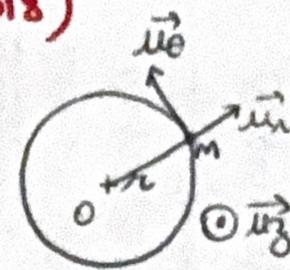


Atome la simple de l'univers (d'ap. CCINP physique MP 2018)

Q1) $\vec{F}_e = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$



Q2) syst {e-} étudié ds réf lié au proton supposé galiléen

Bdf: \vec{F}_e ; \vec{P} et \vec{F}_g négligeables

PA: $m_e \vec{a} = \vec{F}_e$

électron décrit un cercle de centre O de rayon r

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{OM} &= r \vec{u}_r \\ \vec{v} &= r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \vec{a} &= r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r \end{aligned}$$

selon $\vec{u}_r \rightarrow +m_e r \dot{\theta}^2 = \frac{+e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$v^2 = r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r} \Rightarrow v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}}$$

Q3). $E_p = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

$$E_c = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} m_e \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r} = \frac{1}{2} \cdot (-E_p)$$

Q4). $L = \|\vec{L}_O(m)\| = \|\vec{OM} \wedge m_e \vec{v}\| = \|r \vec{u}_r \wedge m_e v \vec{u}_\theta\| = r m_e v$

$$\Rightarrow L = e \cdot \sqrt{\frac{r m_e}{4\pi\epsilon_0}}$$

Q5). $L = n \hbar \Rightarrow e \sqrt{\frac{r_n m_e}{4\pi\epsilon_0}} = n \hbar \Leftrightarrow r_n = \frac{4\pi\epsilon_0}{m_e} \cdot \frac{n^2 \hbar^2}{e^2}$

$\Leftrightarrow r_n = n^2 \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$ d'où $a_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$

Q6). $E_n = E_c + E_p = -\frac{E_p}{2} + E_p = \frac{E_p}{2} = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} < 0$ Ok pour état circulaire \Rightarrow lié.

$$\Leftrightarrow E_n = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{m_e e^2}{n^2 \cdot 4\pi\epsilon_0 \hbar^2} = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} \text{ d'où } R_y = \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2}$$

Ok avec données

Q7). $a_B = r_1 =$ rayon de l'orbite la plus proche du proton \rightarrow rayon associé à l'état fondamental. \rightarrow ordre de la taille de l'atome d'H.

AN: $a_B = 5,292 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 52,92 \text{ pm}$
Ok avec donnée

$R_y = 2,180 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 13,63 \text{ eV}$
Ok avec donnée.

Q8). $E_n = \frac{E_p}{2} = -E_c = -\frac{1}{2} m_e v_n^2 = -\frac{R_y}{n^2} \Leftrightarrow v_n = \sqrt{\frac{2 R_y}{m_e n^2}} = \sqrt{\frac{2 R_y}{m_e}} \cdot \frac{1}{n}$

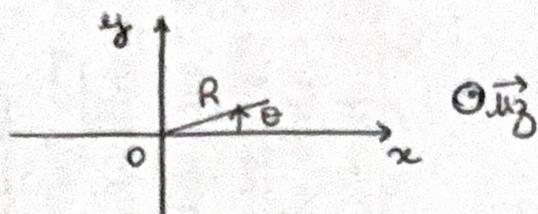
AN: $v_1 = \sqrt{\frac{2 R_y}{m_e}} = 2,188 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx \frac{c}{100} \rightarrow$ mv't de l'e- sur cette orbite non relativiste et c'est aussi le cas pour les autres orbites puisque $v_n \leq v_1$.

Q9). on réinjecte $\psi(\vec{r}, t) = K(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar}$ ds l'éq^e de Schrödinger

$$\rightarrow i\hbar \cdot (-i \frac{E}{\hbar}) K(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} (\Delta K(\vec{r})) \cdot e^{-iEt/\hbar} + E_p(\vec{r}) \cdot K(\vec{r}) \cdot e^{-iEt/\hbar}$$

$$\Leftrightarrow \left| \Delta K(\vec{r}) + \frac{2m_e}{\hbar^2} (E - E_p(\vec{r})) K(\vec{r}) = 0 \right.$$

Q10)



$$\underline{E_p = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 R}}$$

Q11) $E_p = 2E \rightarrow$ confirme résultat Q6)

ici $k(\vec{r}) = k(\theta) \rightarrow \Delta k = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 k}{d\theta^2}$ d'ap. formulaire

et ici $r^2 = R^2$.

