

Durée 4h

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la **clarté**, à la **précision** et à la **concision** de la **rédaction**. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

RAPPEL DES CONSIGNES

- **Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable** pour la rédaction de votre composition ; **d'autres couleurs, excepté le vert**, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les **schémas** et la **mise en évidence des résultats**.
- **Ne pas utiliser de correcteur.**
- **Numéroter les copies** : "i/nombre total".
- **Respecter les notations** de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la **numérotation de la question posée**.
- **Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.**

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique
est interdit

Problème 1 : La planète Terre

Ce sujet évoque quelques considérations relatives à l'état de notre planète (**figure 1**) et au réchauffement qu'elle est en train de subir. De nombreux dispositifs sont dédiés à la compréhension et à la surveillance du changement climatique. Certains sont envoyés en orbite autour de la Terre pour procéder à des mesures depuis l'espace. Les satellites altimétriques permettent de surveiller la montée du niveau des océans causée par la fonte des glaces et la dilatation des eaux réchauffées. La **première partie** étudie le mouvement de ces satellites. La **deuxième partie** traite du dispositif de mesure en lui-même.

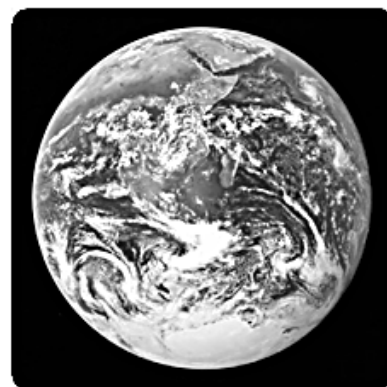


Figure 1 - Image de la Terre prise par l'équipage de la mission Apollo 17 en 1972. Crédit : NASA

À une grandeur physique évoluant sinusoïdalement avec le temps $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, on associera la grandeur complexe $\underline{f}(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)}$, dont la partie réelle s'identifie à la grandeur physique $f(t)$ et où i est l'unité imaginaire, nombre complexe dont le carré vaut -1 .

Par commodité de représentation, les figures de l'énoncé ne respectent pas les échelles.

Certaines données sont regroupées ci-dessous. Lorsqu'une application numérique est demandée, le candidat pourra se contenter d'exprimer le résultat avec un seul chiffre significatif.

Données

- intensité de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;
- masse de l'électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$;
- permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$;
- célérité des ondes électromagnétiques dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

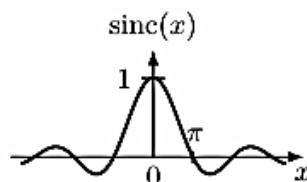
Formulaire

- Double produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$$

- Sinus cardinal :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$



Partie I - Étude du mouvement d'un satellite

Les systèmes d'observation des océans par satellite ont été imaginés et développés au début des années 70. Depuis, plus d'une quinzaine de satellites d'observation embarquant des altimètres radars ont été lancés dans le but d'observer le comportement des océans (figure 2).

Issues d'une coopération du CNES et de la NASA, la série des satellites Topex-Poséidon, initiée en 1992, puis celle des satellites Jason, ont permis de mesurer l'élévation moyenne des mers avec précision : $(3,6 \pm 0,1)$ mm/an durant ces trente dernières années.

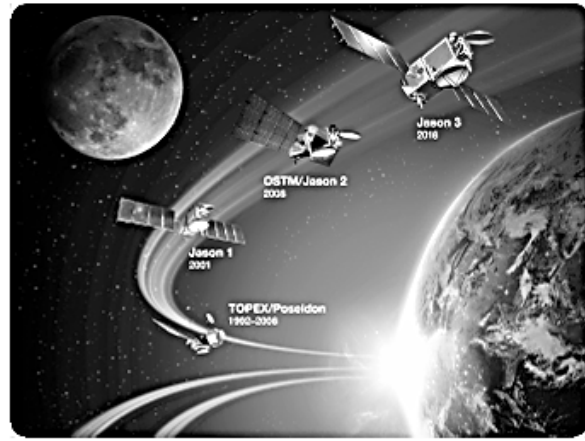


Figure 2 - Satellites altimétriques lancés depuis 1992. Vue d'artiste. Crédit : CNES

On se propose dans cette partie d'étudier le mouvement d'un tel satellite, en orbite autour du centre O de la Terre, modélisée par un corps de répartition de masse à symétrie sphérique, de rayon R_T et de masse M_T .

I.1 - Force centrale conservative

On commence par étudier le mouvement d'un mobile quelconque, de masse m et assimilé à un point matériel M , dans le référentiel géocentrique ($\mathcal{R}_T$) considéré comme galiléen. Le mobile n'est soumis qu'à la seule action de la Terre.

- Q1.** Rappeler la définition du référentiel géocentrique et celle d'un référentiel galiléen.
- Q2.** Après avoir justifié la direction du champ de gravitation terrestre $\vec{g}(M)$ et les invariances de sa norme, établir l'expression de celui-ci en un point M extérieur à la Terre en fonction de la constante de gravitation universelle G , de la masse M_T , de la distance $r = OM$ et du vecteur unitaire $\vec{u} = \overrightarrow{OM}/r$. En déduire l'expression $\vec{F}_g$ de la force de gravitation exercée par la Terre sur le mobile de masse m .
- Q3.** Montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O$ du mobile par rapport au point O est une constante du mouvement. En déduire que la trajectoire du mobile est plane.

Dans la suite, on associera au référentiel ($\mathcal{R}_T$) le repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de façon à ce que le moment cinétique $\vec{L}_O$ soit aligné avec $\vec{e}_z$. On posera $\vec{L}_O = L_0 \vec{e}_z$ et on se placera en coordonnées polaires (r, θ) , de centre O , pour décrire le mouvement du mobile (figure 3).

- Q4.** Montrer que la force gravitationnelle s'exerçant sur le mobile dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$. Établir l'expression de celle-ci en la prenant, par convention, nulle à l'infini.

