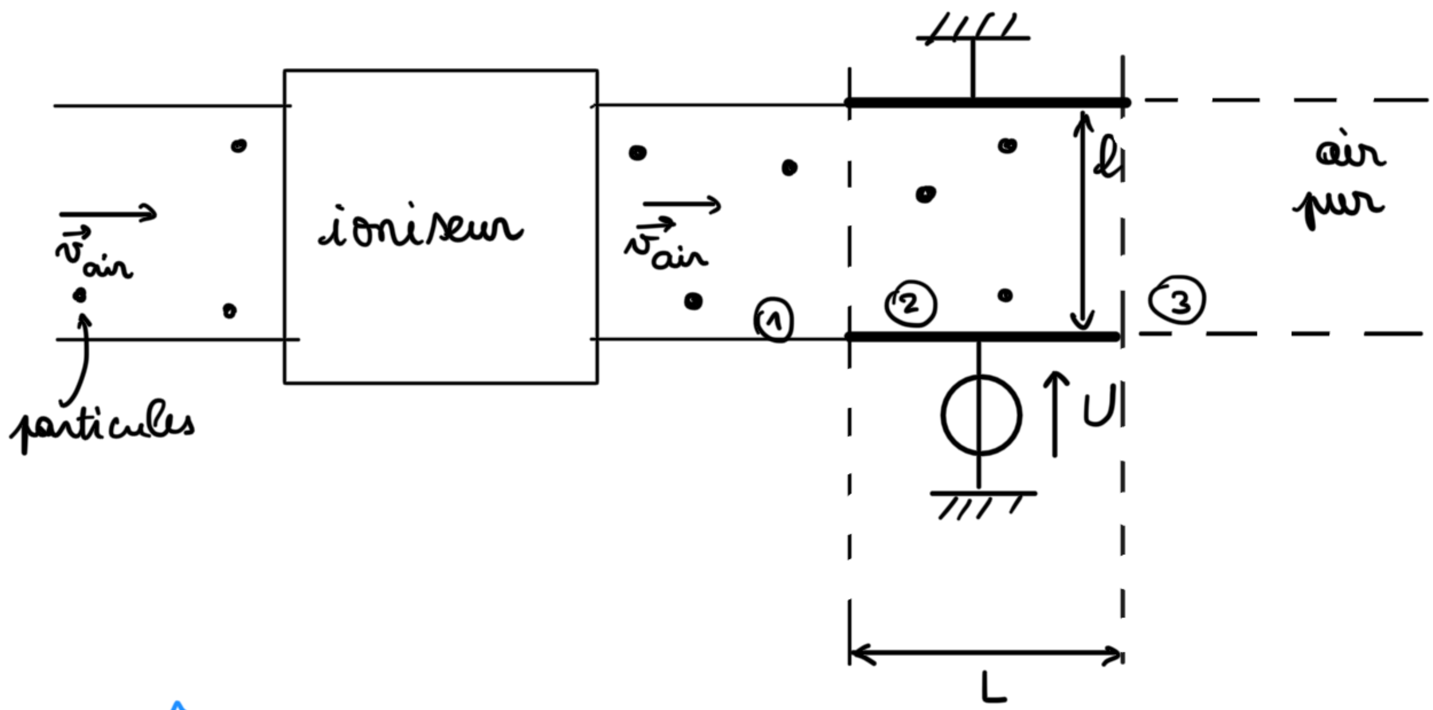
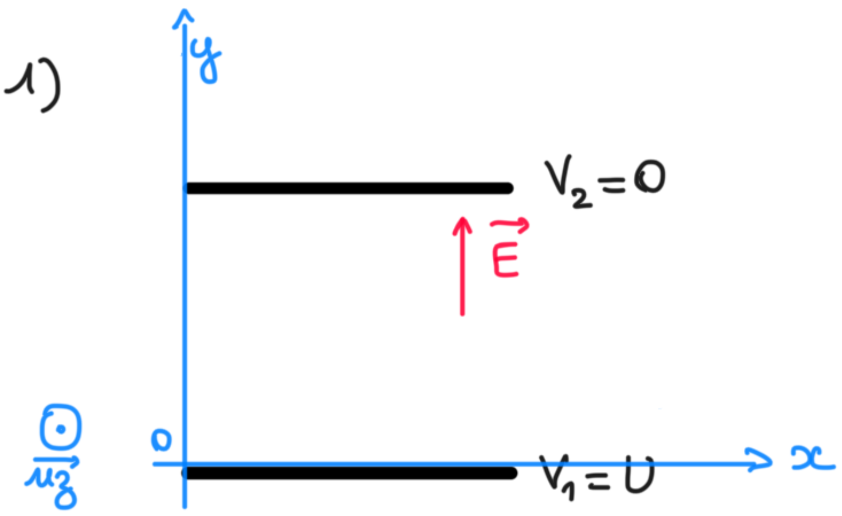
Filtre à particules (CCS1 2025).



