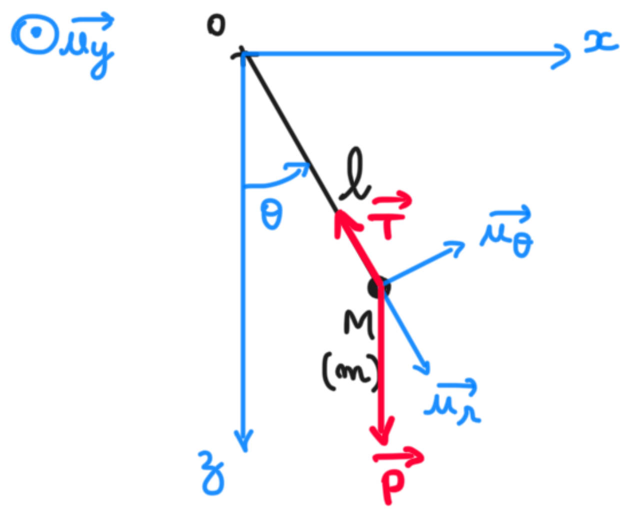
Pendule aux gdes oscillat°



$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \dot\theta(0) = 0 \end{cases}$$

→ θ_0 : amplitude des oscillat°

<u>Intro</u> : On sait déterminer l'express° exacte de la période des petites oscillat° du pendule simple car dans ce cadre, l'éq° du mvt est celle d'un oscillateur harmonique ; on a alors $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ → indpte de θ_0 : <u>isochronisme des oscillat°</u>.

On se propose ici d'étudier des oscillat° d'amplitude ⊕ élevée et de déterminer une express° de la <u>période sous forme intégrale calculée numériquem^t</u> (Python) et d'en déduire pour les faibles amplitudes une <u>express° approchée de la période (formule de Borda) qui dépend de θ_0</u>.

On cherche enfin les <u>cdt° de validité</u>* de l'express° de la période propre et de la formule de Borda.

* amplitude max.

1) <u>syst</u> {M(m)} étudié ds <u>R_t terrestre galiléen</u>

Bdf $\overrightarrow{P}$ qui dérive de $E_p = -mgz$

$\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{u_r}$ ($T>0$)

<u>TEM</u> : $\Delta E_m = W_{nc} = \int_{t=0}^{t} \overrightarrow{T}\cdot\overrightarrow{d\ell}$

or M décrit un cercle de centre O, de rayon ℓ

$\Rightarrow \overrightarrow{d\ell} = \ell\, d\theta\, \overrightarrow{u_\theta}$

ainsi $\vec{T}\cdot\vec{dl} = 0$

d'où $\Delta E_m = 0 \Leftrightarrow E_m(t) = E_m(t=0)$

avec $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - m g z$

avec $v^2 = (l\dot{\theta})^2$

et $z = l \cos\theta$

ainsi $\frac{1}{2}\cancel{m}\, l^{\cancel{2}}\dot{\theta}^2 - \cancel{m}g\,\cancel{l}\cos\theta = 0 - \cancel{m}g\,\cancel{l}\cos\theta_0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{l}\cos\theta = -\frac{g}{l}\cos\theta_0$$

on pose $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$ NB : ω est la pulsat° propre des petites oscillat°

$$\boxed{\text{constante} = -\omega^2\cos\theta_0}$$

2) On a $\dot{\theta}^2 = 2\omega^2(\cos\theta - \cos\theta_0)$

Pour $t \in [0, \frac{T}{4}]$, θ varie de θ_0 à $0 \Rightarrow \dot{\theta} < 0$

ainsi pour $t \in [0, \frac{T}{4}]$, $\boxed{\dot{\theta} = -\omega\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = -\omega\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

séparat° des variables

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} = -\omega \cdot dt$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\theta_0}^{0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} = -\omega\int_0^{T/4} dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} = \omega \cdot \frac{T}{4}$$

on introduit T_0 la période propre des ptes oscillat° : $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega}}$

ainsi $\omega \cdot \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{T}{4} = \frac{\pi . T}{2 T_0}$