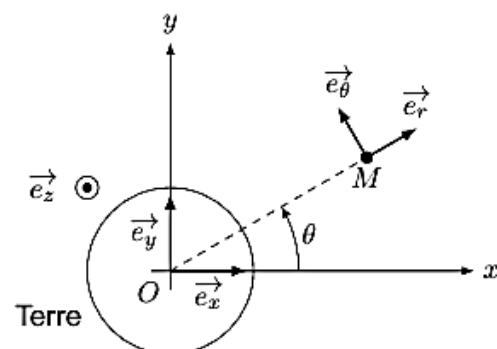


Figure 3 - Description du mouvement du mobile dans le système de coordonnées polaires

Q5. Montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ est une constante du mouvement et qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \quad (1)$$

où $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ est un terme, appelé *énergie potentielle effective*, que l'on exprimera en fonction de G , m , M_T , $\mathcal{L}_0$ et de r .

Q6. Expliquer pourquoi l'énergie mécanique du mobile est nécessairement supérieure ou égale à son énergie potentielle effective.

Q7. Représenter graphiquement, pour une valeur donnée de $\mathcal{L}_0$, l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ du mobile en fonction de r . Faire apparaître sur le graphique l'énergie mécanique d'une trajectoire associée à un état lié. On rappelle que, pour une force centrale en $1/r^2$, la trajectoire d'un état lié est elliptique.

Q8. Pour un mouvement elliptique quelconque, indiquer à quelles positions particulières l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle effective. Caractériser le mouvement du mobile dans le cas où l'énergie mécanique est égale au minimum de l'énergie potentielle effective.

La plupart des mesures effectuées par les satellites altimétriques se font à partir de l'orbite altimétrique de référence, que l'on considérera ici comme une orbite circulaire de rayon R . Dans la suite, le mobile étudié correspond à un satellite altimétrique de masse m , assimilable à un point matériel.

Q9. Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,\text{alt}}$ du satellite situé sur l'orbite altimétrique de référence, en fonction de G , M_T , m et de R .

Q10. Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier d'une orbite circulaire, en utilisant les paramètres liés à l'orbite altimétrique.

On admettra que la troisième loi de Kepler est valable plus généralement pour un mouvement elliptique. Son expression peut se déduire de l'équation obtenue pour le mouvement circulaire, en remplaçant le rayon R de l'orbite circulaire par le demi-grand axe a de la trajectoire elliptique.

I.2 - Jason-2 : un exemple pour la fin de vie des satellites

En fin de vie, pour que ne soit pas laissé un objet non contrôlé sur l'orbite altimétrique de référence, le satellite Jason-2 a été dirigé vers une orbite dite « cimetière », d'altitude légèrement moins haute que celle de l'orbite altimétrique de référence, avant d'être définitivement abandonné. On se propose dans cette sous-partie d'étudier le cas d'une manœuvre de ce type dans le cas très simplifié, illustré **figure 4**, d'un transfert entre deux orbites circulaires coplanaires sous la seule action de l'attraction terrestre. L'orbite de transfert, appelée orbite de Hohmann, correspond à une ellipse dont l'un des foyers est le centre O de la Terre, dont l'apogée A est situé sur l'orbite altimétrique de référence (rayon R) et dont le périogée P est sur l'orbite cimetière (rayon R_c).

Pour modifier l'orbite du satellite, il faut l'accélérer ou le freiner en commandant le fonctionnement et la direction de ses moteurs. On considérera que la poussée générée par ceux-ci s'exerce pendant une durée tellement courte que les changements d'orbites se font instantanément.

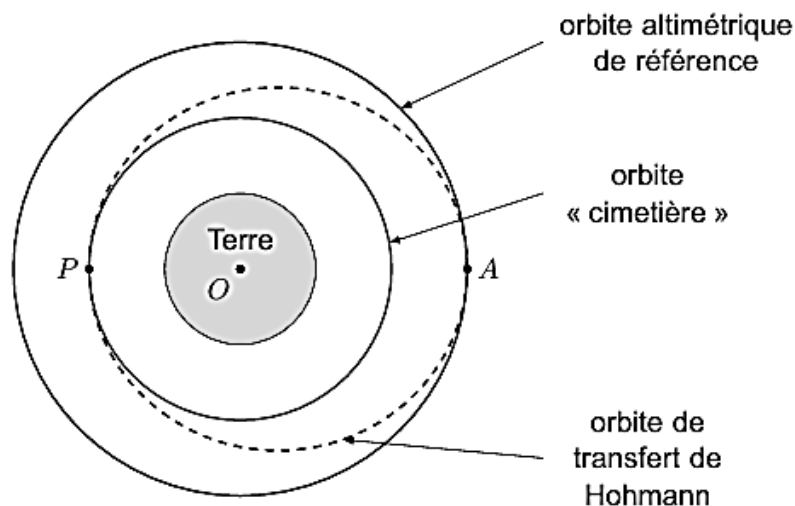


Figure 4 - Tracé des différentes orbites du satellite

Q11. En utilisant l'équation (1), montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m, \text{tr}}$ du satellite sur l'orbite de transfert peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_{m, \text{tr}} = -\frac{GM_T m}{R + R_c}.$$

Q12. Exprimer la variation d'énergie mécanique $\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m, \text{tr}} - \mathcal{E}_{m, \text{alt}}$ nécessaire pour passer de l'orbite initiale à l'orbite de transfert. Commenter le signe de $\Delta\mathcal{E}_m$.

Q13. En justifiant la réponse, indiquer s'il faut accélérer ou freiner le satellite pour le transférer en P de l'orbite de transfert à l'orbite cimetière.

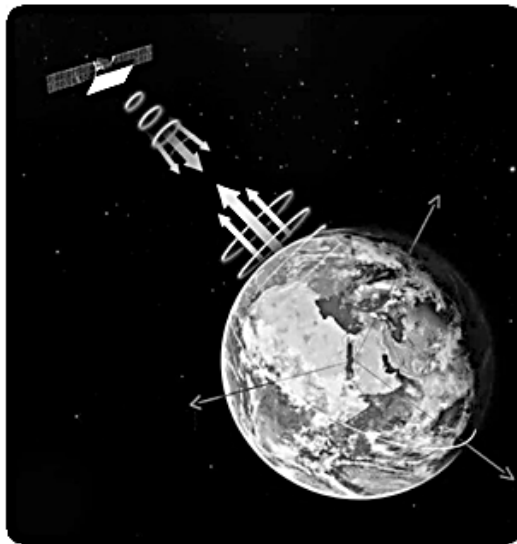
Partie II - Mesure du niveau des océans

Les altimètres radars dédiés à l'observation de la Terre utilisent des techniques radars dites actives dont le principe est illustré **figure 5** : le dispositif envoie lui-même une onde électromagnétique pour sonder son environnement et traite ensuite son écho pour analyser la surface ciblée.