\rightarrow l'éq^e devient: $\frac{1}{R^2} \frac{d^2 k}{d\theta^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2} \underbrace{(E - 2E)}_{-E} k = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m_e R^2} \frac{d^2 k}{d\theta^2} = E k(\theta).$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 k}{d\theta^2} - \frac{2m_e R^2 E}{\hbar^2} k = 0$$

éq^e caract. : $\kappa^2 = \frac{2m_e R^2 E}{\hbar^2} = \frac{2m_e R^2}{\hbar^2} \cdot \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 R}$
d'ap Q6

$$\kappa^2 = -\frac{m_e R e^2}{4\hbar^2 \pi \epsilon_0} = -\eta^2$$

$\Leftrightarrow \kappa = \pm i\eta$ avec $\eta = \sqrt{\frac{m_e R}{4\pi\epsilon_0}} \cdot \frac{e}{\hbar}$

d'où $k(\theta) = A e^{i\eta\theta} + B e^{-i\eta\theta}$ avec (A, B) const.

Q12). $k(\theta + 2\pi) = k(\theta) \Rightarrow A e^{i\eta\theta} e^{i\eta 2\pi} + B e^{-i\eta\theta} e^{-i\eta 2\pi} = A e^{i\eta\theta} + B e^{-i\eta\theta}$

$\rightarrow \eta = m$, avec $m \in \mathbb{Z}$

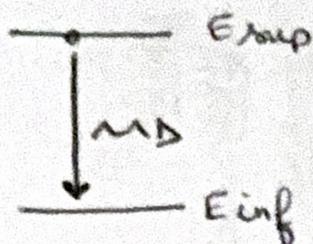
$$\Rightarrow \eta^2 = m^2 \quad \Leftrightarrow \frac{m_e R_m}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{\hbar^2} = m^2$$

$$\Leftrightarrow \left| R_m = m^2 \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = m^2 \cdot a_B \right.$$

\rightarrow on retrouve le résultat du modèle de Bohr pour les rayons des orbites accessibles.

\Rightarrow idem pour l'énergie $\left| E_m = \frac{E_p}{2} = -\frac{R_y}{m^2} \right.$

Q13).



$E_{sup} - E_{inf} = E_{\gamma}$ = par conservation de l'énergie

avec $\begin{cases} E_m = E_{sup} = -\frac{R_H}{n^2} & \text{et} & E_{m'} = E_{inf} = -\frac{R_H}{m'^2} \\ E_{\gamma} = h\nu_{mn'} = h\frac{c}{\lambda_{mn'}} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{hc}{\lambda_{mn'}} = R_H \left(\frac{1}{m'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$

$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_{mn'}} = \frac{R_H}{hc} \left(\frac{1}{m'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ d'où $R_H = \frac{R_H}{hc}$

Q14). série de Balmer $m' = 2 \rightarrow \lambda_{n2} = \left[\frac{R_H}{hc} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) \right]^{-1}$

| | H α | H β | H γ | H δ |
|--------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| λ_{Ritz} (nm) | 656,1 | 486,0 | 433,9 | 410,1 |
| λ_{exp} (nm) | 656,3 ± 0,3 | 486,1 ± 0,2 | 434,0 ± 0,2 | 410,2 ± 0,2 |

↓
[656 ; 656,6]

↓
 $\lambda_{Ritz} \in$ intervalle
de λ_{exp}

idem pour les 3 autres raies \rightarrow théorie cohérente

Q15). Q8: $v_1 = \sqrt{\frac{2Ry}{m_e}} = \sqrt{\frac{2}{m_e} \cdot \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \Rightarrow v_1 = \alpha \cdot c$
 $(\Rightarrow) \boxed{\alpha = \frac{v_1}{c}}$

