines sources bichromatiques les deux radiations émises sont de même intensité ; c'est le cas des lampes à vapeur de sodium, étudiées notamment par MICHELSON dans les conditions décrites en **III.A**. Expliciter l'intensité I observée en fonction de I_0, de la différence de marche δ, de λ_0 et de $\Delta\lambda$.

Exprimer le facteur de contraste C des franges et montrer comment il permet la mesure de $\lambda_0/\Delta\lambda$.

– **16.** D'autres sources, comme celles émettant la raie H_α de l'hydrogène, peuvent être écrites comme bichromatiques mais les intensités I_1 et $I_2 < I_1$ émises aux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 sont différentes. Pour quelle(s) valeur(s) de δ le facteur de contraste des franges est-il minimal ? Quelle est cette valeur minimale ?

Dans le cas de la raie double H_α, l'écart $\Delta\lambda$ est de l'ordre de $1{,}4\times10^{-11}$ m. Est-il possible de le mettre en évidence avec le montage proposé ci-dessus ?

TOUS **Ex 2 : Arc en ciel**

Partie VI - Théorie géométrique de l'arc-en-ciel

Lorsque le soleil éclaire les gouttes d'eau, on peut observer dans certaines conditions un arc-en-ciel.

On considère une goutte d'eau sphérique, de diamètre D et d'indice de réfraction n. Les trajets des rayons lumineux sont représentés sur la **figure 7**.
Soit un rayon lumineux incident, arrivant avec un angle d'incidence i (qui n'est pas nécessairement petit) sur la goutte. On note r l'angle de réfraction associé à l'angle d'incidence i.

L'indice de l'air vaut $n_{\text{air}} = 1$.

On considère un rayon sortant de la goutte d'eau après une seule réflexion à l'intérieur de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte (**figure 7**) : ce rayon est à l'origine de l'arc-en-ciel principal.

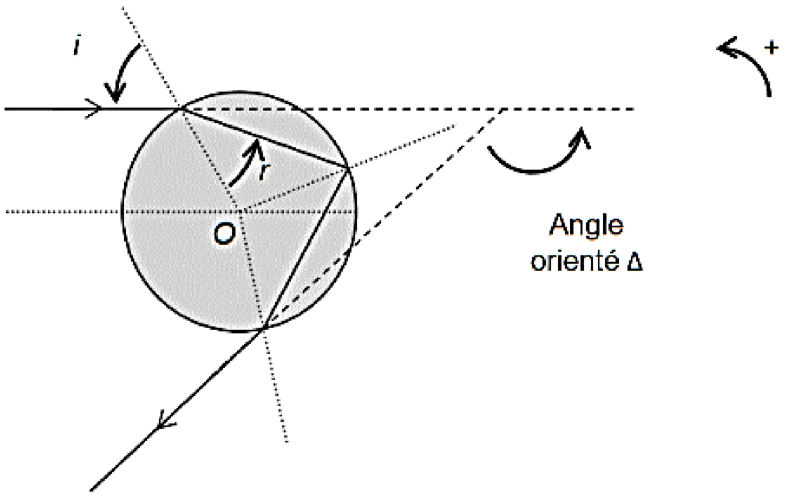

Figure 7 - Cas d'une réflexion et de deux réfractions

Q23. Rappeler les lois de Descartes de la réfraction et donner la relation entre l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r.

Q24. La déviation est l'angle dont il faut tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon émergent ; afin d'avoir une valeur positive, on considère ici son opposé, l'angle orienté Δ (**figure 7**).
Montrer que : $\Delta = \pi - 4r + 2i$.
Exprimer l'angle Δ en fonction de n et de $x = \sin(i)$.

Q25. Montrer que $\Delta(x)$ passe par un extremum lorsque x a pour valeur :

$$x_m = \sin(i_m) = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}.$$

Donnée : $\dfrac{d}{du}\text{Arcsin}(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.

