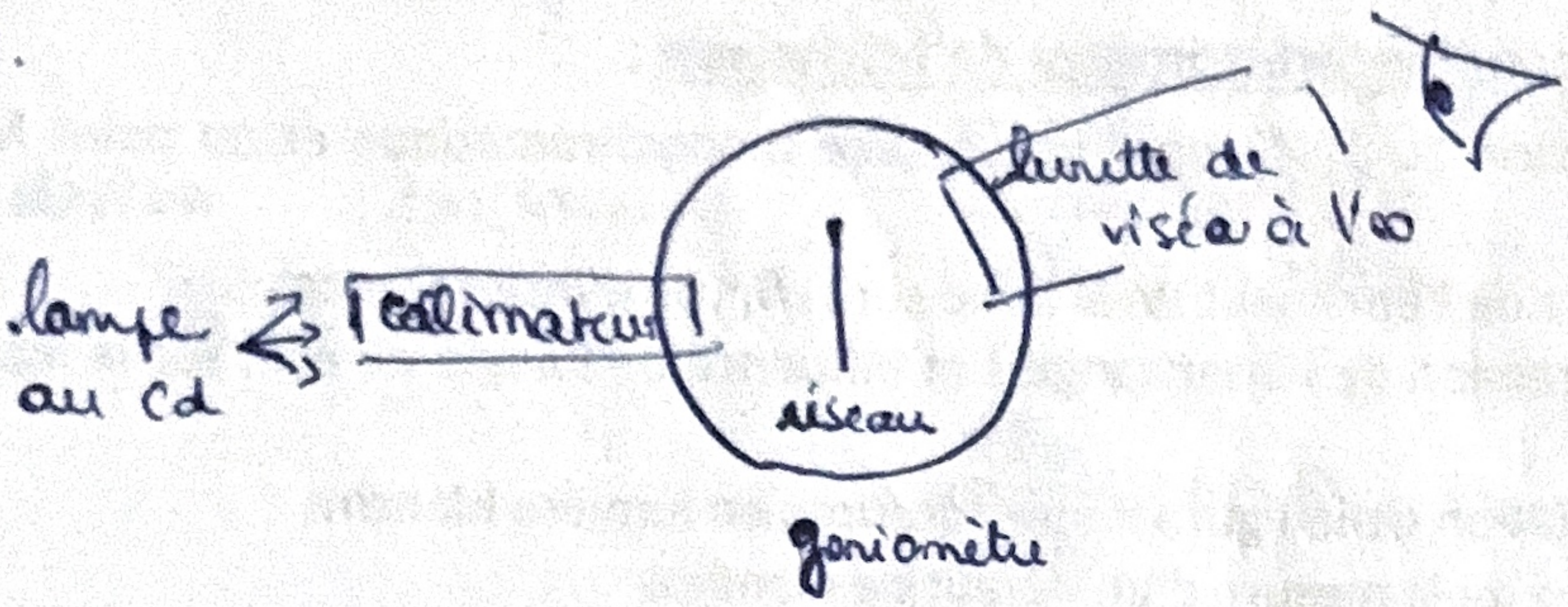
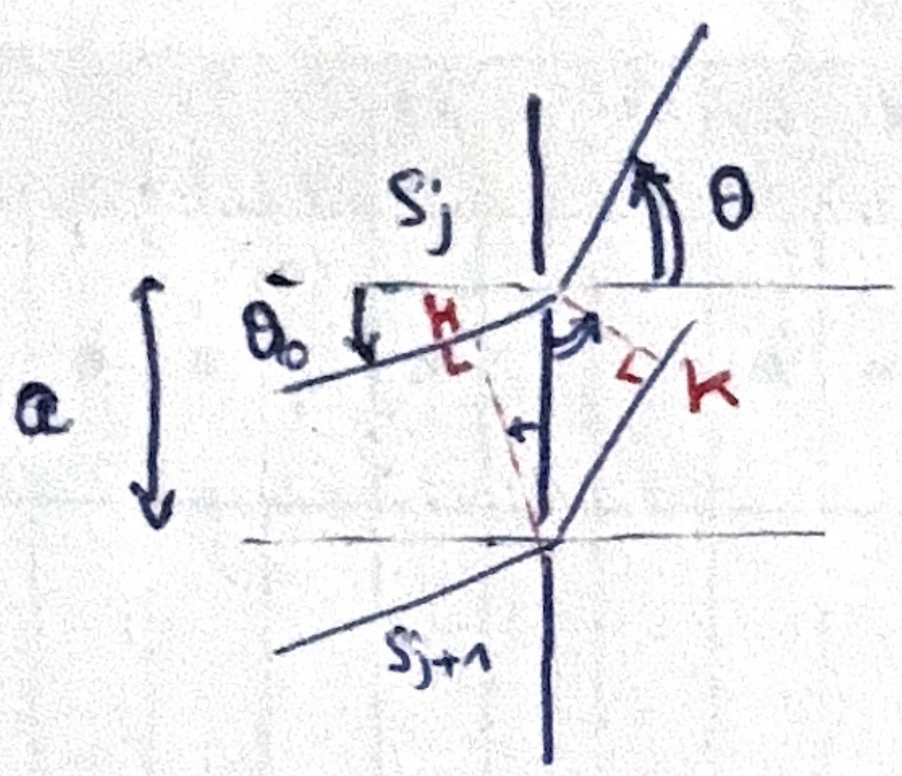
Spectrométrie à réseau par transmission – Min de déviat°

1).



- réseau éclairé par faisceau de rayons // entre eux
- interférences à l'∞.

2).



$$\delta_{j+1/j}(M) = a \sin\theta - a\sin\theta_0$$

indpt de j

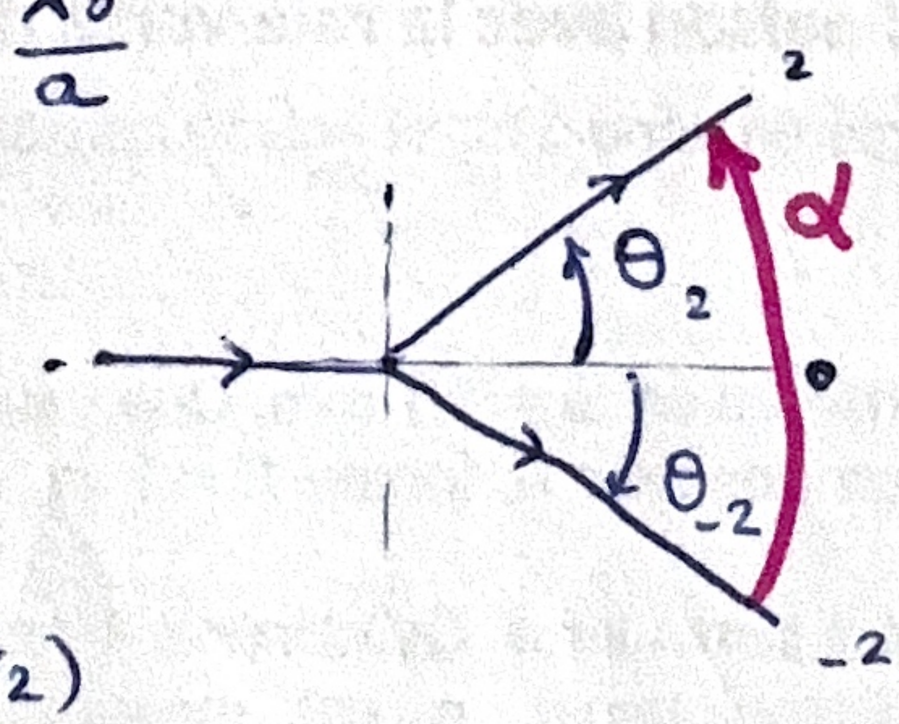
cdt° d'interf. constructives :
ondes j et $j+1$ en phase
$\Rightarrow$ N ondes en phase

