

Préparation aux oraux MP/MPI

TD7 – Divers

1 [MP] CCINP Dossier 2025 : Moments dans champ magnétique

On considère N moments magnétiques $\vec{\mu}$ plongés dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Les moments magnétiques sont soit parallèles, soit anti-parallèles au champ magnétique (*même sens ou sens opposé à \vec{B}*). On suppose que les moments ne peuvent pas interagir entre eux.

- 1) Rappeler l'expression de l'énergie potentielle en fonction du moment magnétique.
- 2) Déterminer les populations N_1 et N_2 des moments magnétiques parallèles et anti-parallèles au champ magnétique en posant $\beta = \frac{1}{k_B T}$.
- 3) En posant $X = \beta\mu B$ avec $\mu = \|\vec{\mu}\|$, déterminer l'aimantation $\vec{M}(X) = \frac{N_1\vec{\mu}_1 + N_2\vec{\mu}_2}{V}$ avec V le volume du système et $\vec{\mu}_1 = \mu\vec{e}_z$ et $\vec{\mu}_2 = -\mu\vec{e}_z$.
- 4) Tracer $M = \|\vec{M}\|$ en fonction de X . En particulier, déterminer l'asymptote pour $X \rightarrow +\infty$ et la tangente en $X = 0$.
- 5) On note S le point d'intersection entre l'asymptote pour $X \rightarrow +\infty$ et la tangente en $X = 0$. Déterminer son abscisse X_s .
- 6) Etudier le comportement de $M(X)$ lorsque $X \gg X_s$ et $X \ll X_s$. Montrer notamment que M est proportionnel à B lorsque $X \ll X_s$.
- 7) Supplémentaire : lorsque $X \ll X_s$, se trouve-t-on à haute ou basse température ?

2 ENSEA : Fil et spire

On considère un fil infini confondu avec l'axe (Oz) et parcouru par un courant $i(t) = I_e\sqrt{2}\cos(\omega t)$. Une spire rectangulaire, de côtés a et b et de résistance électrique R , se situe à une distance d du fil.

- 1) Calculer le champ \vec{B} créé par le fil en un point M de l'espace.
- 2) Calculer le flux du champ magnétique dans la spire.
- 3) En déduire le coefficient d'inductance mutuelle M .
- 4) Calculer la force électromotrice induite dans la spire.
- 5) En déduire l'expression du courant induit dans la spire $i_s(t)$. Déterminer le rapport des valeurs efficaces de i et i_s .
- 6) Déterminer les actions mécaniques qui s'exercent entre le fil et la spire.

Données :

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}}f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,z} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,z} \cdot \vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{r,\theta} \cdot \vec{e}_z$

En coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}}f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} \cdot \vec{e}_\varphi$

Résultante des actions subies par un dipôle magnétique dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_{ext}(M)$:

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{B}_{ext})$$

Expression du champ magnétique créé par un dipôle magnétique placé en O :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi OM^3} (3(\vec{\mathfrak{M}} \cdot \overrightarrow{OM})\overrightarrow{OM} - OM^2 \cdot \vec{\mathfrak{M}})$$

3 CCMP : Cylindre métallique

Nous réalisons ici une étude qualitative d'un chauffage par induction d'un cylindre métallique.

Un cylindre métallique, de conductivité électrique σ , de longueur H , de rayon R est placé à l'intérieur d'un solénoïde de grande longueur. L'axe du cylindre coïncide avec l'axe Oz du solénoïde.

Le solénoïde, caractérisé par un nombre n de spires par unité de longueur, est parcouru par un courant d'intensité $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$. On se place dans l'ARQS.

1. Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}(t)$ régnant dans le solénoïde. On écrira $\vec{B}(t) = \vec{B}_m \cos(\omega t)$ et on donnera l'expression de B_m .
2. On montre que les variations temporelles du champ magnétique induisent un champ électrique dans le cylindre métallique dont l'expression admise est :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{1}{2} r \omega B_m \sin(\omega t) \vec{u}_\theta.$$

- (a) Expliquer comment s'établit un courant dans le cylindre métallique.
- (b) Déterminer la densité de courant $j(M, t)$ dans le cylindre en admettant que le cylindre est un conducteur ohmique.
- (c) Quelle est la forme des lignes de courant dans le cylindre ?