1)



- On a deux armatures que l'on assimile à un condensateur plan
  $\Rightarrow$ dans l'espace inter-armature, $\vec{E}$ est uniforme et orienté ds le sens des potentiels décroissants :
  $$\vec{E} = E\,\vec{u_y}$$
  On a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V = -\dfrac{dV}{dy}\,\vec{u_y}$

$$\Leftrightarrow \frac{dV}{dy} = -E \Leftrightarrow V(y) = -E\cdot y + V_0$$

or $V_1 - V_2 = U$

$$\Leftrightarrow -E\cdot y_1 + \cancel{V_0} + E\cdot y_2 - \cancel{V_0} = U$$

$$\Leftrightarrow E(y_2 - y_1) = U$$

$$\Leftrightarrow E\cdot \ell = U$$

d'où $\boxed{\vec{E} = \dfrac{U}{\ell}\,\vec{u_y}}$

- syst = {particule M (m, q)} ds R_T terrestre gal.
  Bdf : $\vec{F_e} = q\vec{E}$

On suppose que le poids est négligeable / à $\|\vec{F_e}\|$. (*)

PFD $m\vec{a} = q\vec{E}$

$\Leftrightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} = \vec{cst}}$ (cô mvt de chute libre)

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = \frac{q}{m} \cdot \frac{U}{\ell} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = A = v_{air} \\ \dot{y} = \frac{q}{m} \cdot \frac{U}{\ell} \cdot t + \underbrace{B}_{=0} \\ \dot{z} = \underbrace{C}_{=0} \end{cases}$$

(A, B, C) csres déterminées avec Ci $\vec{v}(0) = \vec{v_{air}} = v_{air}\vec{u_x}$

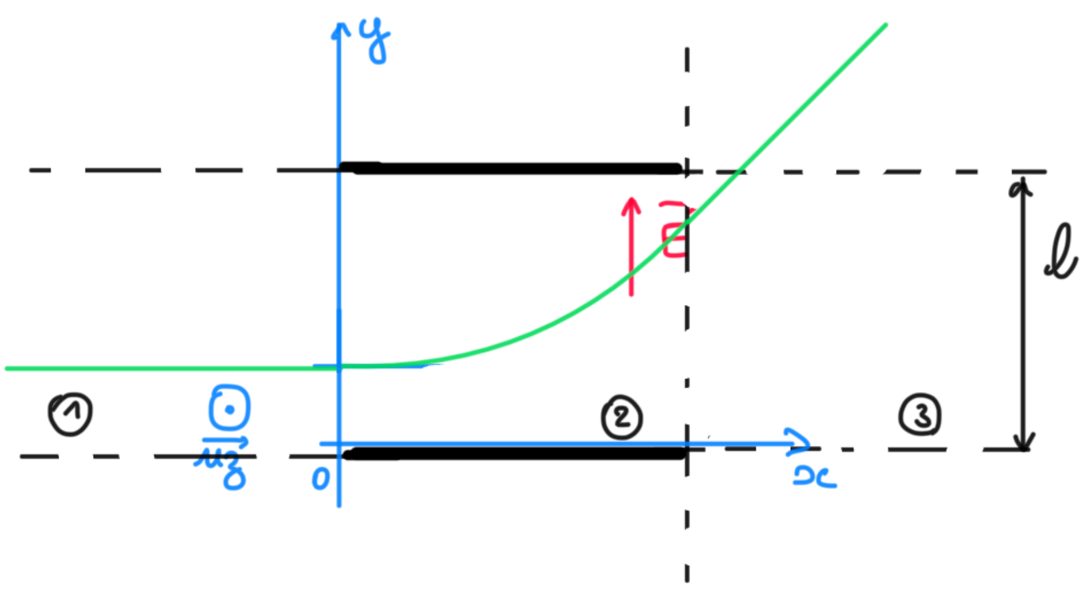
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = v_{air}\, t + \underbrace{A'}_{=0} \\ y = \frac{q}{m} \cdot \frac{U}{\ell} \cdot \frac{t^2}{2} + \underbrace{B'}_{=y_0} \\ z = \underbrace{C'}_{=0} \end{cases}$$