$$\delta(M) = m\lambda_0 \ , \ m \in \mathbb{Z}$$

ainsi $a \sin\theta_m - a\sin\theta_0 = m\lambda_0$

$\sin\theta_m - \sin\theta_0 = m\dfrac{\lambda_0}{a}$ ← relat° fond. des rés^x.

3). $\theta_0 = 0 \Rightarrow \sin\theta_m = m\dfrac{\lambda_0}{a}$



$\alpha = \theta_2 - \theta_{-2}$

$\sin\theta_2 = 2 \cdot \dfrac{\lambda_0}{a}$

$\sin(\theta_{-2}) = -2\dfrac{\lambda_0}{a} = -\sin\theta_2 = \sin(-\theta_2)$

$\Leftrightarrow \theta_{-2} = -\theta_2$

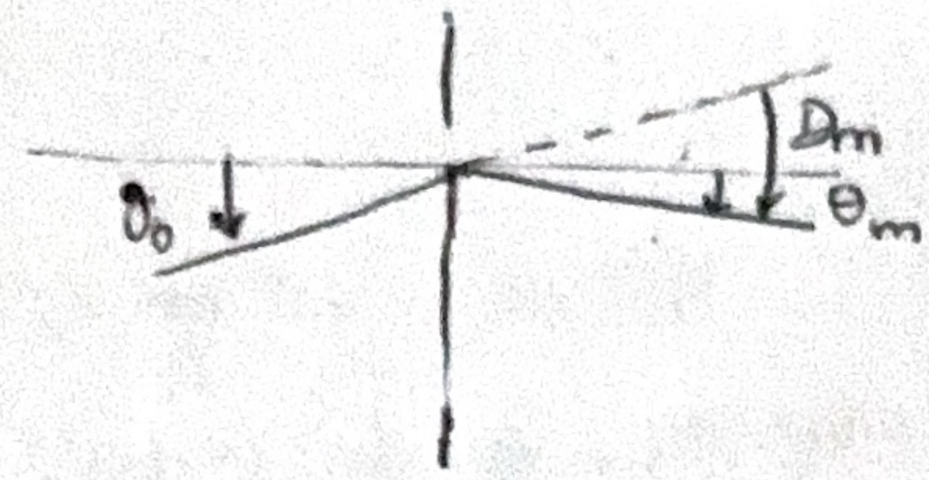
avec $\theta_2, \theta_{-2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

d'où $\alpha = 2\theta_2 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\dfrac{\lambda_0}{a} \Leftrightarrow \lambda_0 = \dfrac{1}{2m}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

$\Leftrightarrow \lambda_0 = 5{,}087 \cdot 10^{-7}\, m$
$= 508{,}7\ nm$

avec $\alpha = \left(61 + \frac{9}{60}\right)^\circ = 61{,}15°$

4). $D_m = \theta_m - \theta_0$



et $\sin\theta_m - \sin\theta_0 = m\dfrac{\lambda_0}{a}$

on dérive /à θ_0 ces expressions : $\underbrace{\dfrac{dD_m}{d\theta_0}}_{=0 \text{ car on cherche } \theta_0 \text{ tq } D_m \text{ soit extrémal.}} = \dfrac{d\theta_m}{d\theta_0} - 1$

$$\frac{d\theta_m}{d\theta_0}\cdot\cos\theta_m - \cos\theta_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d\theta_m}{d\theta_0} = 1 \\ \cos\theta_m = \cos\theta_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_m = \theta_0 \quad (1) \\ \text{ou} \\ \theta_m = -\theta_0 \quad (2) \end{cases}$$

pour $\theta_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
et $\theta_m \in$ ______

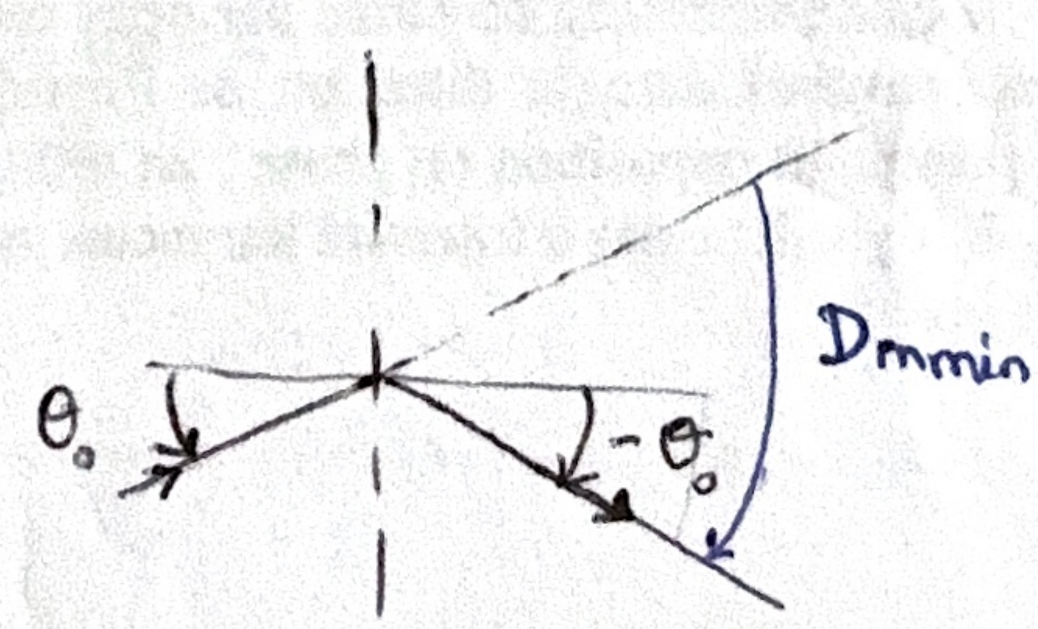
(1) : ordre $m = 0$. $\rightarrow$ (2) seule sol° à retenir pour $m \neq 0$.