3.

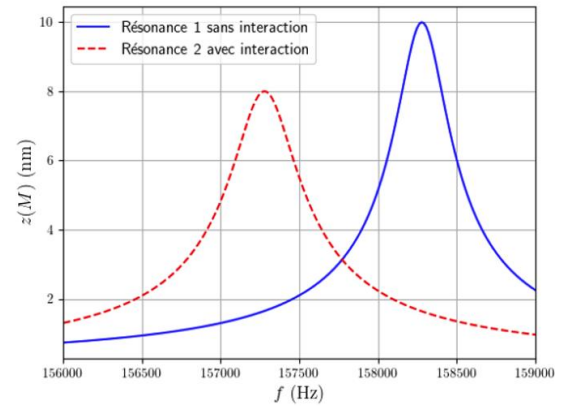
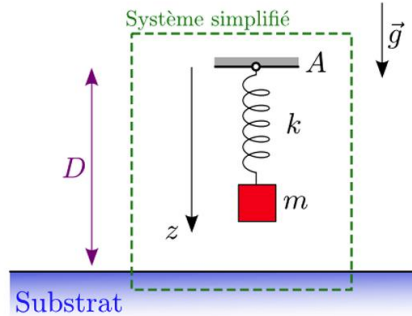
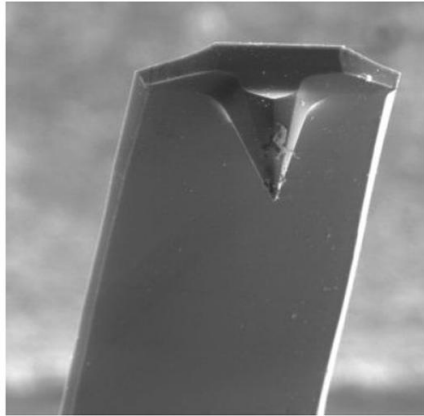
- (b) Montrer que la puissance dissipée par effet Joule dans le barreau cylindrique s'écrit :

$$P = \frac{\pi}{8} \sigma R^4 H \omega^2 B_m^2 \sin^2(\omega t).$$

- (c) Donner l'expression de la puissance moyenne P_m dissipée par effet Joule dans le cylindre.
4. On admet que le conducteur métallique est suffisamment bon conducteur pour qu'on considère sa température $T(t)$ uniforme. Le cylindre échange par sa surface latérale S_{lat} une puissance $P_{ext} = -h S_{lat} (T(t) - T_{ext})$. T_{ext} est la température de l'extérieur du cylindre supposée constante.
 - (c) Etablir l'équation vérifiée par $T(t)$. On notera c la capacité thermique massique du cylindre et ρ sa masse volumique qu'on suppose indépendantes de $T(t)$.
 - (d) On se place en régime stationnaire. On note T_{fus} la température de fusion du métal dont est constitué le cylindre. Déterminer la relation que doit vérifier la pulsation ω pour que le cylindre atteigne sa température de fusion.

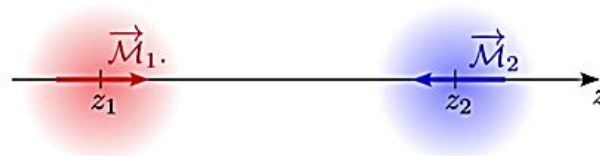
4 CCMP : Principe du MFM

Le microscope MFM (Magnetic force microscope) fait partie de la famille des microscopes de champ proche capable détecter des interactions magnétiques sur des échelles spatiales de l'ordre du nanomètre. Il est constitué d'une poutre vibrante de silicium aux dimensions micrométriques terminée par une pointe magnétique de rayon R de dimension nanométrique. Le comportement mécanique de cet ensemble est ramené à celui d'un oscillateur vertical constitué d'une masse m et d'un ressort de constante k (amorti par des frottements fluides suffisamment faibles pour que la poutre puisse osciller).