(A', B', C') csres déterminées avec Ci $\vec{OM}(0) = y_0 \vec{u_y}$

instant $t=0$ tq particule en $x(0)=0$

$\rightarrow \boxed{y = \frac{q}{m} \cdot \frac{U}{\ell} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{v_{air}^2} + y_0}$: éqᵒ d'une parabole dans ②
(cohérent avec analogie chute libre).

Dans les zones ① et ③, $\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$: particule décrit un mvt rectiligne uniforme



(*) Calculons $\boxed{\frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{F_e}\|} = \frac{mg}{qE} = \frac{mg}{qU} \cdot \ell}$

AN : avec $m = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 \approx 1{,}4 \cdot 10^{-15}$ kg

$q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

$g \simeq 10$ m.s^{-2}

$\ell = 1{,}0.10^{-2}$ m et $U = 20.10^3$ V

ainsi $\boxed{\dfrac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{F_e}\|} = 0{,}04}$ $\ll 1$ CQFD.

2). Pour que ce dispositif agisse cô un filtre, il faut que les particules aient des coordonnées telles que

$\boxed{y(x = L) > \ell}$

$\Leftrightarrow \dfrac{q}{m} \cdot \dfrac{U}{\ell} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{L^2}{v_{air}^2} + y_0 > \ell$

On souhaite que cette condᵒ soit vérifiée pour tout y_0 donc en particulier pour $y_0 = 0$

ainsi il faut $\dfrac{q}{m} \cdot \dfrac{U}{\ell} \cdot \dfrac{1}{2} \dfrac{L^2}{v_{air}^2} > \ell$

$$\Leftrightarrow L^2 > \ell^2 \cdot \frac{2 v_{air}^2 m}{U \cdot q}$$

$$\underset{L>0}{\Leftrightarrow} \boxed{L > \ell \cdot v_{air} \cdot \sqrt{\frac{2m}{Uq}}}$$

AN: avec $\ell = 1{,}0.10^{-2}$ m ; $U = 20.10^3$ V

$v_{air} = 5$ m.s⁻¹

$m = 1{,}4.10^{-15}$ kg $\quad q = 1{,}6.10^{-19}$ C

$L > 0{,}047$ m $= 4{,}7$ cm

Analyse dimensionnelle :

$$\left[\ell \cdot v_{air} \cdot \sqrt{\frac{2m}{Uq}}\right] = \left[L \cdot \frac{L}{T} \cdot \sqrt{\frac{M}{E \times L \cdot Q}}\right] = \left[\frac{L^2}{T} \sqrt{\frac{M}{L \cdot \text{force}}}\right]$$

$$= \left[\frac{L^2}{\cancel{T}} \cdot \sqrt{\frac{\cancel{M}}{L \cdot \cancel{M} \cdot L \cdot \cancel{T^{-2}}}}\right] = L \text{ (CQFD)}$$

3). Lors de leur déplacemᵗ dans le dispositif, les particules rencontrent des molécules O_2 et N_2 de l'air.

Le choc d'une particule sur une de ces molécules freine la particule ds son mouvement.