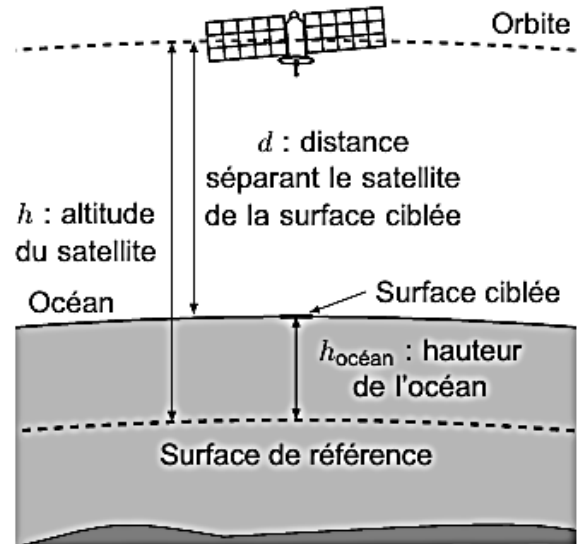
La mesure de la distance d entre le satellite et la surface ciblée permet de déterminer la hauteur du niveau des océans par rapport à une surface de référence (**figure 5b**). Cette surface correspond à une bonne approximation de la forme de la surface de la Terre. Ainsi, la hauteur du niveau de l'océan, ici notée $h_{\text{océan}}$, s'obtient en calculant la différence entre l'altitude h du satellite et la distance d séparant le satellite de la surface de l'océan :

$$h_{\text{océan}} = h - d. \quad (2)$$

L'altitude h du satellite, définie par rapport à la surface de référence, est connue grâce à un récepteur GPS avec une précision meilleure que le centimètre.



(a) Principe. Vue d'artiste. Crédit : CNES



(b) Le radar mesure la distance d le séparant de la surface ciblée

Figure 5 - Illustration du principe d'une mesure radar active

II.1 - Radar à impulsions

Le type de radar utilisé pour mesurer la distance entre le satellite et l'océan est un radar à impulsions. Son principe de fonctionnement repose sur l'envoi d'une impulsion et la détection de l'écho produit en retour par la surface ciblée. La mesure de la durée entre l'émission d'une impulsion et la réception de son écho permet de connaître la distance d séparant le satellite de la surface ciblée. On considère dans cette sous-partie que les ondes électromagnétiques se propagent à la vitesse c dont la valeur est rappelée en début d'énoncé.

II.1.1 - Onde sinusoïdale tronquée

Considérons tout d'abord le cas simple d'une impulsion de durée τ constituée d'un signal sinusoïdal tronqué de fréquence f_0 et d'amplitude réelle A_0 (figure 6) :

$$e(t) = A(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{avec} \quad A(t) = \begin{cases} A_0 & \text{pour } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3)$$

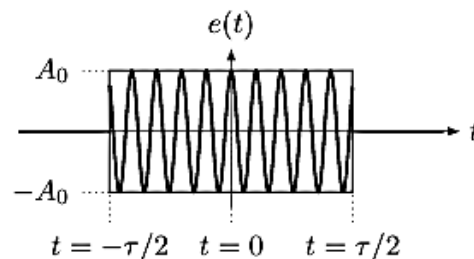


Figure 6 - Signal sinusoïdal tronqué émis par le radar sous la forme d'une impulsion de durée τ . L'échelle temporelle du signal sinusoïdal n'est pas respectée : on a en réalité $1/f_0 \ll \tau$

Comme représenté figure 7, le signal est amplifié avant son émission. L'écho qui revient vers le radar est une copie très atténuée du signal émis et retardée de la durée t_R de l'aller-retour. Le signal reçu est ensuite amplifié afin de pouvoir être traité. On note α le coefficient réel traduisant les différentes amplifications et atténuations des signaux. Dans la modélisation proposée, on ne tient pas compte

du bruit. Par ailleurs, on néglige la déformation des signaux due au phénomène de dispersion. Ainsi, on suppose que le signal reçu s'écrit :

$$u(t) = \alpha e(t - t_R).$$

Afin de pouvoir discriminer les différents échos provenant d'un même signal émis, on utilise un *filtre adapté*, qui calcule l'intercorrélation du signal reçu avec une réplique du signal émis (**figure 7**). On notera $s(t)$ la sortie de ce filtre correspondant au signal $u(t)$. Sa grandeur complexe associée $\underline{s}(t)$ se calcule grâce à l'expression :

$$\underline{s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{e}^*(\xi - t) \underline{u}(\xi) d\xi$$

où les grandeurs $\underline{e}$ et $\underline{u}$ représentent les grandeurs complexes associées respectivement aux signaux e et u et où $\underline{e}^*$ désigne la fonction complexe conjuguée de $\underline{e}$.

