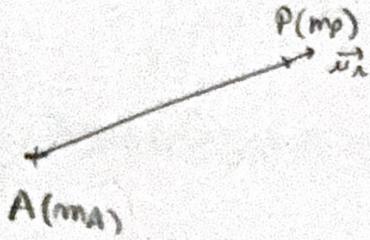


I. lois de Kepler et l'ua

I.A. Mvt d'une planète sous l'ac d'un astre attracteur



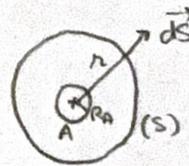
1) $m_A \gg m_P$

$$\vec{F}_{A \rightarrow P} = -\gamma \frac{m_A m_P}{r^3} \vec{r}$$

2) L'express. reste inchangée si $R_A < r$
 répartition de masse à sym. sphérique dans A

d'ap. th. de Gauss adapté à la gravitat.

$$\oiint_S \vec{A}(M) \cdot d\vec{S} = -4\pi\gamma M_{int}$$



$\vec{A}(M) = A(r)\vec{u}_r$ d'ap. sym. et invariances de la dist. de masses.
 $M_{int} = m_A$

$$\Rightarrow \vec{A}(M) = \frac{-4\pi\gamma m_A}{4\pi r^2} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{F}_{A \rightarrow P} = m_P \times \vec{A}(M)$$

3) L'express. reste inchangée si $R_P < r$
 répartition de masse à sym. sphérique dans P

d'ap. $P \perp$ des ac. réciproques

4). $\{P(m_P)\}$ ds R_0 galiléen

Def $\vec{L}_{A \rightarrow P}$

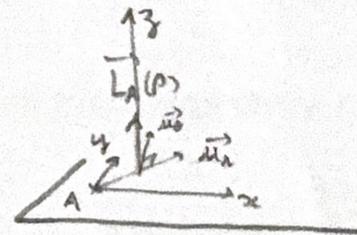
TMC/A fixe ds R_0 : $\frac{d\vec{L}_A(P)}{dt} = \mathcal{M}_A(\vec{F}_{A \rightarrow P}) = \vec{AP} \wedge \vec{F}_{A \rightarrow P} = \vec{0}$
 ↳ force centrale

$$\Rightarrow \vec{L}_A(P) = \vec{AP} \wedge m_P \vec{v}_P = m \vec{C} \quad \text{↳ vect. cst} \quad \rightarrow \quad C = \frac{\|\vec{L}_A(P)\|}{m}$$

P a un mvt plan dans le plan contenant A et \perp à $\vec{L}_A(P)$

on a $\vec{L}_A(P) = r \vec{u}_r \wedge m_P (r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r\dot{r} \vec{u}_r) = m_P r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$

$$\boxed{C = r^2 \dot{\theta}}$$



5). $\frac{d\vec{u}'}{d\theta} = \frac{d\vec{u}'}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = \vec{a}' \cdot \frac{1}{\dot{\theta}} = \frac{\vec{F}_{A \rightarrow P}}{m_P} \cdot \frac{r^2}{C} = -\gamma \frac{m_A}{r^2} \vec{u}_r \cdot \frac{r^2}{C} = -\gamma \frac{m_A}{C} \vec{u}_r$

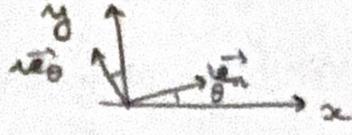
or $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r$

d'où $\vec{v}'(\theta) = \gamma \frac{m_A}{C} \vec{u}_\theta + \vec{v}'_0 = C \frac{\vec{u}_\theta + \vec{e}}{p}$

on peut poser $\frac{C}{p} = \gamma \frac{m_A}{C} \Rightarrow \boxed{p = \frac{C^2}{\gamma m_A}}$

on a $\|\vec{e}\| = \|\vec{u}_\theta + \vec{u}_r\| = 1 \quad ; \quad \|\vec{u}_\theta\| = \left[\frac{C}{p} \|\vec{e}\| \right] = \left[\frac{\gamma m_A}{C} \|\vec{e}\| \right] \Rightarrow \|\vec{e}\| = \frac{\gamma m_A \cdot C}{C^2} = 1$

