

Durée 4h

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la **clarté**, à la **précision** et à la **concision** de la **rédaction**. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un **stylo noir ou bleu foncé non effaçable** pour la rédaction de votre composition ; **d'autres couleurs, excepté le vert**, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les **schémas** et la **mise en évidence des résultats**.
- **Ne pas utiliser de correcteur.**
- **Numéroter les copies :** "i/nombre total".
- **Respecter les notations** de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la **numérotation de la question posée**.
- Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition.

CCS Problème 1 : Proxima du Centaure

On s'intéresse à l'étoile la plus proche de la planète Terre après le Soleil : Proxima du Centaure aussi appelée Proxima Centauri.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Certaines données numériques sont données ci-dessous ; d'autres relèvent de l'initiative du candidat.

Données utiles pour la résolution du problème 1 :

Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Constante universelle de la gravitation	$G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Rayon moyen de la Terre	$R_T = 6,38 \times 10^6 \text{ m}$
Distance Terre-Soleil	$D_{TS} = 1,50 \times 10^8 \text{ km}$
Masse de la Terre	$M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Rayon du Soleil	$R_S = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$
Masse du Soleil	$M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$

II Découverte de Proxima du Centaure

II.A – Première observation de l'étoile

L'étoile *Proxima Centauri* a été découverte en 1915 par l'astronome britannique Robert Innes, alors directeur de l'observatoire de l'Union à Johannesburg en Afrique du Sud. C'est une étoile de type naine rouge, de masse $M_E = 2,44 \times 10^{29} \text{ kg}$ et de rayon $R_E = 9,81 \times 10^4 \text{ km}$. Elle est située à $D_E = 3,99 \times 10^{13} \text{ km}$ soit 4,22 années-lumière du Soleil.

Dans la suite du sujet, toutes les applications numériques seront faites à la longueur d'onde moyenne du visible $\lambda_{\text{obs}} = 600 \text{ nm}$.

Q 13. Justifier, par un argument d'ordre de grandeur, que la distance entre la Terre et Proxima du Centaure peut être approximée à 4,22 années-lumière.

Pour voir l'étoile *Proxima Centauri*, un instrument d'optique est utilisé. Il est modélisé dans la suite par deux lentilles :

- une lentille convergente L_1 objectif, de centre optique O_1 , de foyer principal objet F_1 , de foyer principal image F'_1 et de distance focale image $f'_1 = 8 \text{ m}$;
- une lentille divergente L_2 de projection, de centre optique O_2 , de foyer principal objet F_2 , de foyer principal image F'_2 et de distance focale image $f'_2 = -0,02 \text{ m}$.

Si le point objet A et le point image A' sont conjugués par la lentille L de focale f' et de centre O , d'après la Formule de Descartes on a

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

et le grandissement transversal est

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

L'instrument d'optique est pointé vers l'étoile *Proxima Centauri*.

Q 14. Où est située l'image de l'étoile par la lentille L_1 , appelée image intermédiaire A_1B_1 ? Illustrer cette situation par un schéma.

Q 15. Déterminer l'expression de la taille de cette image intermédiaire A_1B_1 (non algébrique) en fonction du rayon R_E de l'étoile et des caractéristiques de la lentille objectif L_1 .

Q 16. La lentille de projection L_2 , divergente, sert à faire de l'image intermédiaire A_1B_1 une image définitive $A'B'$, réelle, non inversée et agrandie d'un facteur 4. Calculer la distance O_1O_2 pour respecter ces contraintes.

Q 17. Illustrer par un schéma la position de A_1B_1 , de $A'B'$ et de L_2 (sans représenter L_1).

Q 18. En 1915, l'image définitive $A'B'$ de l'étoile se formait sur une plaque photographique de dimension $24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$, composée de cristaux de $10 \mu\text{m}$ de chlorure d'argent, précipité blanc qui noircit à la lumière. L'image définitive de l'étoile *Proxima Centauri* est-elle vue comme ponctuelle ou étendue sur la plaque photo ?

Q 19. À l'occasion du centenaire de la découverte de Proxima du Centaure, en 2015, la photo de l'étoile a été reprise avec l'instrument d'optique de l'époque mais la plaque photographique a été remplacée par un capteur CCD (Charge Coupled Device) de 100 millions de pixels, de taille identique à la plaque photo originelle. L'image définitive de l'étoile *Proxima Centauri* est-elle vue comme ponctuelle ou étendue sur le capteur photosensible ? L'efficacité quantique QE d'un capteur CCD donne le taux de transformation de la lumière en charge, soit la probabilité qu'un photon incident donne « naissance » à un électron dans le capteur. Pour la longueur d'onde étudiée, cette sensibilité quantique QE est de 30 %.

Q 20. Sachant que la puissance surfacique reçue sur Terre par le Soleil dans le visible est de $600 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ et que la lentille d'entrée de l'instrument est de diamètre $D_1 = 50 \text{ cm}$, de combien d'électrons sera composé le signal résultant de l'étoile pour une exposition de 12 minutes du capteur ? Quelle est la charge produite par le capteur ?

Q 21. La diffraction par la lentille d'entrée L_1 est-elle gênante pour les observations ?

II.B – Mesure de la distance entre la Terre et l'étoile

La parallaxe est l'effet du changement de position de l'observateur sur ce qu'il perçoit.

La parallaxe annuelle est, par définition, l'angle qui mesure le déplacement, au cours de l'année, de la position apparente, perçue depuis la Terre, d'une étoile proche par rapport aux étoiles lointaines (figure 4).