ainsi $D_{m_{min}} = \theta_m - \theta_0 = -2\theta_0 = 2\theta_m$

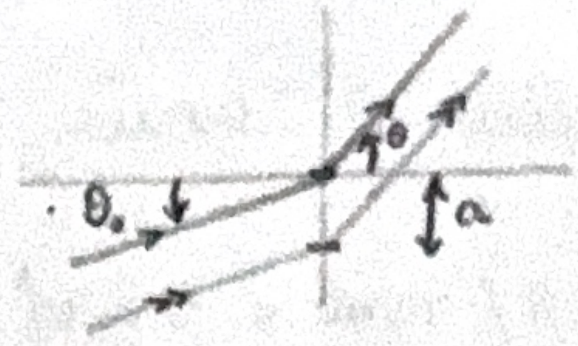
et $\sin\theta_m - \underbrace{\sin\theta_0}_{-\sin\theta_m} = \sin(-\theta_0) - \sin(\theta_0) = \underbrace{-2\sin\theta_0}_{2\sin\underbrace{\theta_m}_{\frac{D_m}{2}}} = m\dfrac{\lambda_0}{a}$

$\Leftrightarrow m\dfrac{\lambda_0}{a} = -2\sin\left(-\dfrac{D_{m\,min}}{2}\right) = 2\sin\left(\dfrac{D_{m\,min}}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{D_{m\,min}}{2}\right) = \dfrac{m\lambda_0}{2a} = \dfrac{m\,n\,\lambda_0}{2}$



2) Etalonnage d'un réseau.



1). formule des réseaux : $a(\sin\theta_m - \sin\theta_0) = m\lambda_0$, $m \in \mathbb{Z}$

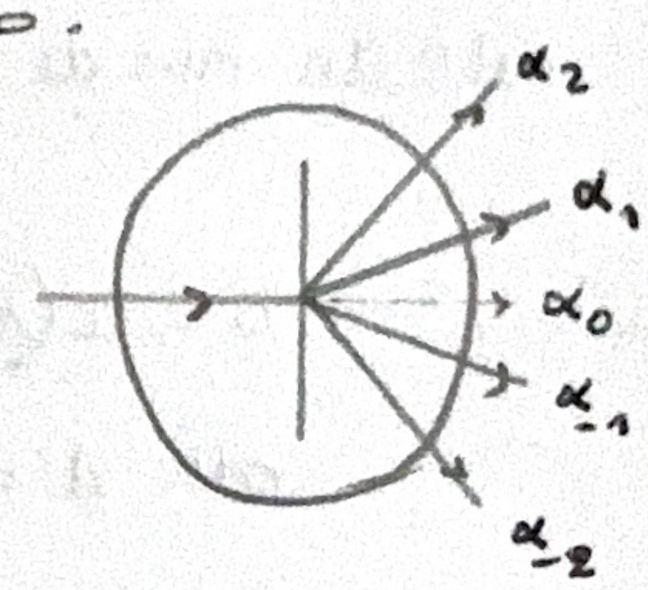
max d'intensité ds les dirᵒ θ_m : cdtᵒ d'interf. constructive pr 2 motifs consécutifs
généralisable aux N motifs
N ondes en phase.

---

2) si le réseau est éclairé en incidence nale $\theta_0 = 0$ $\sin\theta_0 = 0$.

$a\sin\theta_m = m\lambda_0$.

$\Rightarrow \theta_{-m} = -\theta_m$
(*)



$\theta_1 = \alpha_1 - \alpha_0$
$\theta_{-1} = \alpha_{-1} - \alpha_0$ $\underset{(*)}{\Rightarrow}$ $0 = \alpha_1 + \alpha_{-1} - 2\alpha_0 \Rightarrow \alpha_0 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_{-1}}{2}$ (1)

de m̂ pour les ordres ±2 : $\alpha_0 = \dfrac{\alpha_2 + \alpha_{-2}}{2}$ (2).

On compare α_0 obtenu avec (1) / (2) : $\alpha_0 = 59{,}98°$ avec (1)
$\alpha_0 = 60{,}03°$ avec (2).

$\Delta\alpha_0 = 0{,}05°$ → compatible

p	−2	−1	1	2
α_p	23,38°	42,63°	77,33°	96,67°

---

3). On a $\theta_1 = \alpha_1 - \alpha_0$
$\underbrace{\theta_{-1}}_{-\theta_1} = \alpha_{-1} - \alpha_0$ $\underset{(*)}{\Rightarrow}$ $2\theta_1 = \alpha_1 - \alpha_{-1}$ $\Leftrightarrow$ $\theta_1 = \dfrac{\alpha_1 - \alpha_{-1}}{2}$

de m̂ : $\theta_2 = \dfrac{\alpha_2 - \alpha_{-2}}{2}$

et $\sin\theta_m = \dfrac{m\lambda_0}{a}$ en incidence nale

$\Leftrightarrow$ $a = \dfrac{m\lambda_0}{\sin\theta_m}$ = $1{,}46 \cdot 10^{-6}$ m avec m = 1
$1{,}46 \cdot 10^{-6}$ m avec m = 2

$\Rightarrow a = 1{,}46\ \mu m$

$\Rightarrow n = \dfrac{1}{a} = 6{,}85 \cdot 10^5$ t/m = 685 t/mm

---

4). $a\sin\theta_2' = 2 \cdot \lambda'$

d'ap. Q2, on a $\theta_2' = \alpha_2' - \alpha_0$ avec $\alpha_0 \simeq 60{,}0°$ $\alpha_2' = 105{,}50°$

ainsi $\lambda' = \dfrac{1}{2} \cdot a\sin(\alpha_2' - \alpha_0) = 5{,}47 \cdot 10^{-7}$ m = 547 nm
→ radiatᵒ verte.

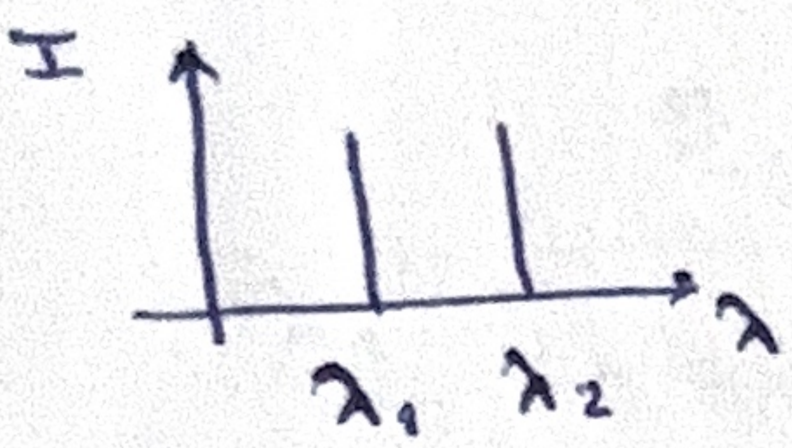
ou bien $a\sin\theta_2 = 2 \cdot \lambda_0$
$a\sin\theta_2' = 2 \cdot \lambda'$ $\Rightarrow$ $\lambda' = \dfrac{\sin\theta_2'}{\sin\theta_2} \cdot \lambda_0$

Réseau par transmission : résolution et recouvrement.