$\vec{v}'(\theta)$ et \vec{u}_θ dans (Axy) $\Rightarrow \boxed{\vec{e} = \frac{p}{C} \vec{v}'(\theta) - \vec{u}_\theta}$ dans Axy

$\vec{e}' = e \vec{u}_y, e \geq 0$ avec $\vec{u}_y = \cos\theta \vec{u}_\theta + \sin\theta \vec{u}_r$ 

6) On a $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta = \frac{C}{\rho} \vec{u}_\theta + \frac{C}{\rho} e \vec{u}_y = \frac{C}{\rho} (1 + e \cos\theta) \vec{u}_\theta + \frac{C}{\rho} e \sin\theta \vec{u}_r$

d'où $\begin{cases} \dot{r} = \frac{C}{\rho} e \sin\theta \\ r\dot{\theta} = \frac{C}{\rho} (1 + e \cos\theta) \end{cases}$

on a $r\dot{\theta} = r \cdot \frac{C}{r^2} = \frac{C}{r} (1 + e \cos\theta)$

(*) $\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos\theta}{\rho}$

(*) $r = \frac{\rho}{1 + e \cos\theta}$ $\begin{matrix} r \geq 0 \\ \rho \geq 0 \\ e \geq 0 \end{matrix}$

si $e < 1$ $e \cos\theta \leq e < 1 \Rightarrow 1 + e \cos\theta < 2 \Rightarrow r > \frac{\rho}{2}$

$e \cos\theta \geq -e > -1 \Rightarrow 1 + e \cos\theta \geq 1 - e > 0 \Rightarrow r \leq \frac{\rho}{1 - e}$

si $e \geq 1$ $\exists \theta$ tq $1 + e \cos\theta = 0 \Rightarrow r$ peut tendre $\rightarrow +\infty$
 mvt non borné

r_{max} fini
 puisque dénom. ne peut pas s'annuler

si $e = 1$ traj. parabolique
 si $e > 1$ traj. = branche d'hyperbole

I.B. Période du mvt.

7). On a $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ (*) $d\theta = \frac{C}{r^2} dt \Rightarrow dt = \frac{r^2}{C} d\theta$

le syst. P décrit un tour en une période
 $\hookrightarrow \theta$ varie de 0 à 2π $\hookrightarrow t$ varie de 0 à T

$\rightarrow \int_0^T dt = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\rho^2}{C (1 + e \cos\theta)^2} d\theta$

(*) $T = \frac{\rho^2}{C} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos\theta)^2} = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho \gamma m_A}} \mathcal{I}$
 avec $C^2 = \rho \gamma m_A$

d'où $T = \frac{\rho^{3/2}}{\sqrt{\gamma m_A}} \cdot \mathcal{I}$

8) si $e = 0$ alors $\forall \theta, r(\theta) = \rho = \text{cte} \rightarrow$ traj. circulaire

$T = \frac{\rho^{3/2}}{\sqrt{\gamma m_A}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1} = \frac{r^{3/2}}{\sqrt{\gamma m_A}} \cdot 2\pi$

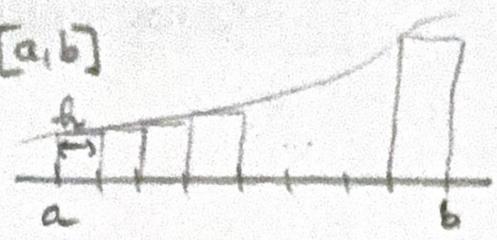
3^e loi de Kepler $\left| \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma m_A} \right.$

pour toute planète du syst. solaire, le rapport du carré de sa période par le cube de son $r^{3/2}$ est une cste i.e que ce rapport est indpt de la planète considérée.