$[v_1] = [c] = [\text{vitesse}] \Rightarrow \alpha$ est adimensionné

Q16) $\alpha = 7,298 \cdot 10^{-3}$

et $\frac{1}{\alpha} = 137,0$

Q17). $E_{n,l} = -\frac{Ry}{n^2} \left(1 + \alpha^2 \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{l+1} - \frac{3}{4} \right) \right)$, $l \in [n-1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$

on a $1 \leq \frac{n}{l+1} \leq n$

$\frac{1}{4n^2} \leq \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{l+1} - \frac{3}{4} \right) \leq \frac{1}{n} - \frac{3}{4n^2}$

pour $n=1$: $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{l+1} - \frac{3}{4} \right) \leq \frac{1}{4}$

pour $n=3$: $\frac{1}{36} \leq \dots \leq \frac{1}{14}$

pour $n \rightarrow +\infty$: $0 \leq \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{l+1} - \frac{3}{4} \right) \leq 0$

pour $n=2$: $\frac{1}{16} \leq \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{l+1} - \frac{3}{4} \right) \leq \frac{5}{16} \approx 0,31$

pour $n=4$: $\frac{1}{64} \leq \dots \leq \frac{13}{64} \approx 0,20$

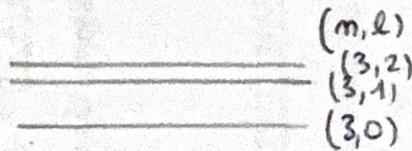
CCL: $0 \leq \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{l+1} - \frac{3}{4} \right) \leq 1$

ainsi E_n déduit du modèle de Bohr consiste en une approximation de l'énergie de Sommerfeld à l'ordre 1 en $\alpha \approx 7 \cdot 10^{-3} \ll 1$.

Pour $n=2$ il y a $l=0$ ou $1 \rightarrow$ 2 sous-niveaux d'énergie (sous-couches 2s et 2p)

$n=3$ il y a $l=0$ ou 1 ou $2 \rightarrow$ 3 sous-niveaux d'énergie (sous-couches 3s, 3p et 3d).

Q18) fig 2: dégénérescence du niveau $n=3$



d'ap. l'expans de $E_{n,l}$:

si $l \uparrow, \frac{n}{l+1} \downarrow \Rightarrow E_{n,l} \uparrow$ ($E_{n,l} < 0$)

dégénérescence du niveau $n=2$ { $(2,1)$ $(2,0)$ } $\Delta E_f = E_{2,1} - E_{2,0} = -\frac{Ry}{n^3} \alpha^2 \left(\frac{1}{1+1} - \frac{1}{0+1} \right)$

$(\Rightarrow) \Delta E_f = + \frac{Ry \alpha^2}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{Ry \alpha^2}{16}$

AN: $\Delta E_f = 7,26 \cdot 10^{-24} \text{ J} = 4,54 \cdot 10^{-5} \text{ eV} \ll Ry \approx 13,6 \text{ eV}$

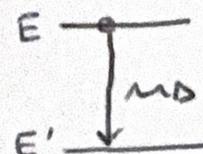
\rightarrow structure fine

Q19). $\Delta\sigma = \sigma_a - \sigma_b$ avec

$E - E' = E_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = hc\sigma$

$\sigma_a = \frac{1}{hc} (E_{3,1} - E_{2,0})$

$\sigma_b = \frac{1}{hc} (E_{3,1} - E_{2,1})$



$$\Rightarrow \Delta\sigma = \frac{1}{hc} (E_{2,1} - E_{2,0}) \Leftrightarrow \boxed{\Delta\sigma = \frac{1}{hc} \cdot \Delta E_{\beta}}$$

$$\text{AN: } \underline{\Delta\sigma} = 36,53 \text{ cm}^{-1} = \underline{0,365 \text{ cm}^{-1}}$$

(20) • $\sigma_m = 15\,237,40 \text{ cm}^{-1} \Rightarrow \underline{\lambda_m} = \frac{1}{\sigma_m} = \underline{656 \text{ nm}} \rightarrow \text{(orange) rouge}$

$\Delta\sigma = 0,360 \text{ cm}^{-1}$ ok avec valeur Q.19!

$$\frac{\Delta\sigma_{\text{exp}}}{\sigma_m} = 2,36 \cdot 10^{-5}$$

• doublet jaune du Na

$$\Delta\sigma = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \quad \text{et} \quad \sigma_m = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\sigma}{\sigma_m} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_1)}$$

$$\text{AN: } \left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma_m} \right)_{\text{Na}} = 1,02 \cdot 10^{-3} \approx 50 \times \left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma_m} \right)_{\text{H}\alpha}$$

très faible

\rightarrow doublet \oplus fin pour H α