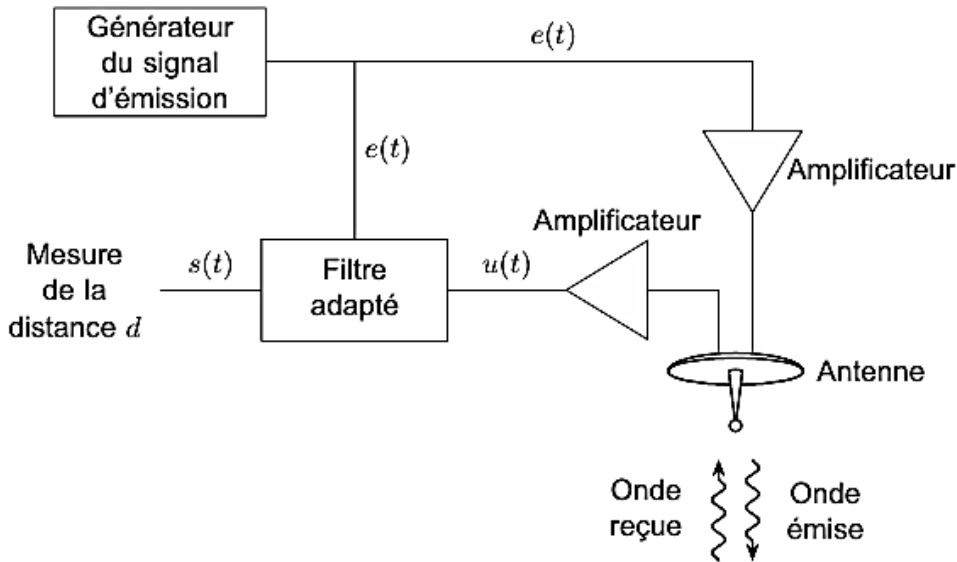


Figure 7 - Schéma simplifié de l'architecture de l'altimètre

Q14. Montrer que, pour le signal $u(t)$, la grandeur complexe $\underline{s}(t)$ associée à la sortie du filtre adapté peut se mettre sous la forme :

$$\underline{s}(t) = \alpha e^{2i\pi f_0(t-t_R)} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi - t) A(\xi - t_R) d\xi.$$

Q15. Représenter $A(\xi - t)$ et $A(\xi - t_R)$ en fonction de ξ dans le cas $t_R - \tau \leq t \leq t_R$. En déduire dans ce cas l'expression de $\underline{s}(t)$ en fonction de α , A_0 , f_0 , t_R , τ et de t .

En considérant les trois autres cas $t < t_R - \tau$, $t_R \leq t \leq t_R + \tau$ et $t > t_R + \tau$, on montre que la grandeur complexe $\underline{s}(t)$ peut s'écrire :

$$\underline{s}(t) = \alpha A_0^2 e^{2i\pi f_0(t-t_R)} \Lambda(t - t_R) \quad \text{avec} \quad \Lambda(t) = \begin{cases} t + \tau & \text{pour } -\tau \leq t \leq 0 \\ -t + \tau & \text{pour } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère maintenant un deuxième écho, arrivant après une durée $t'_R > t_R$, associé à la même impulsion émise mais dû à la présence d'une surface réfléchissante située à une distance $d' > d$. Les deux échos pourront être distingués l'un de l'autre si les maxima des enveloppes qui leur correspondent dans le signal en sortie du filtre adapté sont séparés d'un temps au moins égal à la durée τ d'une impulsion.

- Q16.** Représenter, sans souci d'échelle, les signaux réels $s(t)$ et $s'(t)$ associés aux signaux des deux échos reçus, en faisant apparaître les instants où chaque enveloppe atteint son maximum.
- Q17.** Pour les satellites Jason, la durée d'une impulsion est $\tau \simeq 1,10 \cdot 10^{-4}$ s. Déterminer numériquement le plus petit écart de distances $\Delta d_{\min}$ que permettrait de distinguer une impulsion telle que celle décrite par l'équation (3). Commenter.

Pour gagner en précision, une première idée pourrait être de réduire significativement la durée τ de l'impulsion. Cependant, le bruit du signal, négligé dans la modélisation proposée, serait en pratique trop grand devant le signal utile.

II.1.2 - Compression d'impulsion

On va décrire ici une méthode permettant d'envoyer une impulsion suffisamment longue afin de réceptionner un signal dont le rapport signal sur bruit est suffisant, tout en permettant de détecter de faibles variations de distances. Cette méthode, appelée *compression d'impulsion*, utilise un signal modulé en fréquence.

D'une manière générale, on peut écrire un signal modulé en fréquence sous la forme $e(t) = A \cos(\Psi(t))$ et définir sa *fréquence instantanée* $f_e(t)$ par la relation :

$$f_e(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Psi(t)}{dt}.$$

Dans le cas du radar à impulsion étudié, la modulation en fréquence se fait suivant une rampe, représentée **figure 8**. Le signal émis peut alors s'écrire, en notant τ la durée de l'impulsion et A_0 l'amplitude réelle du signal et en introduisant une constante K :

$$e(t) = A(t) \cos \left(2\pi \left(f_0 t + \frac{K}{2} t^2 \right) \right) \quad \text{avec} \quad A(t) = \begin{cases} A_0 & \text{pour } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4)$$

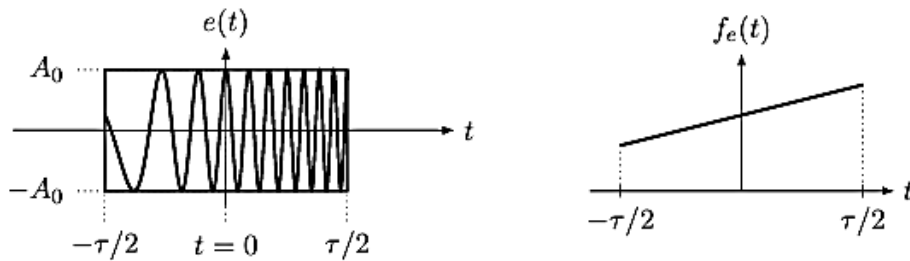


Figure 8 - Signal $e(t)$ émis par le radar. À gauche : évolution du signal en fonction du temps (échelle temporelle non respectée). À droite : tracé de la fréquence instantanée au cours du temps

- Q18.** Montrer que le signal décrit par l'équation (4) correspond bien à une fréquence variant linéairement avec le temps entre les instants $-\tau/2$ et $\tau/2$, en explicitant la fréquence centrale f_c et la largeur B de la bande de fréquences.

On montre que, dans le cas de ce signal, l'intercorrélation associée au signal reçu peut s'écrire approximativement :

$$\underline{s}(t) = \alpha A_0^2 \tau e^{2i\pi f_c(t-t_R)} \text{sinc}(\pi K \tau(t-t_R))$$

où $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ est la fonction sinus cardinal.

On considère que deux échos peuvent être distingués l'un de l'autre si le maximum du deuxième écho est séparé du maximum du premier écho d'une durée au moins égale au temps mis par le premier écho pour atteindre sa première annulation.

Q19. Exprimer le plus petit écart $\Delta d_{\min}$ de distances discernables pour un tel signal en fonction de c et de B . Faire l'application numérique pour le cas des satellites Jason, sachant que la bande de fréquences utilisée dans ceux-ci est de largeur 320 MHz. Commenter.