On considère que la force associée s'écrit :

$$\vec{F} = -\alpha(\vec{v} - \vec{v}_{air})$$

Dans la zone ②, le PFD donne :

$$m\vec{a} = q\frac{U}{\ell}\vec{u_y} - \alpha(\vec{v} - \vec{v}_{air})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\alpha}{m}\vec{v} = \frac{qU}{m\ell}\vec{u_y} + \frac{\alpha}{m}v_{air}\vec{u_x}}$$

sol° : $\vec{v}(t) = \vec{v}_h(t) + \vec{v}_p(t)$

avec $\vec{v}_h(t) = \vec{K}e^{-t/\tau}$ avec $\boxed{\tau = \frac{m}{\alpha}}$

$\vec{v}_p(t) = \vec{K}'$ tq $\frac{\vec{K}'}{\tau} = \frac{qU}{m\ell}\vec{u_y} + \frac{v_{air}}{\tau}\vec{u_x}$

$$\Leftrightarrow \vec{K}' = \frac{qU}{\alpha\ell}\vec{u_y} + v_{air}\vec{u_x}$$

d'où $\vec{v} = \vec{K}e^{-t/\tau} + \frac{qU}{\alpha\ell}\vec{u_y} + v_{air}\vec{u_x}$.

Ci $\vec{v}(0) = \cancel{v_{air}\vec{u_x}} = \vec{K} + \frac{qU}{\alpha\ell}\vec{u_y} + \cancel{v_{air}\vec{u_x}}$

$$\Leftrightarrow \vec{K} = -\frac{qU}{\alpha\ell}\vec{u_y}.$$

d'où $\boxed{\vec{v} = \frac{qU}{\alpha\ell}\vec{u_y}(1 - e^{-t/\tau}) + v_{air}\vec{u_x}.}$

On intègre à nouveau :

$$\vec{OM} = \frac{qU}{\alpha\ell}\vec{u_y}(t + \tau e^{-t/\tau}) + v_{air}\cdot t\,\vec{u_x} + \vec{K}''$$

Ci $\vec{OM}(0) = y_0\vec{u_y} = \frac{qU}{\alpha\ell}\vec{u_y}(\tau) + \vec{K}''$

$$\Leftrightarrow \vec{K}'' = \left(y_0 - \frac{qU}{\ell}\cdot\frac{m}{\alpha^2}\right)\vec{u_y}$$

d'où $\vec{OM} = \frac{qU}{\alpha \ell}\left(t + \tau e^{-t/\tau} - \tau\right)\vec{u_y} + y_0 \vec{u_y} + v_{air}\, t\, \vec{u_x}$

On a donc $\boxed{\begin{cases} x(t) = v_{air} \cdot t \\ y(t) = y_0 + \frac{qU}{\alpha \ell}\left(t + \tau e^{-t/\tau} - \tau\right) \end{cases}}$

On a t_1 tq $x(t_1) = L = v_{air} \cdot t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{L}{v_{air}}$

Pour que le filtre soit efficace, il faut que $y(t_1) > \ell$

soit $y_0 + \frac{qU}{\alpha \ell}\left(\frac{L}{v_{air}} + \tau e^{-L/(\tau v_{air})} - \tau\right) > \ell$

valable m̂ pour $y_0 = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{L}{v_{air}} + \tau e^{-L/(\tau v_{air})} - \tau > \alpha \frac{\ell^2}{qU}}$$

$\longrightarrow$ <u>résolut° numérique ou graphique</u>

$\longrightarrow$ <u>résolut° approchée</u> possible si $\frac{L}{\tau v_{air}} \gg 1$ (*) alors

$e^{-L/(\tau v_{air})} \simeq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{L}{v_{air}} - \tau > \alpha \frac{\ell^2}{qU}$$

$$\boxed{L > v_{air}\left(\frac{m}{\alpha} + \alpha \frac{\ell^2}{qU}\right)}$$

<u>Analyse dimensionnelle</u> :

$\left[v_{air} \cdot \frac{m}{\alpha}\right] = \left[v_{air} \cdot \tau\right] = \text{Lgueur}$

$\left[v_{air} \cdot \alpha \frac{\ell^2}{qU}\right] = \left[\text{force} \cdot \frac{\ell}{q \cdot \frac{U}{\ell}}\right] = \left[\text{force} \cdot \frac{\ell}{\text{force}}\right] = \text{Lgueur}$

$\rightarrow$ OK.

(*) hyp qui correspond au cas où L est assez grand pour que le rég. permanent soit atteint en sortie de la zone 2