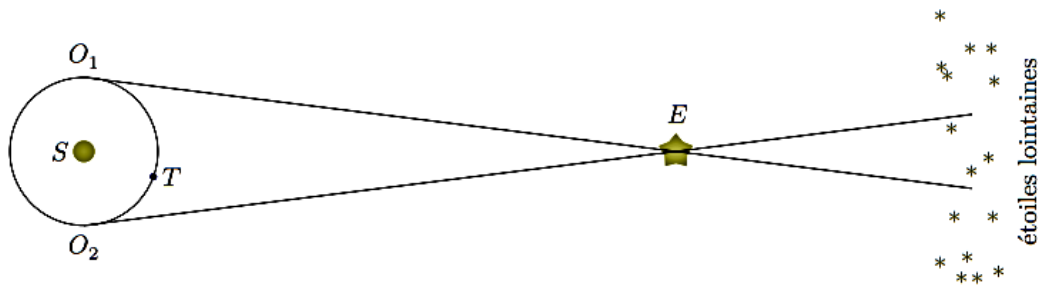


Figure 4 Schéma explicatif de la mesure de parallaxe solaire

Sur la figure 4, deux instants d'observation sont représentés par O_1 et O_2 .

Le satellite Hipparcos (High Precision Parallax Collection Satellite) a mesuré la parallaxe de $P_E = 1545$ millisecondes d'arc pour *Proxima Centauri*.

Q 22. Calculer, à partir de cette valeur de la parallaxe P_E , la distance séparant l'étoile *Proxima Centauri* du système solaire et comparer à la valeur donnée au début de cette partie.

Q 23. Pourquoi la distance entre la Terre et le Soleil varie-t-elle au cours de l'année ?

II.C – Mesure du rayon de l'étoile

En 2002, le VLT (Very Large Telescope) utilisa l'interférométrie pour mesurer le diamètre angulaire de *Proxima Centauri* : $\alpha \simeq 1,02 \pm 0,08$ milliseconde d'arc. Connaissant sa distance, obtenue par la méthode de la parallaxe, il est alors possible de déterminer son rayon.

II.C.1) L'étoile est d'abord supposée ponctuelle et l'instrument d'optique est pointée sur elle. L'étoile se situe à l'infini sur l'axe optique de l'instrument, elle est repérée par son centre S . Le dispositif d'interférométrie est modélisé par deux trous d'Young de taille identique, respectivement en T_1 et T_2 , séparés d'une distance a réglable. Ce dispositif est placé devant la lentille convergente L_1 de l'instrument d'optique. Pour simplifier, on ne tiendra pas compte dans cette partie de la seconde lentille L_2 et les observations sont donc effectuées dans le plan de l'image intermédiaire. Un point M dans ce plan est repéré par son abscisse x (figure 5).

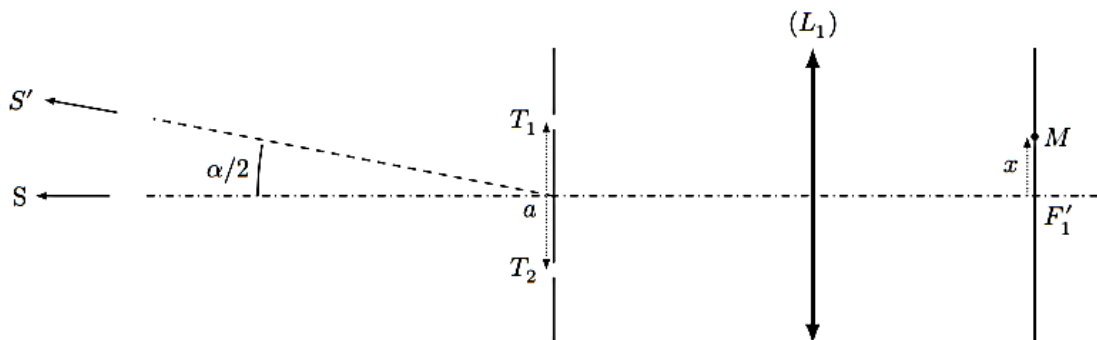


Figure 5 Schéma du dispositif d'interférométrie pour la mesure du rayon de l'étoile *Proxima Centauri*

Q 24. Faire un schéma des deux rayons lumineux passant par T_1 et T_2 qui convergent vers le point M . Représenter la différence de marche entre ces deux rayons sur ce schéma.

Q 25. Établir l'expression de l'ordre d'interférence $p_S(M)$, produit par la source S au point M .

Q 26. Décrire alors la figure d'interférences.

Q 27. En notant I_0 l'intensité moyenne, donner, sans démonstration, l'expression de l'intensité lumineuse $I(M)$ dans le plan d'observation.

II.C.2) L'étoile est à présent modélisée comme une source étendue vue sous un diamètre angulaire α . On considère un autre point source S' à la périphérie de l'étoile (figure 5).

Q 28. Faire un schéma des deux rayons lumineux issus de S' , passant par T_1 et T_2 et qui convergent vers le point M . Représenter la différence de marche entre ces deux rayons sur ce schéma.

Q 29. Établir l'expression de l'ordre d'interférence $p_{S'}(M)$ produit par la source S' au point M .

Q 30. En déduire l'expression de la plus petite valeur de a qui conduit au brouillage de la figure d'interférence produite par les deux sources incohérentes S et S' .

Q 31. Faire l'application numérique et commenter.