II.2 - Traversée de l'ionosphère

La mesure de la distance entre le satellite et la surface des océans doit être corrigée des variations d'indice de l'ionosphère, qui joue un rôle crucial dans la transmission des ondes électromagnétiques.

L'ionosphère est la partie de l'atmosphère terrestre située entre environ 80 km et 1 000 km d'altitude. Elle se caractérise par la présence d'un plasma fait de cations et d'électrons libres résultant de l'interaction entre le rayonnement solaire et les molécules de l'atmosphère. Pour simplifier, nous considérons que ce plasma est constitué d'électrons de masse m_e , de charge $-e$ et de densité particulière n d'une part et de cations de masse m_c , de charge $+e$ et de densité particulière n d'autre part. Jusqu'à la question Q29 incluse, on suppose n uniforme et constante.

On s'intéresse ici à la propagation d'une onde envoyée vers la surface d'un océan depuis un satellite situé à l'altitude $h \simeq 1\,366$ km. On définit un repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ dont l'origine coïncide avec le centre du satellite et dont l'axe Oz est vertical descendant. Dans l'ionosphère, on cherche l'onde électromagnétique, produite à la fois par l'émetteur du radar et par les particules chargées du plasma, sous la forme d'une pseudo onde plane progressive harmonique, décrite en un point $M(x, y, z)$ à l'instant t par le champ électrique complexe :

$$\vec{E}(M, t) = E_0 e^{i(\omega t - k(z - z_0))} \vec{e}_x$$

avec ω la pulsation de l'onde, E_0 l'amplitude réelle de l'onde à l'entrée dans l'ionosphère en $z = z_0$ et k le nombre d'onde, éventuellement complexe. Dans le plasma, les particules chargées ne sont soumises qu'à la force de Lorentz associée à l'onde électromagnétique. On considérera par ailleurs que la vitesse des particules ne comporte pas de partie thermique fluctuante. Enfin, on admettra que l'ordre de grandeur du rapport des amplitudes du champ magnétique et du champ électrique dans le plasma est similaire à celui dans le vide.

Q20. Identifier la direction de propagation éventuelle et la polarisation de l'onde.

Q21. Déterminer la condition pour laquelle la composante magnétique de la force de Lorentz exercée par l'onde sur les charges peut être négligée devant la composante électrique. On supposera cette condition respectée dans la suite du sujet.

Q22. En utilisant le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron puis à un cation, exprimer en notation complexe les vitesses $\vec{v}_e$ et $\vec{v}_c$ dont sont respectivement animés les électrons et les cations en régime sinusoïdal forcé, en fonction de e , ω , $\vec{E}(M, t)$ et de la masse m_e ou m_c de la particule considérée.

Q23. En utilisant le fait que la masse des cations est bien plus grande que celle des électrons, montrer à partir de la question précédente que la conductivité complexe $\underline{\gamma}(\omega)$ du plasma peut s'écrire de façon approchée :

$$\underline{\gamma}(\omega) = -i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$$

où la grandeur ω_p , appelée *pulsation plasma*, est à exprimer en fonction de n , e , ε_0 et de m_e .

Q24. Le plasma est localement neutre avant le passage de l'onde. Expliquer quelle caractéristique de l'onde électromagnétique permet d'écrire que la densité volumique de charge ρ reste nulle même en présence de l'onde.

Q25. Écrire les équations de Maxwell dans le plasma sous forme complexe. Montrer que la relation de dispersion peut s'écrire :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}. \quad (5)$$

On suppose la pulsation ω telle que $\omega < \omega_p$.

Q26. Donner l'expression de k en fonction de ω , ω_p et de c , en justifiant soigneusement le choix de la solution de l'équation 5. Établir les expressions des champs réels $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$, en faisant apparaître une distance caractéristique δ dont on donnera l'expression en fonction de ω , ω_p et de c . Indiquer le nom donné à ce type d'onde.

Q27. Déterminer la moyenne du vecteur de Poynting de cette onde. Commenter.

On suppose désormais la pulsation ω telle que $\omega > \omega_p$.

Q28. Établir les expressions des champs réels $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ en fonction notamment de k dont on donnera l'expression, en justifiant soigneusement le choix de la solution de l'équation 5. Préciser quelle est la nature de l'onde.

Q29. En déduire que le plasma se comporte comme un filtre pour la propagation des ondes électromagnétiques, en précisant sa nature et l'expression littérale de sa pulsation de coupure.

Q30. Le profil de la densité particulaire, qui dépend de l'alternance des jours et des nuits, est représenté **figure 9**. En déduire le domaine de fréquences que l'on doit choisir pour que l'onde puisse atteindre la surface de l'océan. Commenter le choix de la bande de fréquences utilisée par les satellites Jason, sachant que celle-ci est caractérisée par une fréquence centrale $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \simeq 13,6 \text{ GHz}$ et par une largeur $B = 320 \text{ MHz}$.

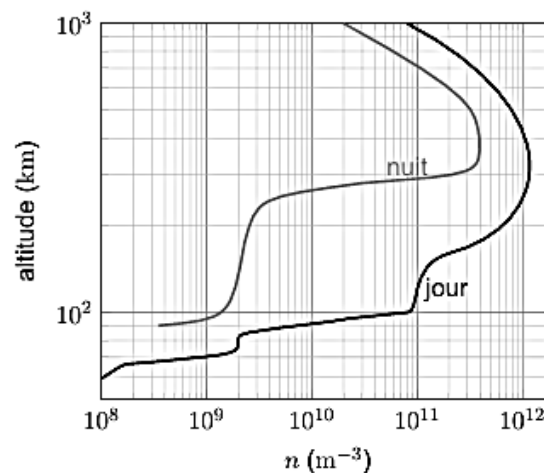


Figure 9 - Densité particulaire n de l'ionosphère en fonction de l'altitude. Crédit : J. V. Evans and T. Hagfors, *Radar Astronomy*, 1968. McGraw-Hill Education

Q31. Exprimer la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g en fonction de ω , ω_p et de c . Représenter v_φ/c et v_g/c en fonction de ω .

Q32. Indiquer si l'ionosphère est dispersive pour les ondes électromagnétiques. Justifier.