Q26. Justifier à l'aide de la **figure 8** qu'on observe une accumulation de lumière dans la direction $\Delta_m = \Delta(x_m)$.

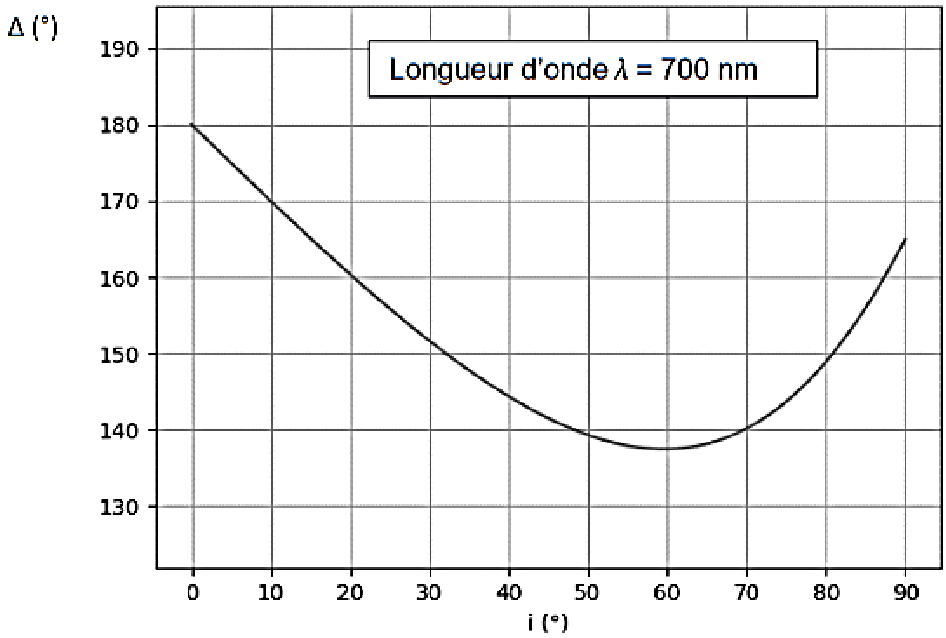

Figure 8 - Déviation en fonction de l'angle d'incidence

Q27. Calculer x_m et Δ_m (en degrés) dans le cas de l'eau, pour le violet ($\lambda = 400\,\text{nm}$, $n = 1{,}343$) et le rouge ($\lambda = 700$ nm, $n = 1{,}330$).

Q28. Sur un schéma faisant apparaître les rayons incidents, parallèles, le rideau de pluie et l'œil de l'observateur, tracer les rayons émergents rouge et bleu dans la direction Δ_m. L'observateur observe-t-il le rouge à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc ?

Partie VII - Théorie ondulatoire de l'arc-en-ciel

Q29. Cette question a pour but de rappeler certaines conditions d'observation des interférences lumineuses.

Deux sources lumineuses ponctuelles S_1 et S_2 émettent deux ondes électromagnétiques monochromatiques de pulsations respectives ω_1 et ω_2.

Ces deux ondes se propagent dans un milieu d'indice n et interfèrent en un point P après avoir parcouru les distances $x_1 = S_1P$ et $x_2 = S_2P$. On modélise les amplitudes des ondes en P par les grandeurs scalaires :

$$s_1(P,t) = a_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x_1 + \varphi_1)$$
$$s_2(P,t) = a_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x_2 + \varphi_2)$$

avec $k_i = n\dfrac{\omega_i}{c} (i = 1,2)$, a_1, a_2, φ_1, φ_2 constantes.
c est la célérité de la lumière dans le vide.

a) Donner un ordre de grandeur de ω_1 et ω_2 pour la lumière visible.

b) L'intensité lumineuse $I(P)$ observée à l'œil nu en P est proportionnelle à la valeur moyenne du carré de l'amplitude reçue en P, soit : $I(P) = K\left\langle s^2(P,t)\right\rangle_\tau$. Sur quelle durée τ cette valeur moyenne est-elle calculée ?

c) Calculer l'intensité $I(P)$ et montrer qu'elle s'écrit : $I(P) = I_1 + I_2 + I_{12}(P)$.