Q 32. Expliquer qualitativement pourquoi le raisonnement précédent, utilisant deux sources ponctuelles l'une située au centre et l'autre sur le bord apparent de l'étoile, rend compte des observations obtenues avec l'objet étendu qu'est la véritable étoile.

III Voyager vers Proxima du Centaure

Pour accomplir un voyage hypothétique vers Proxima du Centaure, on envisage un vaisseau à voile solaire, propulsé grâce à la réflexion du rayonnement électromagnétique du Soleil sur la voile. Plus la voile est grande et réfléchissante, plus grande est la force de propulsion.

Une onde plane progressive monochromatique, se propageant selon $\vec{u}_x$ depuis les $x < 0$, arrive sur la voile solaire, métal de conductivité réelle γ , assimilée dans un premier temps à un demi espace infini $x > 0$ (dénommé dans la suite approximation espace infini).

L'onde incidente dans le demi espace vide des $x < 0$ s'écrit, en notation complexe,

$$\vec{E}_i = \underline{E}_0 \exp(j(\omega t - kx)) \vec{u}_y$$

et arrive en $x = 0$ sur un métal de conductivité γ .

Q 33. Rappel sans démonstration l'équation dont le champ électrique est solution dans le vide. En déduire la relation de dispersion liant k et ω en fonction de la célérité c de l'onde. Comment qualifier la propagation de cette onde ?

Q 34. Établir l'expression du champ magnétique associé à cette onde incidente.

Q 35. Déterminer l'expression de la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting associé à cette onde incidente.

Cette onde incidente donne naissance à l'interface avec la voile solaire à :

— une onde réfléchie (se propageant selon $-\vec{u}_x$ dans l'espace $x < 0$) de la forme

$$\vec{E}_r = \underline{r} \underline{E}_0 \exp(j(\omega t + kx)) \vec{u}_y ;$$

— une onde transmise (se propageant selon $+\vec{u}_x$ dans l'espace $x > 0$) de la forme

$$\vec{E}_t = \underline{t} \underline{E}_0 \exp(j(\omega t - \underline{k}_m x)) \vec{u}_y.$$

Dans le métal (demi espace $x > 0$), le champ électrique de l'onde transmise vérifie l'équation différentielle

$$\Delta \vec{E}_t = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial t^2}. \quad (\text{III.1})$$

Q 36. Proposer une simplification de l'équation (III.1) pour une onde, dans le domaine du visible ou de l'infrarouge, se propageant dans l'or de conductivité $\gamma = 45 \times 10^6 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$.

Q 37. Exprimer le vecteur d'onde complexe $\underline{k}_m$ en fonction d'une longueur δ dont on donnera l'expression et la signification.

Q 38. Proposer une épaisseur raisonnable pour la voile solaire afin que l'approximation espace infini puisse être conservée. Sachant que la masse volumique de l'or est $\rho = 19,3 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$, estimer la masse d'une voile solaire de surface 100 m^2 .

IV Une exoplanète : *Proxima Centauri b*

Le 24 août 2016, l'observatoire européen austral annonce en conférence de presse la découverte de *Proxima Centauri b*, une planète « super Terre » rocheuse de masse M_P d'environ 1,3 masse terrestre, en orbite à une distance de 7 millions de kilomètres de *Proxima Centauri* (soit dans la zone habitable). Cette exo-planète a été détectée, de manière indirecte, par la méthode des vitesses radiales.

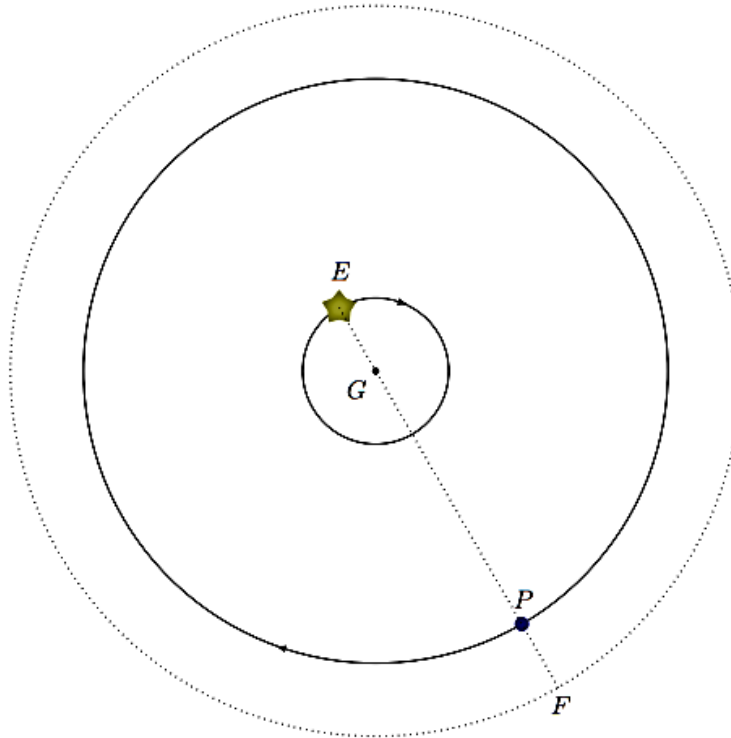


Figure 7 Schéma représentant l'étoile E et la planète P en rotation autour du point G , centre de masse du système {étoile + planète} ; le point F est un point utilisé pour étudier le mouvement de E et P autour de G

IV.A – Étude du mouvement du système {étoile + planète}

La détection de la planète repose sur le fait que le centre de masse G du système {étoile + planète} n'est pas confondu avec le centre de l'étoile. L'étoile E et la planète P tournent toutes les deux autour du centre de masse G du système complet (figure 7).