Du fait de la présence de l'ionosphère, il est nécessaire d'apporter une correction au calcul de la distance entre le satellite et la surface de l'océan. Les satellites altimétriques utilisent une deuxième impulsion, de fréquence centrale $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \simeq 5,3 \text{ GHz}$, en parallèle de la première impulsion de fréquence centrale $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \simeq 13,6 \text{ GHz}$. Pour la suite de l'énoncé, on considère l'ionosphère comme une couche d'épaisseur $\ell = 500 \text{ km}$ et de densité d'électrons uniforme $n = 5 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-3}$. La partie de l'atmosphère qui n'est pas l'ionosphère est assimilée au vide.

Q33. Les deux impulsions, associées aux fréquences centrales f_0 et f_1 , sont émises par le satellite à l'instant $t = 0$ et leurs échos sont détectés respectivement aux instants t_0 et t_1 . Déterminer une expression approchée du décalage temporel $\Delta t = t_1 - t_0$ en fonction de ℓ , c , ω_p , ω_0 et de ω_1 . On pourra utiliser le développement limité en 0 : $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x$ à l'ordre 1 en x .

Q34. En déduire que la distance d entre le satellite et la surface de l'océan peut s'écrire approximativement :

$$d \simeq \frac{ct_0}{2} - \varepsilon$$

où ε est un terme correctif, appelé *correction ionosphérique*, que l'on exprimera en fonction de c , Δt , ω_0 et de ω_1 .

Q35. Déterminer, en fonction de ℓ , n , e , ε_0 , m_e et de ω_0 , l'erreur que l'on commettrait sur la mesure, faite à partir de l'impulsion de fréquence centrale f_0 , si l'on considérait la vitesse de groupe égale à c . Faire l'application numérique et commenter la valeur obtenue.

Problème 2 : Résolution interférométrique d'un doublet spectral

Les moyens spectroscopiques conventionnels (spectroscopie à prisme ou à réseau) peuvent se révéler insuffisants quand il s'agit de résoudre un doublet à très faible écart spectral. On peut alors avoir recours à des méthodes interférométriques. Il est question dans cette partie de l'utilisation de l'interféromètre de Michelson.

Le schéma 1 de principe d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air est donné page 20. On note Ox et Oy deux axes perpendiculaires définissant les directions des deux bras de l'interféromètre. S est une source lumineuse ponctuelle située sur Ox . M_1 et M_2 sont deux miroirs plans parfaitement réfléchissants, disposés perpendiculairement à Ox en H_1 et respectivement à Oy en H_2 . Le trait incliné à 45° , noté L_s , schématise un groupe de deux lames semi-réfléchissantes à faces parallèles. Ce groupe est supposé n'introduire aucune différence de marche sur les trajets lumineux. L_p désigne une lentille mince convergente placée à la sortie de l'interféromètre de manière à ce que son axe optique soit confondu avec l'axe Oy . Un écran E est placé dans le plan focal image de L_p . On note C le foyer image de L_p .

- Q1.** Nommer les lames qui composent L_s . Qu'est-ce qui les distingue ? Expliquer la nécessité pratique d'utiliser deux lames.
- Q2.** Un rayon lumineux, noté (r) , émis par S , a été représenté. Reproduire le schéma ci-dessous sur la copie avec $SO = OH_1 = 2 OH_2$ et le compléter en faisant un tracé soigné des deux rayons (r_1) et (r_2) qui émergent de l'interféromètre après division de (r) . On laissera apparent tout élément de construction (traits, prolongements de rayons, points remarquables, etc.) justifiant d'un tracé raisonné sans utilisation d'aucun rapporteur d'angle. Tout élément explicatif (noms, positions des points, constructions réalisées...) sera également mentionné.

Sur ce même schéma positionner le miroir fictif M'_1 justifiant de la dénomination « lame d'air » en faisant apparaître le point Q_1 intersection de M'_1 avec les deux prolongements fictifs ad hoc de (r_1) et de (r_2) .

Enfin, terminer le tracé des rayons (r_1) et (r_2) après la lentille L_p jusqu'à l'écran E (on demande comme ci-dessus un tracé raisonné).