CCL : $$\boxed{T = \frac{2.T_0}{\pi} \cdot \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} \quad \text{avec } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

3) $\sin\phi = \dfrac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}$

- on a $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\phi \cdot \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$

  et $\cos\theta_0 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$

- on a $d(\sin\phi) = \cos\phi \cdot d\phi = \dfrac{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot d\theta}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \Rightarrow d\theta = \dots$

- lorsque $\theta = \theta_0$, on a $\sin\phi = 1$ soit $\phi = \frac{\pi}{2}$

  valeur > 0 min de ϕ tq $\sin\phi = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

  lorsque $\theta = 0$, on a $\sin\phi = 0$ soit $\phi = 0$

ainsi : $$T = \frac{2.T_0}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos\phi \cdot \frac{\sin(\theta_0/2)}{\cos(\theta/2)} \cdot d\phi}{\sqrt{2\left(\cancel{1} - 2\sin^2\phi \cdot \sin^2\frac{\theta_0}{2} - \cancel{1} + 2\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right)}}$$

$$T = \frac{2.T_0}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\cancel{\sin(\theta_0/2)}\,\cancel{\cos\phi}\,d\phi / \cos(\theta/2)}{\sqrt{\cancel{\sin^2\frac{\theta_0}{2}}\,(\cancel{1 - \sin^2\phi})}}$$

car $\frac{\theta_0}{2} > 0 \Rightarrow \sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2}} = \oplus \sin\frac{\theta_0}{2}$

on a $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\phi}$

d'où $$\boxed{T = T_0 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_0}{2} \cdot \sin^2\phi}}}$$ CQFD.

4) <u>Petites oscillat°</u> : $\forall t,\ \theta(t) \ll 1$

$\Rightarrow \left| \sin\frac{\theta_0}{2} \simeq \frac{\theta_0}{2} \right.$ $\quad$ <u>DL₂</u> en θ_0 (terme suivant en θ_0^3)

ainsi $T \simeq T_0 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2 \sin^2\phi}}$

avec $\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2 \underbrace{\sin^2\phi}_{<1} \ll 1$

$\underset{\text{DL}_2 \text{ en } \theta_0}{\Rightarrow} \left(1-\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2 \sin^2\phi\right)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2 \sin^2\phi$

$$T \simeq T_0 \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2 \sin^2\phi\right) . d\phi$$

$\cos(2\phi) = 1 - 2\sin^2\phi \Leftrightarrow \sin^2\phi = \frac{1}{2}(1-\cos(2\phi))$

d'où $T \simeq T_0 \cdot \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\left[\phi - \frac{\sin(2\phi)}{2}\right]_0^{\pi/2}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad T \simeq T_0 \cdot \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_0^2}{16}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{T \simeq T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)} \quad \text{CQFD.}$$

5) $\ell = 1{,}0$ m $\quad g = 9{,}8$ m. s-2

- On cherche θ_{ℓ_1} tq $e_{r_0} = \frac{T_{\ell_1} - T_0}{T_0} = 1\%$

On construit une liste d'écarts relatifs e_{r_0} que l'on trace en f° de θ_0. Graphiq^t, on obtient $\theta_{\ell_1} \simeq 0{,}4$ rad

- On cherche θ_{ℓ_2} tq $e_{r_B} = \frac{T_{\ell_1} - T_B}{T_B} = 1\%$

On construit la f° $T_B(\theta_0) = T_0\left(1 - \frac{\theta_0^2}{16}\right)$
puis la liste d'écarts relatifs e_{r_B} que l'on trace en f° de θ_0. Graphiq^t, on obtient $\theta_{\ell_2} \simeq 1{,}29$ rad

autre possibilité : recherche de θ_{ℓ_1} et θ_{ℓ_2} au moyen d'une boucle while qui parcourt les listes et se terminent lorsque l'écart relatif dépasse 1%.