9) pour ϵ fixé, on peut calculer I par la méthode des rectangles à gauche

on subdivise l'intervalle $[a, b] = [0, 2\pi]$

on introduit $\left\{ \begin{array}{l} N \text{ nb de subdivisions de } [a, b] \\ h = \frac{b-a}{N} \text{ pas} \\ a + Nh = b \end{array} \right.$



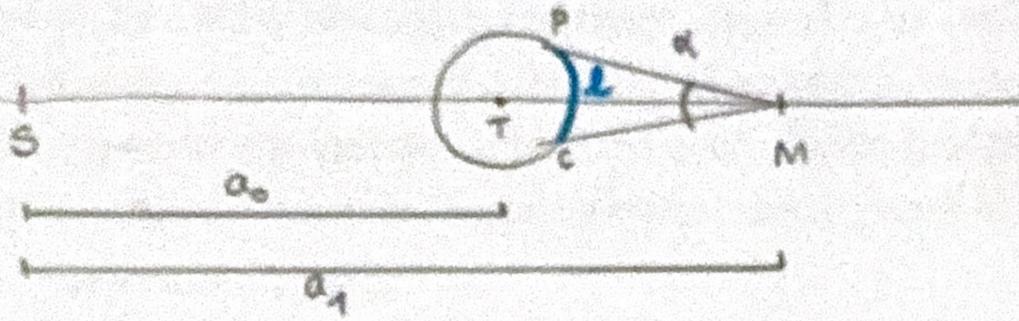
on approxime $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \sum_{i=0}^{N-1} h \times f(a + ih)$ avec $f(x) = \frac{1}{(1 + e \cos x)^2}$

```
→ import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def f(x):
    return (1 / (1 + e * np.cos(x)) ** 2)
def rectg(f, a, b, N):
    h = (b - a) / N
    int = 0
    for i in range(N):
        int += h * f(a + i * h)
    return int
E = np.linspace(0, 0.5, 10)
I = [0 for k in range(len(E))]
for k in range(len(E)):
    e = E[k]
    I[k] = rectg(f, 0, 2 * np.pi, 100)
plt.plot(E, I, 'o-')
plt.show()
```

(ou) importation supplémentaire de scipy.integrate as sci et on utilise la f^o quad de ce module au lieu de la méth. des rectangles.

```
for k in range(len(E)):
    e = E[k]
    I[k] = sci.quad(f, 0, 2 * np.pi)[0]
```

10)



$$11) R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} \ll a_0, a_1, a_1 - a_0.$$

$$\hookrightarrow l \approx (a_1 - a_0) \cdot \alpha.$$

$$\Leftrightarrow a_1 \approx a_0 + \frac{l}{\alpha}$$

$$\text{or } \frac{T_0^2}{a_0^3} = \frac{T_1^2}{a_1^3}$$

$$\Rightarrow \frac{T_0^2}{a_0^3} = \frac{T_1^2}{\left(a_0 + \frac{l}{\alpha}\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow T_0^{2/3} \left(a_0 + \frac{l}{\alpha}\right) = T_1^{2/3} a_0$$

$$\Leftrightarrow a_0 \left(T_1^{2/3} - T_0^{2/3}\right) = T_0^{2/3} \frac{l}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \left[a_0 = \frac{T_0^{2/3}}{T_1^{2/3} - T_0^{2/3}} \cdot \frac{l}{\alpha} = \frac{l}{\alpha \left(\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{2/3} - 1 \right)} \right]$$

$$12) \text{ or } \alpha = 14'' = 14 \times 4,85 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

$$a_0 = \frac{7070}{14 \times 4,85 \cdot 10^{-6} \left(\left(\frac{687}{365}\right)^{2/3} - 1 \right)} \approx \frac{7 \cdot 10^3}{\frac{14}{2} \times 5 \cdot 10^{-6} (1,6 - 1)}$$

$$\left[a_0 = \frac{1}{0,6} \cdot 10^8 = 1,7 \cdot 10^8 \text{ km. } \text{or } \text{or avec } 1 \text{ ua} = 150 \cdot 10^6 \text{ km.} \right]$$