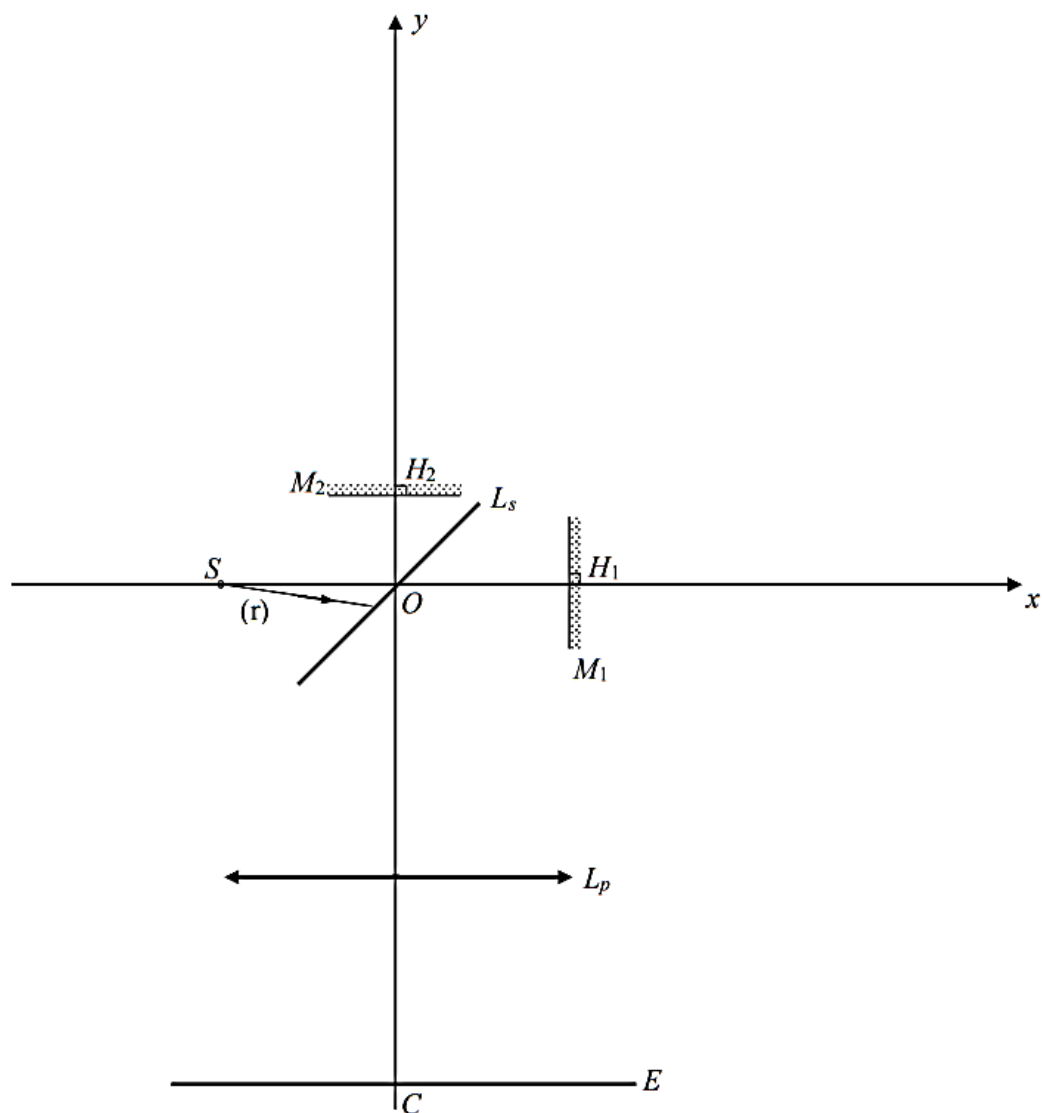


Schéma 1 – Interféromètre de Michelson

- Q3.** Indiquer quelle est la forme des franges d'interférences observées sur l'écran (aucune justification n'est demandée). Comment nomme-t-on ces franges ?
- Q4.** En appelant e l'épaisseur de la lame d'air et en prenant l'indice optique de l'air égal à 1, exprimer la différence de marche δ au centre C de l'écran.
- Q5.** On étudie le cas où la source de lumière utilisée présente un doublet spectral de nombres d'ondes σ_1 et σ_2 . Donner l'expression des ordres d'interférence p_1 et p_2 en C pour chaque radiation du doublet en fonction de δ , σ_1 et σ_2 .
- Q6.** Pour quelles valeurs de la différence $p_1 - p_2$ y-a-t-il brouillage en C ?
En pratique la totalité de la figure d'interférences est affectée et on perd la visibilité des franges partout sur l'écran. En déduire, en fonction de l'écart spectral $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$, la variation D_δ de la différence de marche entre deux situations consécutives de brouillage. Comment nomme-t-on ces situations ?

Application numérique : dans le cas du doublet H_α (écart spectral $\Delta\sigma_{\text{exp}} = 0,360 \text{ cm}^{-1}$), calculer la variation D_e de l'épaisseur de la lame d'air pour passer d'une situation de brouillage à la situation de brouillage directement consécutive.

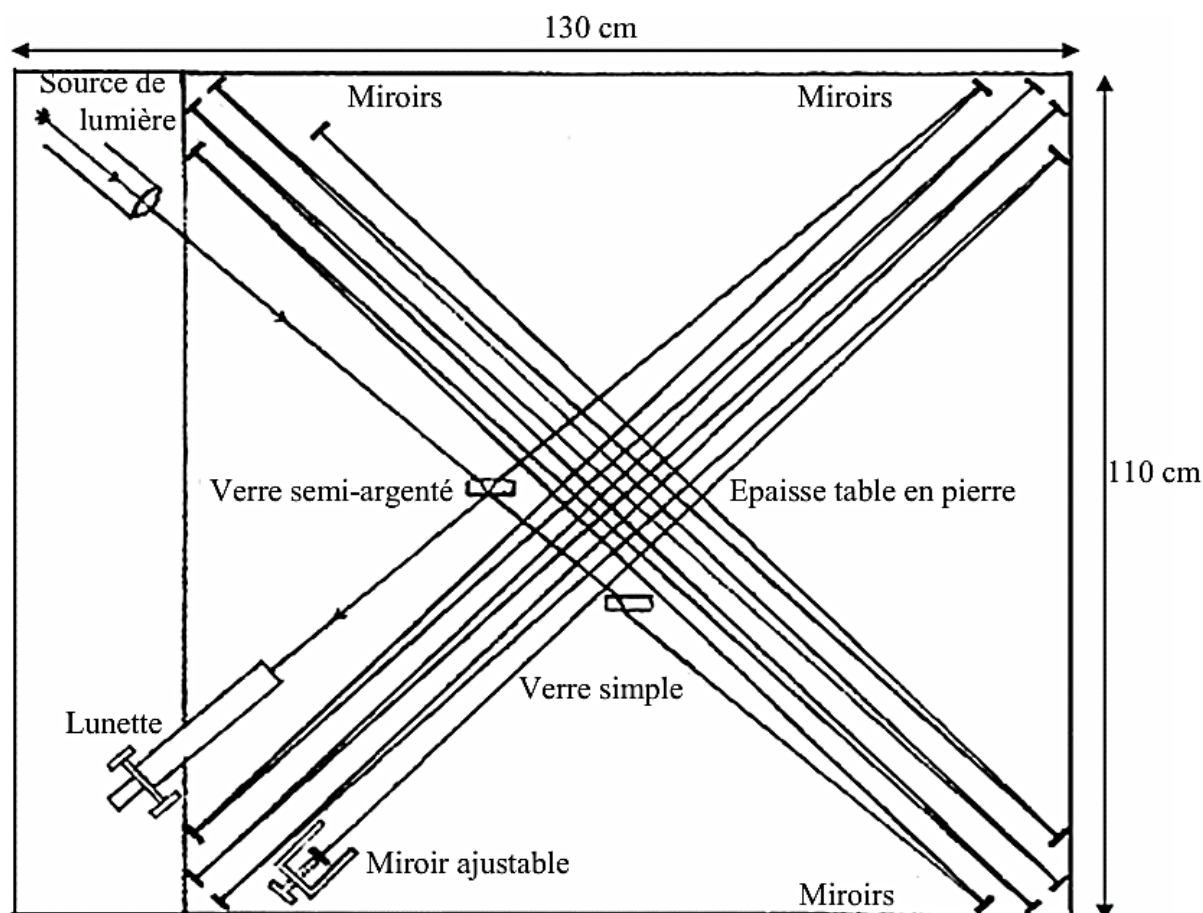


Figure 3 – Schéma des trajets lumineux dans l'interféromètre de Michelson et Morley de 1887
(source : http://ondes-relativite.info/DominiqueCabala/chap4_histo.htm)