$n = 800 \text{ t/mm}$

$\theta_0 = 0.$

1. Résolution.



a). formule des réseaux : $\sin\theta_m - \underbrace{\sin\theta_0}_{=0} = m\dfrac{\lambda_0}{a}$

$|\sin\theta_m| \leq 1 \iff \left|\dfrac{m\lambda_0}{a}\right| \leq 1 \iff |m| \leq \dfrac{1}{n\lambda_0}$

pour λ_1 $\quad m_{1\,max} = E\Big(\underbrace{\dfrac{1}{n\lambda_1}}_{2,50}\Big) = 2$ $\quad$ et $m_{1\,min} = -2$

pour λ_2 $\quad m_{2\,max} = E\Big(\underbrace{\dfrac{1}{n\lambda_2}}_{2,48}\Big) = 2$ $\quad$ et $m_{2\,min} = -2.$

en incidence normale $\quad \theta_{-p} = -\theta_p$

	θ_0	θ_1	θ_2
λ_1	0°	23,6°	53,1°
λ_2	0°	23,8°	53,9°

$\theta_m = \arcsin(n\,m\,\lambda_0)$

b). $\Delta\theta_1 = 0{,}2°$ $\qquad \Delta\theta_2 = 0{,}8° > \Delta\theta_1$

dispersion ↗ avec m.

c). $\theta_0 = 30°$ $\qquad \sin\theta_m - \dfrac{1}{2} = m\dfrac{\lambda_0}{a}$ $\qquad \left|m\dfrac{\lambda_0}{a} + \dfrac{1}{2}\right| \leq 1$ $\qquad -1 \leq m\dfrac{\lambda_0}{a} + \dfrac{1}{2} \leq 1$

$-\dfrac{3}{2} \leq m\dfrac{\lambda_0}{a} \leq \dfrac{1}{2}$

$-\dfrac{3a}{2\lambda_0} \leq m \leq \dfrac{a}{2\lambda_0}$

$\iff -\dfrac{3}{2n\lambda_0} \leq m \leq \dfrac{1}{2n\lambda_0}$

pour λ_1 $\quad -3{,}75 \leq m \leq 1{,}25.$

m possibles : $-3, -2, -1, 0, 1$

pour λ_2

$-3{,}71 \leq m \leq 1{,}23$ ↗ idem.

	θ_{-3}	θ_{-2}	θ_{-1}	θ_0	θ_1
λ_1	$-44{,}4°$	$-17{,}5°$	$5{,}7°$	$30°$	$64{,}2°$
λ_2	$-45{,}4°$	$-17{,}9°$	$5{,}5°$	$30°$	$64{,}7°$
$\Delta\theta_p$	$1{,}0°$	$0{,}4°$	$0{,}2°$	$0°$	$0{,}5°$

avec $\theta_m = \arcsin\left(m\dfrac{\lambda_0}{a} + \dfrac{1}{2}\right).$

d). en incidence normale $\Delta\theta_1 = 0{,}2°$

avec $\theta_0 = 30°$ $\quad \Delta\theta_1 = 0{,}5°$

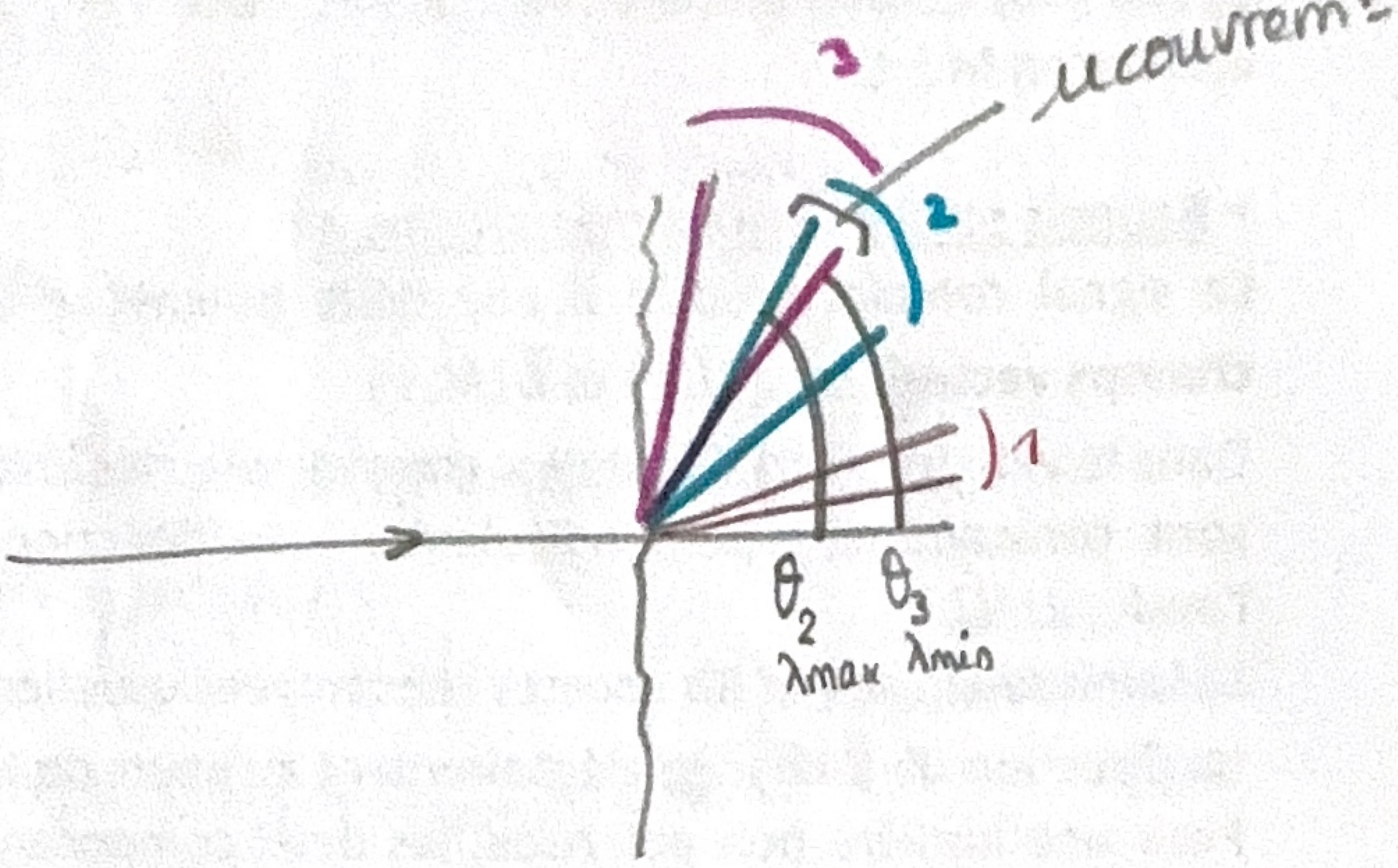
à θ_0 fixé, on a $\Delta\theta_p$ qui ↗ avec p