Le centre de masse G est défini par l'une des deux relations

$$(M_E + M_P)\overrightarrow{AG} = M_E\overrightarrow{AE} + M_P\overrightarrow{AP} \quad \text{pour tout point } A$$

$$M_E\overrightarrow{GE} + M_P\overrightarrow{GP} = \vec{0}$$

Toutes les forces autres que la force d'interaction gravitationnelle entre la planète et l'étoile sont négligées. On suppose que le référentiel d'étude, de centre G dont les 3 axes pointent vers trois étoiles lointaines est galiléen.

Q 41. Établir la relation $\overrightarrow{GP} = \frac{M_E}{M_E + M_P}\overrightarrow{EP}$. Contrôler la pertinence de cette expression en étudiant des cas limites.

On note pour la suite $\vec{r} = \overrightarrow{EP}$ et $\|\vec{r}\| = r$.

Q 42. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la planète P dans le référentiel d'étude, établir l'équation différentielle vérifiée par $\vec{r}$.

On considère le point F défini par $\vec{r} = \overrightarrow{GF}$. Ce point est en mouvement circulaire, de période T , autour de G .

Q 43. Établir la relation

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}(M_E + M_P)}{4\pi^2}.$$

Quel nom porte cette loi ?

Q 44. Justifier que E a un mouvement circulaire uniforme autour de G et établir l'expression de sa vitesse de révolution en fonction de M_P , M_E , r et T .

IV.B – Résultats ayant conduit à la découverte de la planète *Proxima Centauri b*

Dans le cas le plus favorable à l'observation, la Terre est dans le plan des trajectoires de *E* et *P* (figure 7), l'étoile *E* possède alors un mouvement apparent oscillant et la mesure de sa composante *V* de vitesse selon l'axe de visée depuis la Terre est possible par effet Doppler-Fizeau, qui entraîne un décalage des raies spectrales de l'étoile par rapport à leur position mesurée sur Terre, selon la relation

$$\frac{f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}}{f_{\text{em}}} = \frac{V}{c}$$

où f_{em} et f_{obs} représentent respectivement la fréquence à l'émission et la fréquence observée sur Terre.

Le professeur Bouchy de l'observatoire astronomique de Provence propose, en 2005, dans son intervention sur les exoplanètes la formule suivante pour le décalage Doppler lors de la détection indirecte d'exoplanètes par la méthode des vitesses radiales

$$\frac{f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}}{f_{\text{em}}} = - \left(\frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3} \frac{M_P \sin i}{(M_P + M_E)^{2/3}} \frac{1}{c\sqrt{1 - e^2}}$$

où M_P et M_E sont respectivement les masses de la planète et de l'étoile, T la période de la planète, e l'excentricité de l'orbite et i l'angle entre la ligne de visée et la perpendiculaire au plan orbital du système. L'excentricité e vérifie $0 \leq e < 1$, avec $e = 0$ pour une orbite circulaire.

Q 45. En utilisant les résultats de la sous-partie précédente (IV.A), établir une formule analogue à la formule proposée par le professeur Bouchy. Commenter les différences.

Q 46. Connaissant la masse de *Proxima Centauri*, $M_E = 2,44 \times 10^{29}$ kg déterminée grâce à l'analyse de son rayonnement, exploiter les données expérimentales de la figure 8 pour déterminer la masse de la planète *Proxima Centauri b*.

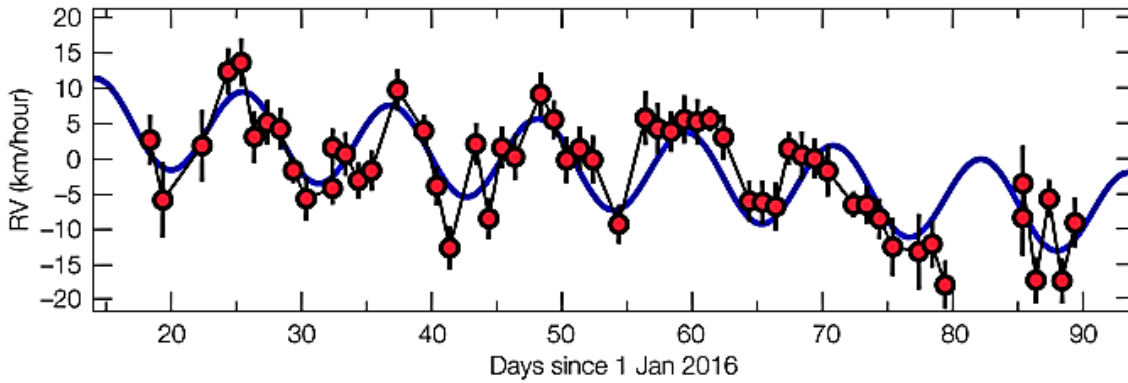


Figure 8 Variations de la vitesse radiale de l'étoile *Proxima Centauri* au cours du premier trimestre 2016 — Source : European Southern Observatory, Guillem Anglada-Escudé

CCS Problème 2 : Expérimenter avec un morceau de Scotch®

Conditionné sous forme de rouleau, un ruban adhésif (généralement désigné par le terme « Scotch® ») est constitué de deux couches solidaires l'une de l'autre : une couche « molle » sur la face interne (celle qui colle) et une couche « dure » sur la face externe du rouleau (qui paraît néanmoins souple car très fine). L'épaisseur de l'ensemble est de l'ordre de quelques dizaines de micromètres. On propose d'étudier dans ce problème quelques expériences mettant en jeu les propriétés — adhésives ou autres — des rubans adhésifs.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement.