Q7. À l'entrée de leur interféromètre historique de 1887, Michelson et Morley ont utilisé un dispositif à prismes muni d'une fente pour sélectionner la raie H_α présente dans le spectre solaire. Ils ont observé des brouillages périodiques lors de la translation du miroir mobile de leur interféromètre. Partant du contact optique (bras de longueurs rigoureusement égales à L_0), ils ont compté un total de 6 brouillages de part et d'autre du contact optique (3 de chaque côté) pour un déplacement du miroir égal à $1/160^\circ$ de la longueur L_0 .
Calculer la valeur de L_0 pour l'interféromètre de Michelson de 1887.

Q8. L'interféromètre, construit dans un sous-sol du campus de l'Université de Cleveland aux Etats-Unis, était monté sur une table en granite rectangulaire posée sur un cylindre de bois flottant dans du mercure.
La table faisait environ $130\text{ cm} \times 110\text{ cm}$ de cotés. La longueur L_0 des bras de l'interféromètre était synthétisée grâce à deux groupes de miroirs permettant plusieurs allers-retours du faisceau sur chaque voie, comme représenté sur la **figure 3** (page 9).

À partir de la **figure 3** (page 9), donner, en expliquant votre calcul, une estimation grossière de la longueur d'un bras de l'interféromètre. L'ordre de grandeur obtenu est-il en accord avec la valeur L_0 trouvée à la question **Q28** ?

Problème 3 : Ostéodensitométrie

Au cours de leur formation, ainsi que lors des vols qu'ils effectuent, les spationautes subissent différents examens médicaux.

En impesanteur et pour des raisons non encore élucidées, les os se déminéralisent, c'est-à-dire qu'ils perdent de la masse et deviennent plus fragiles, un peu comme les os des personnes âgées.

Pour surveiller cette perte de masse, on réalise des ostéodensitométries.

Il s'agit d'examens non invasifs qui consistent à réaliser deux radiographies pour deux longueurs d'onde de rayons X différentes.

Nous étudions la propagation d'une onde dans un os assimilé à un conducteur ohmique et nous verrons comment appliquer ces résultats à l'ostéodensitométrie.

Dans toute cette partie, le nombre complexe de partie imaginaire positive dont le carré est -1 sera noté i ($i^2 = -1$).

Données :

Constantes fondamentales

Constante de gravitation : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

Permittivité électrique du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

Constante de Planck : $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Charge de l'électron : $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Grandeurs physiques utiles

Rayon de la Terre : $R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$

Masse de la Terre : $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Vitesse de rotation propre de la Terre : $\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Rayon intérieur d'un axone : $a = 5,0 \text{ } \mu\text{m}$

Épaisseur de la membrane de l'axone : $b = 7,0 \text{ nm}$

Permittivité relative de la membrane : $\epsilon_r = 8,0$

Analyse vectorielle

Formule du double produit vectoriel : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{A}) - \Delta\vec{A}$

Gradient en coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$

B) Propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur ohmique, épaisseur de peau

On considère un conducteur ohmique dans lequel se propage une onde électromagnétique. Ce conducteur ohmique est localement neutre (sa charge volumique ρ est nulle), mais il est parcouru par des courants de densité volumique $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (loi d'Ohm), où σ est la conductivité électrique du matériau.

Q35. Écrire les équations de Maxwell dans le conducteur ohmique.

On va travailler en régime lentement variable (aussi appelé ARQS). Quel terme des équations de Maxwell est alors négligé dans le conducteur ohmique ?

Q36. En déduire l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique dans le conducteur ohmique. Préciser le nom de ce type d'équation.

Q37. On considère une onde électromagnétique sinusoïdale dont le champ électrique s'écrit : $\vec{E}(x, t) = E_0 \exp(i(\omega t - \underline{k}x)) \vec{u}_z$, avec un vecteur d'onde $\underline{k}$ complexe.

Déterminer l'expression de $\underline{k}^2$ en fonction de la pulsation ω notamment.

Déterminer k_1 la partie réelle de $\underline{k}$ et k_2 sa partie imaginaire, sachant que k_1 est positive.

Introduire l'épaisseur de peau δ et donner son expression en fonction de la pulsation notamment.

Q38. Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$ en fonction des champs électrique et magnétique. Donner la signification physique de sa moyenne $\vec{R}_m(x) = \langle \vec{R}(x, t) \rangle$.

On ne demande pas de la calculer.

C) Application à l'ostéodensitométrie

On note P_0 la puissance entrant dans le conducteur ohmique en $x = 0$ et P_L la puissance transmise par le conducteur ohmique de longueur L .

On peut montrer que $\ln\left(\frac{P_0}{P_L}\right) = \frac{2L}{\delta}$, où δ est l'épaisseur de peau vue à la question **Q37**.

Dans les os, l'épaisseur de peau δ dépend de la longueur d'onde λ et de la densité osseuse d .

Pour le rayonnement d'énergie $\mathcal{E}_1 = 40$ keV, $\delta_1 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{d}}$ et pour le rayonnement d'énergie

$\mathcal{E}_2 = 70$ keV, $\delta_2 = \frac{\alpha_2}{\sqrt{d}}$, où α_1 et α_2 sont des constantes connues des radiologues.

On travaille avec un os dont l'épaisseur traversée par le rayonnement, déterminée par un autre moyen, est notée L .

Q39. La puissance incidente P_0 est la même pour les deux longueurs d'onde, mais elle est inconnue. On mesure la puissance qui traverse l'os P_{Li} , avec $i = 1$ ou 2 .

Proposer une méthode permettant de déterminer la densité osseuse d à partir des mesures de P_{L1} , P_{L2} , ainsi que de α_1 , α_2 et L déterminées par d'autres moyens.

- FIN DE L'ENONCE -