À quelle(s) condition(s) le terme $I_{12}(P)$ est-il non nul ?

Donnée : $\cos(a)\cos(b) = 1/2\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$.

d) On suppose dans la suite que $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ et $\varphi_1 = \varphi_2$.

Montrer que l'intensité en P s'écrit $I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\delta(P)\right)$

où λ est la longueur d'onde dans le vide. La grandeur $\delta(P)$ sera exprimée en fonction de l'indice n du milieu, de x_1 et de x_2.

Il est possible (**photo 5**) dans un arc-en-ciel d'observer, outre les arcs décrits par l'optique géométrique, un phénomène d'interférences responsable d'arcs dits " surnuméraires ".

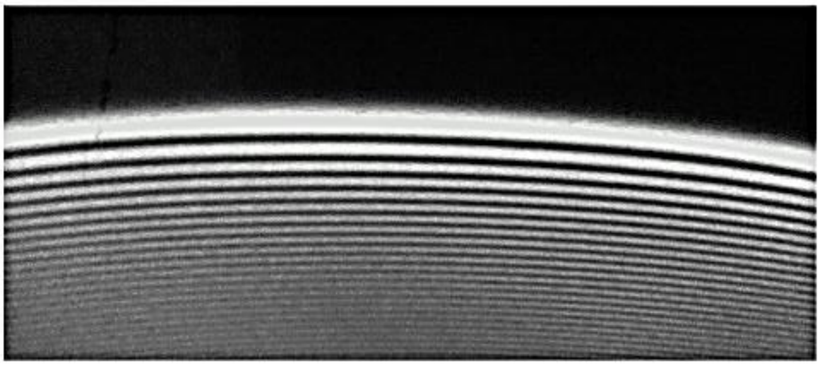

Photo 5 - Franges d'interférences obtenues en lumière monochromatique avec une goutte d'eau

Q30. Représenter la courbe $I(P)$ en fonction de $\delta(P)$. En observant la **photo 5**, que peut-on dire de I_1 et I_2 ?

On considère (**figure 9**) deux rayons d'incidences i_1 et i_2, voisins du rayon d'incidence i_m (en pointillés) sur une goutte d'eau, se réfléchissant une seule fois à l'intérieur de la goutte d'eau et émergeant dans des directions parallèles.

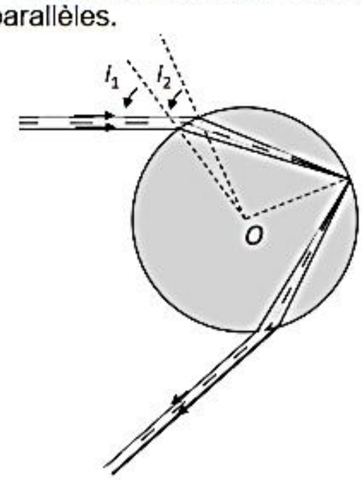

Figure 9 - Rayons responsables des interférences

Q31. Où ces rayons interfèrent-ils ?

Q32. On admet que la différence de marche en un point P du champ d'interférences s'écrit :

$$\delta(P) = D\left(\cos(i_2) - \cos(i_1)\right) - 2Dn\left(\cos(r_2) - \cos(r_1)\right).$$

Exprimer la condition permettant d'observer des interférences constructives.

Q33. Les rayons incidents d'angles d'incidence $i_1 = 50{,}13°$ et $i_2 = 67{,}98°$ donnent pour une radiation rouge $(\lambda = 700 \text{ nm}, n = 1{,}330)$ des rayons émergents parallèles.
Quel diamètre de goutte permettra d'observer la frange claire d'ordre -2 dans la direction des rayons émergents ?