Ce sujet est accompagné d'un document réponse page 12 à rendre avec la copie. Ce sujet regroupe les données numériques page 11. Les parties I et III sont indépendantes entre elles.

I Pelage d'un ruban adhésif collé sur un substrat plan

I.A – Principe de l'essai de pelage

Pour tester les propriétés d'adhésion d'un ruban adhésif, on réalise généralement des essais de *pelage*. Pour cela, on commence par coller le ruban adhésif à tester sur un support rigide. Puis on mesure la force $F_p = \|\vec{F}_p\|$ qu'il est nécessaire d'appliquer à l'extrémité du ruban pour le décoller du support tout en maintenant un angle θ constant entre le support et la portion de ruban décollée (figure 1).

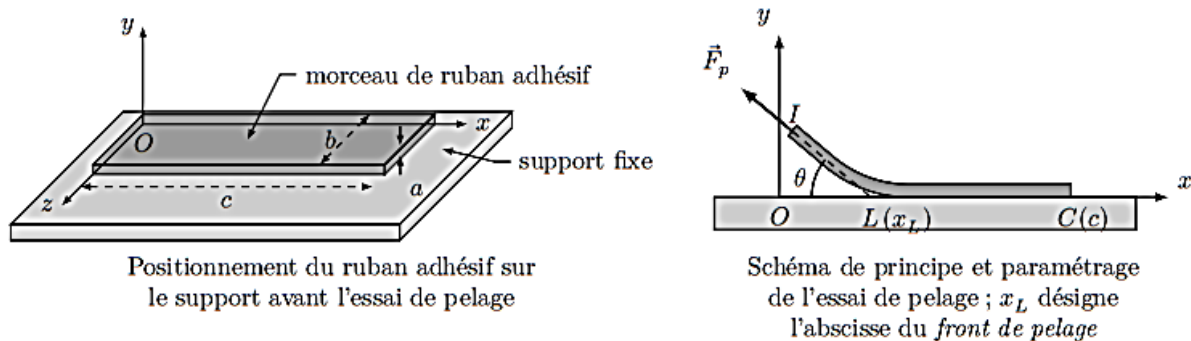


Figure 1 Pelage d'un morceau de ruban adhésif

Au niveau microscopique, les interactions qui permettent l'adhésion du ruban sur le support sont des liaisons de Van der Waals.

I.A.2) En première approximation, la force de van der Waals entre deux molécules distantes de r dérive du potentiel de Lennard-Jones $E_{LJ}(r) = \frac{\alpha}{r^{12}} - \frac{\beta}{r^6}$, où α et β sont deux constantes positives.

- Identifier, en justifiant la réponse, le caractère attractif ou répulsif de chacun des deux termes figurant dans cette expression.
- Représenter l'allure de E_{LJ} en fonction de r . Indiquer graphiquement à quoi correspond l'énergie de liaison entre les deux molécules.
- Justifier qualitativement que le travail W_{adh} que doit fournir l'opérateur pour décoller le ruban adhésif du support est proportionnel à l'aire A de la surface de contact entre le ruban et son support.

Pour la suite du problème, on note $W_{adh} = \gamma A$, où γ est une constante positive caractéristique du ruban et du support mis en contact.

I.A.3) On considère dans cette question que le décollement se fait de façon quasi-statique et que le ruban est parfaitement inextensible. Le problème étant invariant par translation selon Oz , on raisonne dans le plan Oxy . On rappelle que l'angle θ reste constant au cours de cette opération.

- a) Exprimer le déplacement élémentaire $d\vec{\ell}_I$ du point I (point d'application de la force $\vec{F}_p$) lorsque le front de pelage (figure 1) progresse de dx_L , ainsi que le travail δW_p de la force de pelage associé à cette progression.
- b) En déduire l'expression de la force de pelage F_p en fonction de γ , b et θ .

I.A.4) Le dispositif utilisé en pratique est représenté sur la figure 2. Le pelage est réalisé au moyen d'une tige horizontale, de rayon r_0 , en rotation autour de son axe, et sur laquelle s'enroule le ruban au cours de l'essai (l'axe de la tige est fixe dans le référentiel du laboratoire et situé à une hauteur ℓ_0 au-dessus du support). Le support sur lequel est collé l'autre extrémité du ruban est animé d'un mouvement de translation horizontale à la vitesse constante $\vec{V}_0$ dans le référentiel du laboratoire.

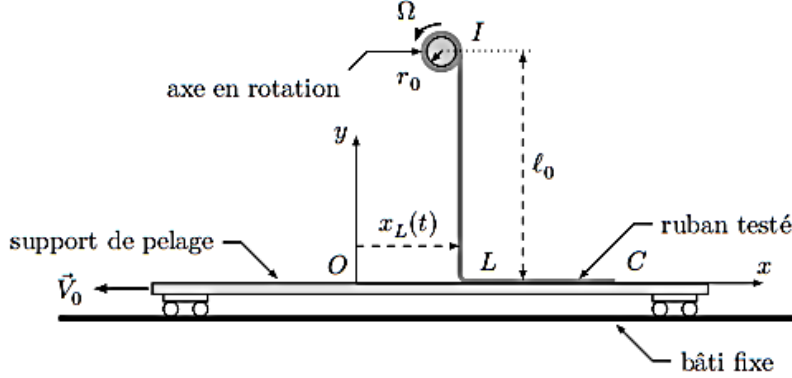


Figure 2 Schéma du dispositif pratique utilisé pour l'essai de pelage. Le repère Oxy est lié au support de pelage. Les points I et L correspondent aux limites entre les parties collée et décollée du ruban

- a) Le repère Oxy étant lié au support, quelle loi d'évolution $x_L(t)$ devrait-on observer si l'angle θ reste constant ?
- b) On rappelle que le ruban est supposé inextensible. Comment doit-on choisir Ω et $\|\vec{V}_0\|$ pour maintenir un angle de pelage constant au cours de l'essai ?
- c) Initialement, le ruban est positionné de sorte à avoir un angle de pelage $\theta \approx 90^\circ$. Commenter ce choix.

