Ex. . Suspension d'un moteur

1) Syst {M} Réf terrestre galiléen

BdF : $\vec{P} = -mg\vec{u_z}$ $\quad \vec{f_r} = -k(\ell_e - \ell_0)\vec{u_z}$.

$\vec{f_f} = \vec{0}$ à l'éq.

pas de force suppl. associée à la vibrat° car moteur à l'arrêt.

En statique : $\vec{0} = \vec{P} + \vec{f_r}$

$0 = -mg - k(\ell_e - \ell_0)$

$\Leftrightarrow \boxed{\ell_e = \ell_0 - \frac{mg}{k}}$ ($\ell_e < \ell_0$ cohérent).

---

2) PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{f} + \vec{f_f} + \vec{F}$ et on projette selon (Oz)

$$m\ddot{z} = -mg - k(\underbrace{\ell}_{\ell_{eq}+z} - \ell_0) - \alpha\dot{z} + F_0\cos(\omega t).$$

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \underbrace{-\cancel{g} - \frac{k}{m}\ell_e}_{-\cancel{\frac{k}{m}\ell_0} + \cancel{g}} + \cancel{\frac{k}{m}\ell_0} + \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)} \xrightarrow[\text{canonique}]{\text{forme}} \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

---

on pose $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$ $\Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{mk}}{\alpha}}$

---

3) on a $\dot{z} = V_0\cos(\omega t + \varphi)$

$\underline{\dot{z}} = \underline{V}e^{j\omega t}$ avec $\underline{V} = V_0 e^{j\varphi}$

l'éq° devient : $j\omega\underline{\dot{z}} + \frac{\omega_0}{Q}\underline{\dot{z}} + \omega_0^2\frac{\underline{\dot{z}}}{j\omega} = \frac{F_0}{m}e^{j\omega t}$

$\div e^{j\omega t}$

$$j\omega\underline{V} + \frac{\omega_0}{Q}\underline{V} + \frac{\omega_0^2}{j\omega}\underline{V} = \frac{F_0}{m}$$

$$\boxed{\underline{V} = \frac{F_0/m}{\frac{\omega_0}{Q} + j\omega - j\frac{\omega_0^2}{\omega}} = \frac{\frac{Q}{\omega_0}\cdot\frac{F_0}{m}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

$$\boxed{V_0 = |\underline{V}| = \frac{QF_0/(m\omega_0)}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}$$

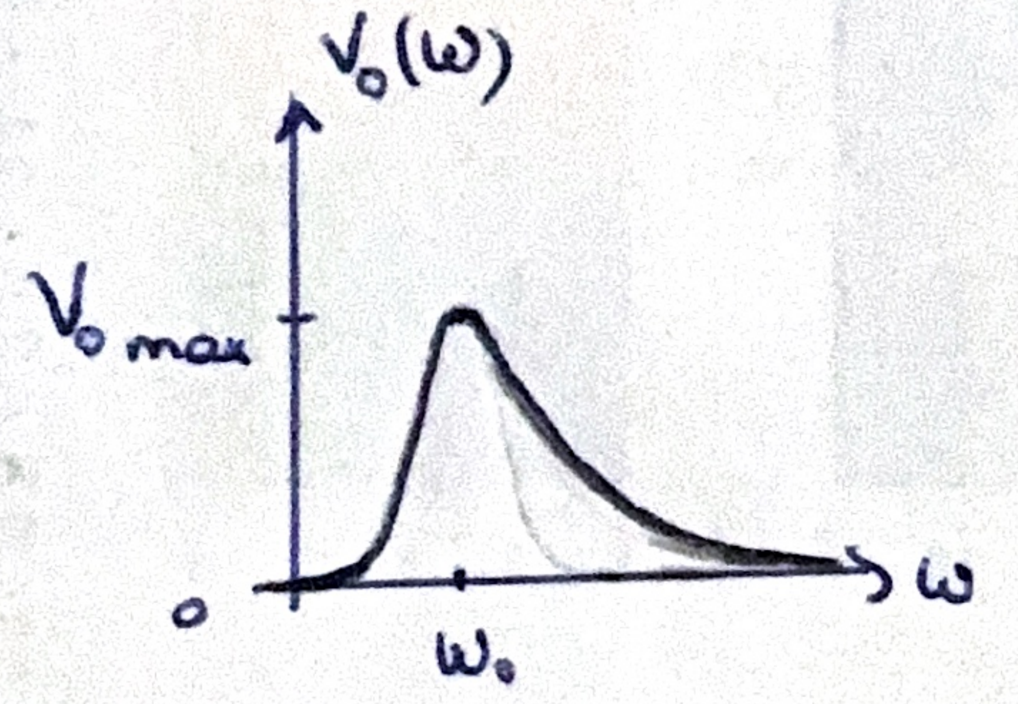
4). $V_0(\omega) \underset{\omega \to 0}{\sim} \dfrac{QF_0/(m\omega_0)}{\sqrt{Q^2\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ $\Rightarrow \lim\limits_{\omega \to 0} V_0(\omega) = 0.$

$V_0(\omega) \underset{\omega \to +\infty}{\sim} \dfrac{QF_0/(m\omega_0)}{\sqrt{Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$ $\rightarrow \lim\limits_{\omega \to +\infty} V_0(\omega) = 0.$

$V_0(\omega)$ est max lorsque $1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ est min

$\Leftrightarrow \dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega} = 0$

$\Leftrightarrow \omega = \omega_0.$ $\rightarrow$ résonance en vitesse pour $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$



$V_{0\,max} = V_0(\omega_0) = \dfrac{QF_0}{m\omega_0} = \dfrac{\frac{m\omega_0}{\alpha} \cdot F_0}{m\omega_0} = \dfrac{F_0}{\alpha}$

---

la suspension doit amortir les vibrations dues au f^{ct} du moteur. Il faut donc que ω_0 soit le plus possible éloignée de ω.

$\rightarrow$ on s'écarte au max de la résonance.

pour $k_1 = 4{,}0.10^6$ N.m^{-1} $\quad \omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = \sqrt{\frac{4{,}0.10^6}{10}} = 6{,}3.10^2$ rad.s^{-1}

$k_2 = 1{,}0.10^6$ N.m^{-1} $\quad \omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m}} = \sqrt{\frac{1{,}0.10^6}{10}} = 3{,}2.10^2$ rad.s^{-1}.

le fonctionnement du moteur impose des vibrat° de pulsat° $\omega = 628$ rad.s^{-1}

pour s'écarter au max de la résonance, il faut choisir le ressort de cste de raideur $k_2 = 1{,}0.10^6$ N.m^{-1}.