CCL : pour résoudre au mieux le doublet, on s'intéresse au spectre d'ordre -3 sous $\theta_0 = 30°$

2. Recouvrem^t d'ordres

relat° fondamental du réseau par transmiss°

$$\sin \theta_m - \sin \theta = m \frac{\lambda_0}{a}.$$



incidence n^{ale} $\theta = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = 0$

$$\sin \theta_m = \frac{m\lambda_0}{a}$$

$$\theta_m = \arcsin \frac{m\lambda_0}{a}$$

$\lambda_0 \nearrow \quad \theta_m \nearrow$

on cherche m tq $\theta_{m\,\lambda_{max}} > \theta_{m+1\,\lambda_{min}}$

$\sin \nearrow$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\frac{m\lambda_{max}}{\cancel{a}} > \frac{(m+1)\lambda_{min}}{\cancel{a}}$$

$$m(\lambda_{max} - \lambda_{min}) > \lambda_{min}$$

$$m > \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}} = 2{,}3.$$

$$\frac{m+1}{m} < \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = 1{,}4.$$

$$m+1 < 1{,}4\,m$$

$$1 < 0{,}4\,m$$

$m > \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$ → recouvrem^t pour ordre 3

i.e $\theta_{3\,jaune} > \theta_{4\,violet}$

⚠ ordres 3,4 $\exists$? $\quad \sin \theta_m = m\lambda_0 \cdot n \leq 1$

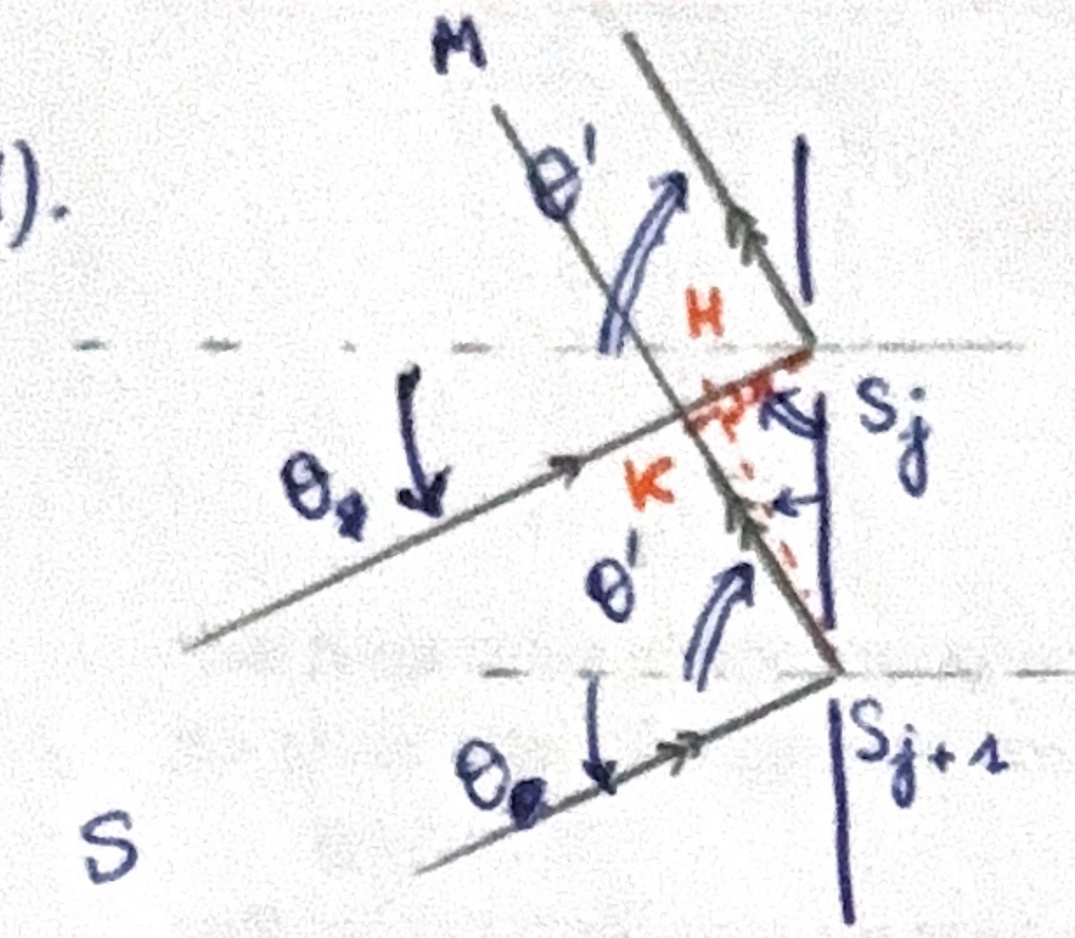
à vérifier

$m \leq \frac{1}{\lambda_{max}\, n} = 2{,}2$ ⇒ ordre 3 $\nexists$ pas

→ $\emptyset$ recouvrem^t d'ordre pour les ordres existants.

Réseau par réflex°

1).



⊕ on considère 2 motifs consécutifs

$$\delta_{j+1/j}(M) = (SS_{j+1}) + (S_{j+1}M) - [(SS_j) + (S_jM)]$$

S_{j+1} et $H \in$ au m̃ plan d'onde

$$(SS_{j+1}) = (SH).$$

S_j et $K \in$ au m̃ plan d'onde inverse relatif à M

$$(MS_j) = (MK).$$

réflex° sur métal en S_j et S_{j+1}

$$\delta_{j+1/j}(M) = -HS_j + S_{j+1}K + \pi - \pi$$

$$\delta_{j+1/j}(M) = a(-\sin\theta' - \sin\theta) \quad \text{indpt de } j$$

cdt° d'interférences constructives en M pour les N ondes

= ——————— 2 ondes issues de S_j et S_{j+1}

frange brillante de les direc° θ'_k telles que $\delta(M) = k'\lambda_0 \quad k' \in \mathbb{Z}$.

$$\Leftrightarrow \quad -a(\sin\theta'_k + \sin\theta) = k'\lambda_0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\theta'_k + \sin\theta = \frac{k\lambda_0}{a}$$

$$\theta'_0, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^2$$

ordre 0 : $\sin\theta'_0 + \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta'_0 = -\sin\theta \Leftrightarrow \theta'_0 = -\theta$

↳ relat° de Descartes pr la réflex°

$k=0$: opt géo.