I.B – Modélisation du comportement dynamique du ruban au cours de l'essai

La loi d'évolution de $x_L(t)$ prévue précédemment n'est pas toujours observée en pratique car le ruban présente un comportement légèrement élastique. Au début de l'essai, le ruban commence en effet par se tendre sans se décoller. Puis, lorsque la tension est suffisante, le décollement se produit brutalement, réduisant par conséquent la tension. Le décollement s'arrête alors spontanément, jusqu'à ce que la poursuite du mouvement tende suffisamment le ruban pour que le décollement reprenne, et ainsi de suite... Ce phénomène périodique, connu sous le nom de « *stick-slip* » (ou « *collé-glissé* »), est à l'origine du bruit caractéristique du décollement d'un ruban adhésif : « *schrüich* ».

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au support de pelage, la dynamique du front de pelage s'apparente à celle du système masse-ressort représenté sur la figure 3. La portion de ruban au contact du support est modélisée par la masse m tandis que la portion décollée du ruban est modélisée par le ressort de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 et dont l'extrémité I est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme à la vitesse $\vec{V}_p = -\vec{V}_0$. L'action du support sur le ruban est modélisée par une force de frottement $\vec{f} = f\vec{u}_x$ obéissant aux lois suivantes :

- la masse m ne glisse pas sur le support tant que $\|\vec{f}\| < F_p$;
- lorsque la masse m glisse sur le support, la force $\vec{f}$ s'oppose au glissement et $\|\vec{f}\| = (1 - \varepsilon) F_p$ (avec ε une constante telle que $0 < \varepsilon < 1$).

On néglige l'action de la pesanteur sur l'évolution du système.

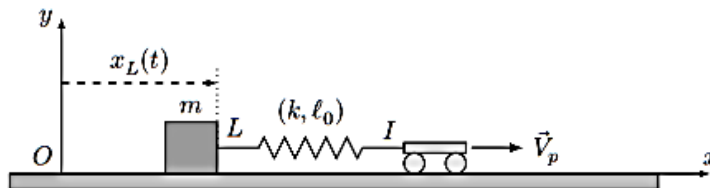


Figure 3 Système modèle pour l'étude du mouvement stick-slip

- I.B.1)** Le référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$ lié au support de pelage peut-il être considéré comme galiléen ?

I.B.2) À l'instant $t = 0$, on a $x_L(0) = 0$ et $\ell(0) = \ell_0$. Exprimer la longueur $\ell(t)$ du ressort pour $t > 0$, en fonction de ℓ_0 , $V_p = \|\vec{V}_p\|$, $x_L(t)$ et t .

I.B.3) On suppose de plus que $\dot{x}_L(0) = 0$. Montrer que l'évolution du système pour $t > 0$ commence nécessairement par une phase de *stick* (le ruban se tend sans se décoller). Déterminer à quel instant t_0 se termine cette phase.

I.B.4) Établir l'équation du mouvement de la masse m lors de la phase suivante (phase de *slip*). Identifier la pulsation propre ω_0 du système.

I.B.5) La solution de l'équation précédente s'écrit sous la forme

$$x_L(t') = C_1 \cos(\omega_0 t') + C_2 \sin(\omega_0 t') + V_p t' + C_3 \quad \text{avec} \quad t' = t - t_0$$

Déterminer les expressions des constantes C_1 , C_2 et C_3 correspondant à cette phase du mouvement.

I.B.6) Une simulation numérique permet de représenter l'évolution de la solution *mathématique* $x_L(t')$ précédente pour différentes valeurs de la vitesse de pelage V_p . Les paramètres choisis pour réaliser cette simulation sont :

$$\varepsilon = 0,15 \quad \frac{F_p}{k} = 1,0 \text{ mm} \quad \omega_0 = 1,0 \times 10^4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Les courbes correspondant à $V_p = 2,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $V_p = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ sont reproduites sur les figures A et B du document-réponse. Ces courbes sont accompagnées des portraits de phase du système, pour lesquels on représente $v_L(t') = \frac{dx_L}{dt'}(t')$ en fonction de $\ell(t') - \ell_0$.

a) Faire apparaître, sur chacun des deux portraits de phase du document-réponse, le point représentatif de l'instant $t' = 0$. Indiquer, en le justifiant, quel est le sens de parcours de ces portraits de phase.

b) En justifiant votre raisonnement par des *considérations graphiques précises*, indiquer, pour chacune des deux vitesses de pelage, si la phase de *slip* perdure indéfiniment ou si elle cesse à un instant t'_1 que l'on identifiera clairement sur les courbes.

c) Dans le(s) cas où la phase de *slip* cesse, représenter (directement sur les figures A et/ou B du document réponse) l'allure de la solution *physique* $x_L(t')$ réellement obtenue et du portrait de phase associé.