2). On cherche λ_0 et k tq $\theta'_k = \theta \Rightarrow 2\sin\theta = \frac{k\lambda_0}{a}$

$$\Leftrightarrow k\lambda_0 = 2a\sin\theta = \frac{2}{n}\sin\theta \quad \text{avec } n = 10^6 \text{ traits.m}^{-1}$$

$\underline{\theta = 30°} \to \sin\theta = \frac{1}{2}$

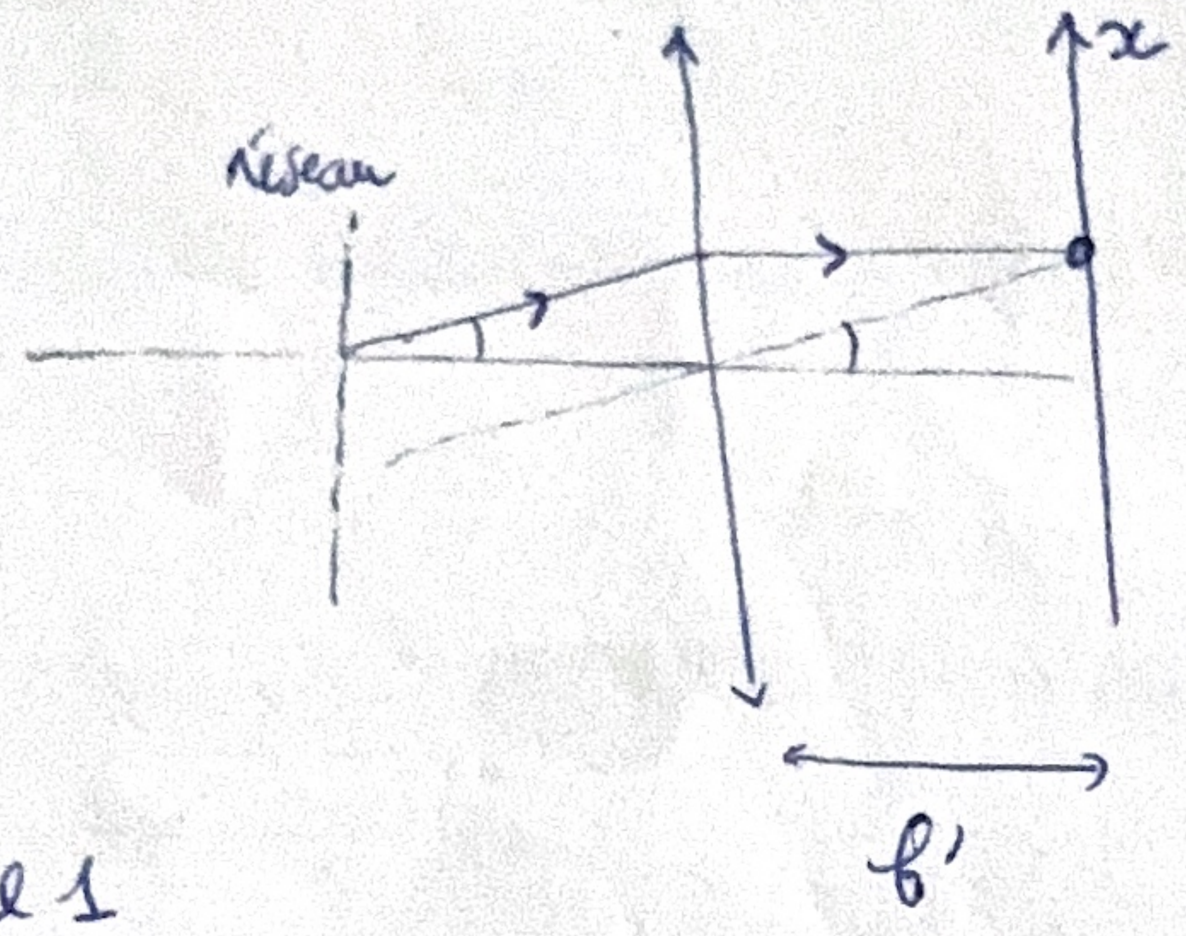
$$\Leftrightarrow k\lambda_0 = \frac{1}{n} = 10^{-6}$$

on cherche $\lambda_0 \in [400, 800]$ nm. avec $\lambda_0 = \frac{10^{-6}}{k}$

$$\Leftrightarrow 4.10^{-7} < \frac{10^{-6}}{k} < 8.10^{-7} \Leftrightarrow k < \frac{10^{-6}}{4.10^{-7}} = 2,5 \text{ et } k > \frac{10^{-6}}{8.10^{-7}} = 1,25$$

$k = 2$ seul ordre possible $\Rightarrow \lambda_0 = \frac{10^{-6}}{2} = \underline{500\text{ nm}}$ (vert).

3).



ordre 1

$$\sin\theta'_{1,1} + \sin\theta_0 = \frac{\lambda_1}{a} \qquad \text{et} \qquad \tan\theta = \frac{x}{f'}$$

$$\sin\theta'_{1,2} + \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{\sin\theta_0} = \frac{\lambda_2}{a}$$

incidence n$^{\text{ale}}$

$$\rightarrow x = f'\tan\theta = f'.\tan(\arcsin(m\lambda))$$

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}706\,m \\ x_2 = 0{,}710\,m \end{cases} \qquad \underbrace{\Delta x}_{d} = 4\ mm.$$

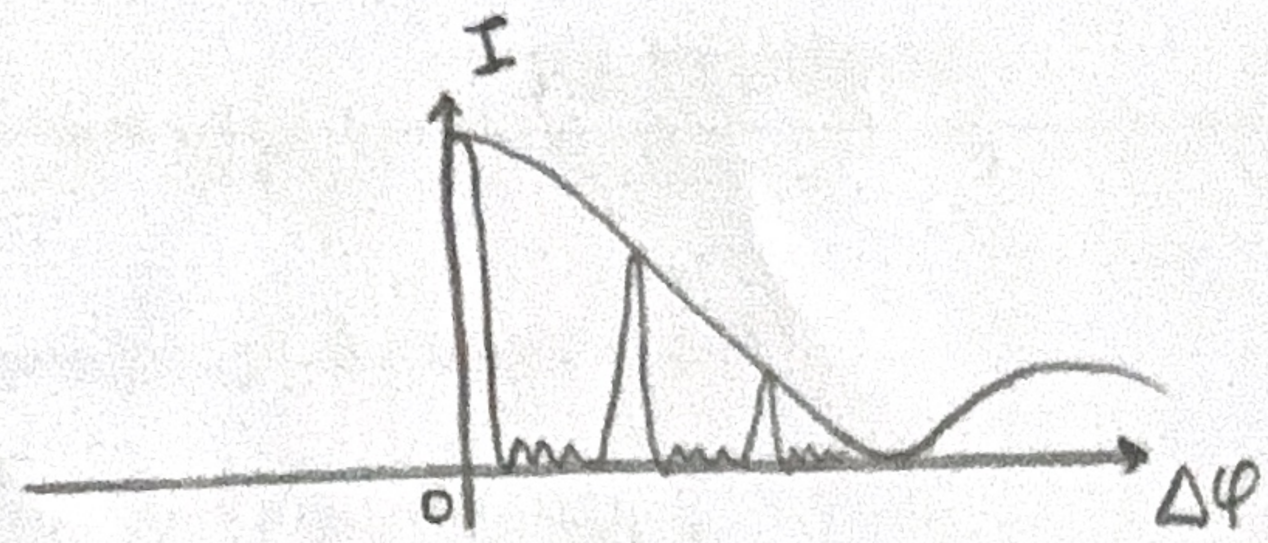
⚠ app$^{\text{o}}$ des p$^{\text{ts}}$ angles non valable :