III Mesure de la biréfringence d'un ruban adhésif

Dans toute cette partie, l'air est assimilé au vide et on note c la célérité de la lumière dans le vide.

III.A – Préambule : Mesure d'une différence d'indice optique à l'aide d'un interféromètre de Mach-Zehnder

On dispose de deux lames transparentes à faces parallèles, de même épaisseur e (connue avec précision) et d'indices optiques différents :

- une lame « de référence » ($\mathcal{L}_0$), d'indice optique n_0 connu ;
- une lame « d'essai » ($\mathcal{L}_e$), d'indice optique $n_e = n_0 + \Delta n$ (avec $\Delta n > 0$).

Afin de mesurer Δn , on place chacune de ces lames dans un des bras d'un interféromètre de Mach-Zehnder (figure 7).

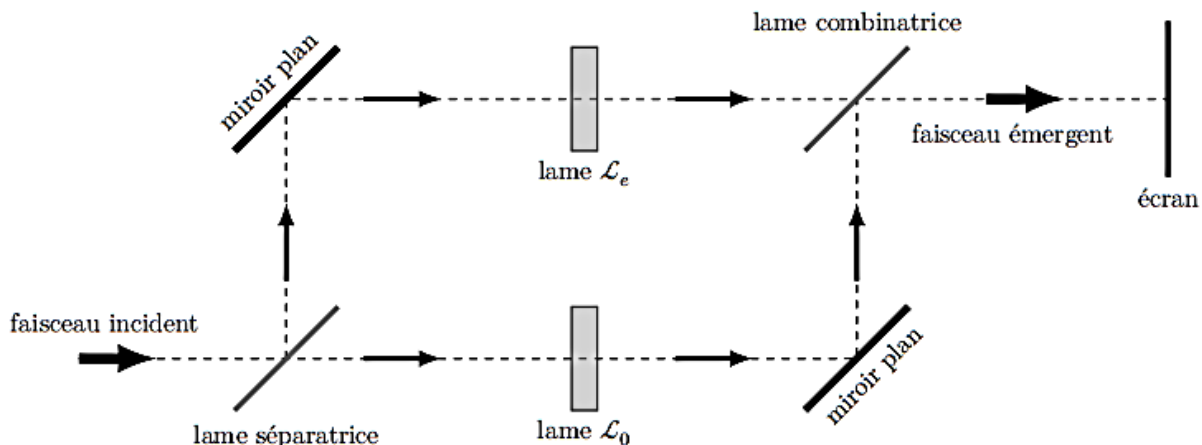


Figure 7 Schéma de principe de l'interféromètre de Mach-Zehnder et placement des lames étudiées.

De façon simple, l'interféromètre de Mach-Zehnder est constituée de deux lames semi-réfléchissantes et de deux miroirs plans (tous ces éléments sont parallèles entre eux). La lame semi-réfléchissante placée en entrée du dispositif est appelée lame *séparatrice* ; elle permet de diviser le faisceau incident en deux faisceaux secondaires orthogonaux entre eux et de même intensité. Les deux miroirs plans (un dans chaque bras de l'interféromètre) permettent d'orienter les faisceaux secondaires vers la sortie du dispositif. La lame semi-réfléchissante placée en sortie du dispositif, rigoureusement identique à la lame séparatrice, est appelée lame *combinatrice* car elle permet de superposer les deux faisceaux secondaires en direction de l'écran (ou d'un photodétecteur).

III.A.1) L'interféromètre de Mach-Zehnder est un interféromètre à division d'amplitude. Citer le nom d'un autre interféromètre de ce type et dater approximativement son invention.

III.A.2) Pourquoi n'est-il pas nécessaire d'accoler une lame compensatrice à la lame séparatrice dans ce dispositif ?

III.A.3) Le faisceau incident est un faisceau de lumière parallèle. On suppose que les deux lames sont orientées de façon à être éclairées sous incidence normale. Déterminer la différence de marche δ entre les deux faisceaux en sortie de l'interféromètre.

III.A.4) Dans le cas où le faisceau incident est monochromatique de longueur d'onde λ , exprimer l'intensité lumineuse I obtenue sur l'écran en sortie du dispositif (on se placera dans le cadre du modèle scalaire de la lumière et on notera I_0 l'intensité lumineuse obtenue sur l'écran en masquant l'un des deux miroirs). Décrire brièvement ce que l'on observe sur l'écran.

III.A.5) Pour quelle(s) longueur(s) d'onde, l'intensité I est-elle maximale ?

III.A.6) Proposer un protocole de mesure de Δn à l'aide de ce dispositif (et de tout le matériel classique d'un laboratoire d'optique).

III.B – Propagation d'une onde polarisée à travers un morceau de Scotch®

Le Scotch® est un milieu *biréfringent*, c'est-à-dire que son indice de réfraction n'est pas unique : il dépend de la direction de polarisation de l'onde lumineuse qui le traverse. Pour la suite, on considère un morceau de Scotch® assimilé à une lame plane à faces parallèles, orthogonales à l'axe Oz , d'épaisseur e . On envoie sur cette lame une onde lumineuse plane, progressive (selon $+Oz$), monochromatique, polarisée rectilignement, et on admet que :

- pour une polarisation rectiligne selon Ox , l'onde se propage à la vitesse $v_o = \frac{c}{n_o}$ dans la lame, sans changer de direction de polarisation ;
- pour une polarisation rectiligne selon Oy , l'onde se propage à la vitesse $v_e = \frac{c}{n_e}$ dans la lame, avec $n_e = n_o + \Delta n$, sans changer de direction de polarisation.