$x_1 \simeq f'\,m\lambda_1 = 1 \times 1000.10^{3} \times 577.10^{-9} = 577.10^{-3}\,m = 0{,}577\ m$ Écart impt.

$$\begin{cases} \lambda_1 \simeq 578\,nm = 5{,}78.10^{-7} \\ a = \frac{1}{n} = 10^{-6}\,m \end{cases} \Bigg] \lambda_1 = \frac{a}{2} \rightarrow \sin\theta' \simeq \frac{1}{2}$$

Ordre manquant

1) $\mathcal{D}(i)$ enveloppe : modulatrice de l'intensité



2) cf cours $\quad \delta_{j+1,j} = a(\sin i - \sin 0) = a \sin i$ $\quad$ ($\rightarrow$ formule fond. des réseaux $a \sin i_m = m\lambda$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} . a \sin i$$

$$\underline{s}_j = \underline{s}_1 e^{-i(j-1)\Delta\varphi}$$

$$\underline{s}(M,t) = \sum_{j=1}^{N} \underline{s}_j = \underline{s}_1 \sum_{j'=0}^{N-1} e^{-ij'\Delta\varphi} = \underline{s}_1 \frac{1-(e^{-i\Delta\varphi})^N}{1-e^{-i\Delta\varphi}}$$ si $e^{-i\Delta\varphi} \neq 1$

si $\Delta\varphi = 0 [2\pi]$ $\quad \underline{s} = N\underline{s}_1$

$$\underline{s}(M,t) = \underline{s}_1 \frac{e^{-i\Delta\varphi N/2}(e^{+\cdots} - e^{-\cdots})}{e^{-i\Delta\varphi/2}(e^{+\cdots} - e^{-\cdots})}$$

$$\underline{s}(M,t) = \underline{s}_1 e^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}(N-1)} \frac{\cancel{2i}\sin(N\Delta\varphi/2)}{\cancel{2i}\sin(\Delta\varphi/2)}$$

$$I(i) = K' |\underline{s}|^2 = K' |\underline{s}_1|^2 \, 1 \, \frac{\sin^2(N\Delta\varphi/2)}{\sin^2(\Delta\varphi/2)}$$

$$I(i) = I_0 \frac{\sin^2(N\Delta\varphi/2)}{\sin^2(\Delta\varphi/2)} \quad \text{avec } \Delta\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin i$$

3) 5e ordre absent

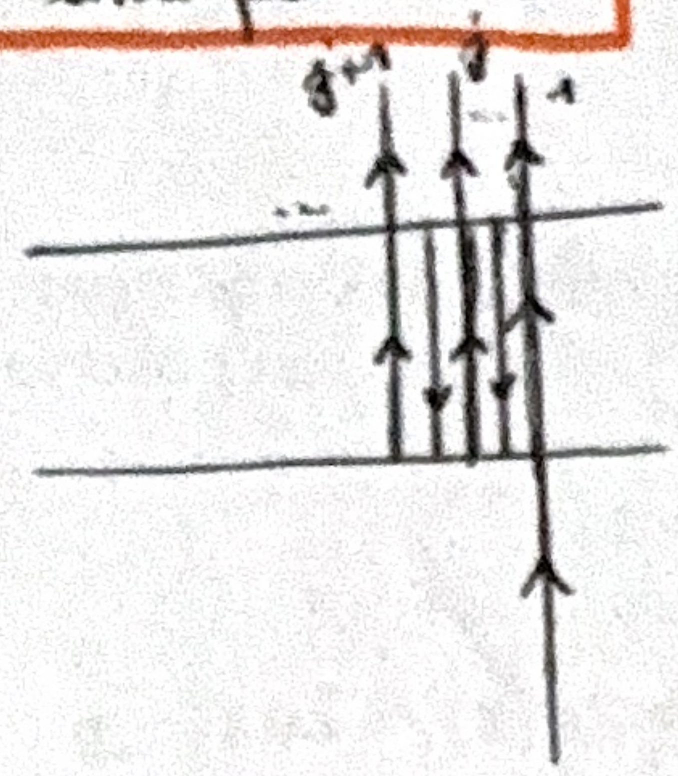
$\hookrightarrow p = 5 \Leftrightarrow$ | $\sin i_5 = \frac{5\lambda}{a}$

$\hookrightarrow \mathcal{D}(i_5) = 0 \quad \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi \ell \sin i_5}{\lambda}\right) = 0 \qquad \frac{\cancel{\pi} \ell \sin i_5}{\lambda} = \cancel{\pi}$

$$\boxed{\ell = \frac{\lambda}{\sin i_5} = \frac{a}{5}}$$

6 $\boxed{\text{Filtre interférentiel.}}$

1. $i = 0$.



a) rayon j a subi $2j-2$ réflex° ds la lame

→ différence de marche du rayon $j+1$ / au rayon j

$$\delta_{j+1/j}(M) = 2ne \quad \text{indépt de } j$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi(M) = 2\pi \frac{\delta}{\lambda_0} = 2\pi \frac{2ne}{\lambda_0}.$$

---

b). interf. constructives : $\Delta\varphi(M) = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \frac{2ne}{\lambda_{0m}} = m$$

$$\Leftrightarrow e = \frac{m\lambda_{0m}}{2n}$$

on cherche m et e tq λ_{0m} soit la seule λ visible qui vérifie l'éq°
$\lambda_{0m} = 546\,\text{nm}$.

$\lambda_{0m} = 546\,\text{nm}$ et $\begin{cases} \lambda_{0\,m-1} > 800\,\text{nm} \\ \lambda_{0\,m+1} < 400\,\text{nm}. \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2ne}{m-1} > 800\,\text{nm} \\ \frac{2ne}{m+1} < 400\,\text{nm}. \end{cases}$

$\lambda_{0m} = \frac{2ne}{m}$

$\Updownarrow$

$2ne = m\lambda_0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m\lambda_0}{m-1} > 800\,\text{nm} \\ \frac{m\lambda_0}{m+1} < 400\,\text{nm} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\lambda_0 > (m-1)\,800\,\text{nm}. \\ m\lambda_0 < (m+1)\,400\,\text{nm} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 800 > m\,(800-546) \\ m(546-400) < 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{800}{800-546} = 3{,}1 \\ m < \frac{400}{146} = 2{,}7. \end{cases} \Rightarrow m \leq 2$$

$\Rightarrow m = \cancel{0}, 1, 2$

$e \neq 0$.