Les axes Ox et Oy sont appelés *lignes neutres* de la lame.

L'origine de l'axe Oz est choisie au niveau de la face d'entrée de la lame. On néglige tout phénomène de réflexion partielle au niveau des faces de la lame.

III.B.1) En notation complexe, le champ électrique associé à l'onde incidente (dans le domaine $z < 0$) s'écrit $\underline{E}(M, t) = \underline{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM})}$, où ω est la pulsation de l'onde et $\underline{E}_0$ un vecteur constant.

- a) Exprimer le vecteur d'onde $\vec{k}$ correspondant à la situation étudiée.
- b) Justifier que les vecteurs $\vec{k}$ et $\underline{E}_0$ sont nécessairement orthogonaux entre eux.

III.B.2) On suppose dans cette question que l'onde incidente est polarisée rectilignement selon Ox . Expliciter, en notation complexe, le champ électrique associé à l'onde au niveau de la face de sortie de la lame (en $z = e$), puis en un point quelconque du domaine $z > e$.

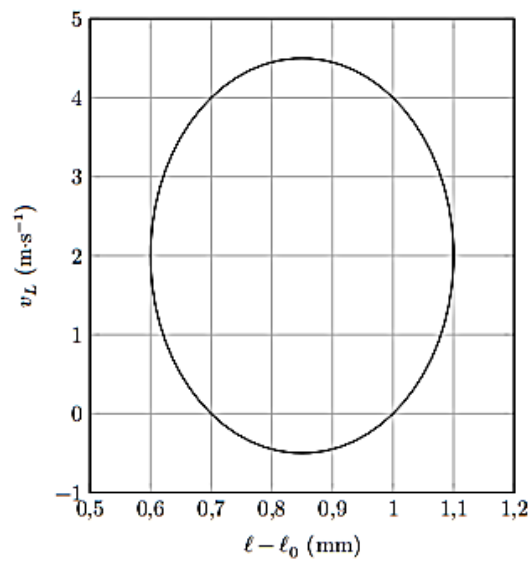
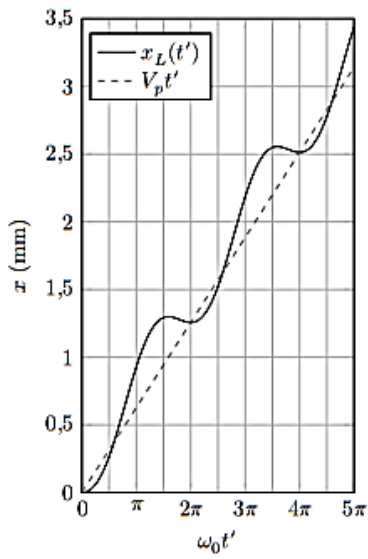
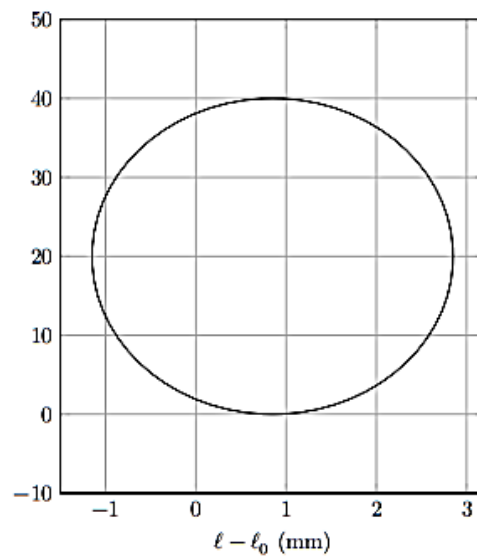
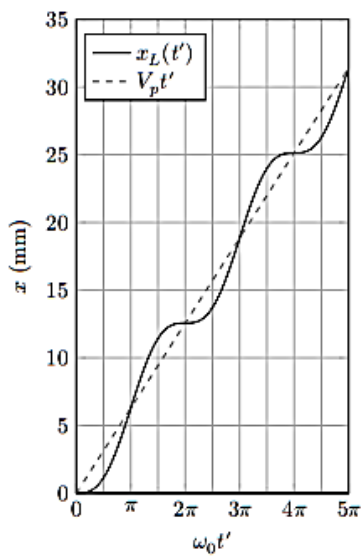
III.B.3) L'onde incidente est désormais polarisée rectilignement selon la première bissectrice des axes Ox et Oy : $\underline{E}_0 = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{u}_x + \vec{u}_y)$ (avec $E_0 = \|\underline{E}_0\|$).

- a) En admettant que la biréfringence du Scotch® est un phénomène linéaire, donner en notation complexe l'expression du champ électrique obtenu dans le domaine $z > e$.
- b) Après avoir traversé la lame, l'onde est-elle toujours polarisée rectilignement ?
- c) Montrer que, si $\Delta n e = p\lambda$ avec p un entier et λ la longueur d'onde de l'onde dans le vide, l'onde émergente est polarisée rectilignement dans la même direction que l'onde incidente.

DONNEES NUMERIQUES Problème 2

Divers

- Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- L'air est considéré comme un mélange gazeux dont les fractions molaires sont 20% de O_2 et 80% de N_2
- Masse volumique de l'eau liquide : $\rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

NOM :Figure A Résultats de la simulation numérique pour $V_p = 2,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.Figure B Résultats de la simulation numérique pour $V_p = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

- FIN DE L'ENONCE -