$m = 1$

$$\left\lfloor e = \frac{\lambda_{01}}{2n} = \frac{\lambda_0}{3} = \underline{\underline{182\,\text{nm}}}\right.$$

$\lambda_{02} = \frac{2ne}{2} = 273\,\text{nm}$ UV

$m = 2$

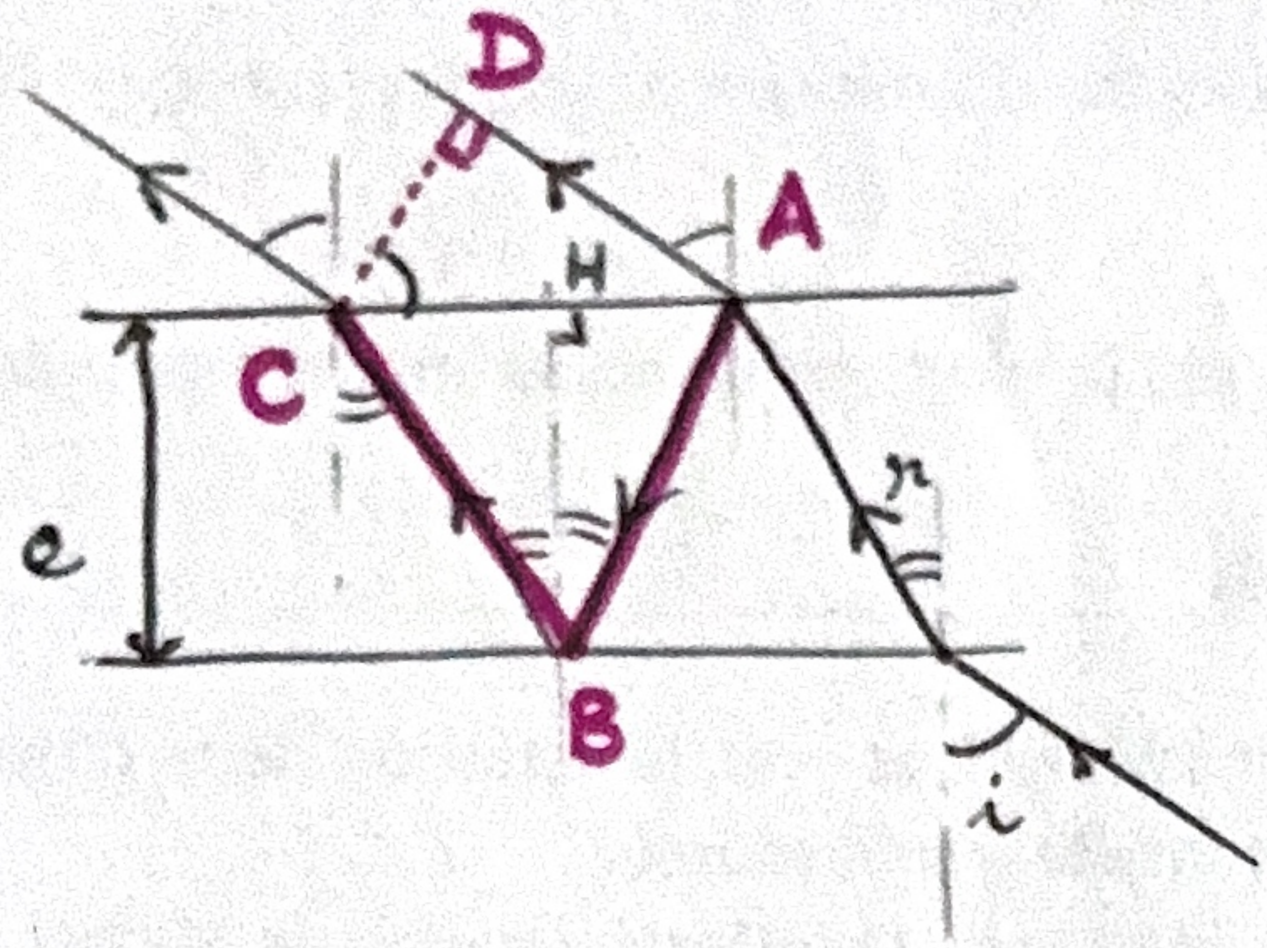
$$\left\lfloor e = \frac{2\lambda_{02}}{2n} = \underline{\underline{364\,\text{nm}.}}\right.$$

$\lambda_{01} = 1092\,\text{nm}$ IR

$\lambda_{03} = 364\,\text{nm}$ UV.

2 épaisseurs possibles.

2. $\hat{i} \neq 0$.



$$\delta_{j+1/j}(M) = (AB) + (BC) + \cancel{(CM)} - [(AD) + \cancel{(DM)}]$$

C et D $\in$ au m̂ plan d'onde inverse.

$(CM) = (DM)$.

$$\delta_{j+1/j}(M) = n\, AB \times 2 - AD.$$

triangle AHB : $\cos r = \dfrac{e}{AB} \Leftrightarrow AB = \dfrac{e}{\cos r}$

$\tan r = \dfrac{HA}{e} \Leftrightarrow HA = e \tan r$.

triangle ADC : $\sin i = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AD}{2HA} \Leftrightarrow AD = 2e\tan r . \sin i$.

loi de Descartes réfrac : $\sin i = n \sin r$ $\rightarrow AD = 2e \tan r \times n \sin r$

$\Leftrightarrow AD = 2ne \dfrac{\sin^2 r}{\cos r}$

d'où $\delta_{j+1/j}(M) = 2n \dfrac{e}{\cos r} - 2ne \dfrac{\sin^2 r}{\cos r} = \dfrac{2ne}{\cos r} \underbrace{(1 - \sin^2 r)}_{\cos^2 r}$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\delta_{j+1/j}(M) = 2ne \cos r.}$ indpt de j.

$\Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi \dfrac{\delta}{\lambda_0} = 2\pi \dfrac{2ne\cos r}{\lambda_0}$.

---

b) $i = 60°$ $\sin i = n \sin r$ $\underline{r} = \arcsin\left(\dfrac{\sin i}{n}\right) = \underline{35°}$.

on a $2ne =$ ~~546 nm~~ 1092 nm

couleur perçue pour $i = 60°$ $\Delta\varphi = 2\pi k$ $k \in \mathbb{Z}$

$\cancel{2\pi} k = \cancel{2\pi} \dfrac{2ne\cos r}{\lambda_{0k}}$ $\begin{cases} k=1 & 447\text{ nm} \\ k=2 & 224\text{ nm UV.} \end{cases}$

$\lambda_{0k} = \dfrac{2ne\cos r}{k} =$ $\begin{cases} k=1 & 895\text{ nm IR} \\ k=2 & 447\text{ nm} \\ k=3 & 298\text{ nm UV} \end{cases}$

On perçoit une couleur bleue avec cette incidence.