Si l'on considère une poutre, encastée à sa base, de longueur $\ell = 100 \mu\text{m}$ et de section rectangulaire de largeur $w = 20 \mu\text{m}$ et de hauteur $t = 2.27 \mu\text{m}$, pour toute petite déformation dans la direction z orthogonale à la largeur, on obtient une raideur équivalente à $k = Ewt^3/4\ell^3$.

- Masse volumique du silicium : $\rho_{Si} = 2330 \text{ kg m}^{-3}$.
 - Module d'Young du silicium : $E = 1.79 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$ où E est le module d'Young lié à la rigidité du matériaux.
1. Déterminer la fréquence propre (= sans frottement) du système simplifié si A est immobile dans le référentiel galiléen d'étude.
 2. Le point A est mis en mouvement harmonique par rapport au référentiel galiléen d'étude : $z_A = a_{exc} \cos(\omega t)$. Montrer qu'une résonance peut se produire si les frottements de l'air sont suffisamment faibles.
 3. À l'aide de la courbe de résonance de la figure précédente (sans interaction), déterminer le facteur de qualité Q de l'oscillateur.
 4. Dans un MFM, l'interaction entre la pointe et le substrat est une interaction à distance de type magnétique. Pour modéliser l'interaction, on considère deux dipôles alignés sur un axe (Oz), espacés d'une distance $z = z_2 - z_1$ de direction fixe.



- (a) Déterminer la force qu'exerce le substrat \vec{M}_2 sur la pointe \vec{M}_1 .
- (b) Quel est l'effet d'une telle interaction sur l'oscillateur du microscope ? Quantifier cet effet dans le cas de « petites oscillations ».

- (c) La poutre oscille et se déplace dans un plan parallèle au substrat. Expliquer comment mesurer les interactions magnétiques.



Formulaire

- Champ créé par un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}}$ en coordonnées sphériques ($\vec{\mathcal{M}}$ pointe vers la direction $\theta = 0$) :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

- Force subie par un dipôle magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ dans un champ magnétostatique extérieur non uniforme \vec{B}_{ext} :

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{ext})$$

5 CCINP/CMT : Interféromètre de Michelson en coin d'air

Un interféromètre de Michelson réglé en coin d'air est éclairé par une source monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 630 \text{ nm}$. On notera α l'angle du coin d'air.

On place une lentille de distance focale image $f' = 12,5 \text{ cm}$ et un écran à 15 cm de la lentille.

On observe des franges rectilignes d'interfrange $i = 3,5 \text{ mm}$ sur l'écran.

- 1) Faire un schéma de l'interféromètre en précisant le nom et le rôle de chaque élément constitutif.
- 2) Déterminer l'expression de l'éclairement sur l'écran.
- 3) Déterminer la valeur de l'angle du coin d'air

6 CCINP/CMT : Détente de vapeur

On réalise une détente adiabatique réversible de vapeur d'eau, depuis la pression $P_1 = 20 \text{ bar}$, jusqu'à la pression $P_2 = 1 \text{ bar}$. Dans l'état initial, la vapeur est à la limite de saturation ; dans l'état final, on obtient un mélange liquide-vapeur.

▷ Déterminer le titre en vapeur x de l'état final, à partir de la capacité thermique massique de l'eau liquide $c_{eau(l)}$ et des données suivantes :

Pression de vapeur saturante (bar)	20	1
Température de l'équilibre liquide/vapeur (K)	485	373
Enthalpie massique de vaporisation (kJ.kg^{-1})	1892	2258

Données :

♦ Expressions de l'entropie d'un gaz parfait :

$$* S(T, V) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + S_0$$

$$* S(P, V) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) + \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + S_0$$

$$* S(T, P) = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - nR \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) + S_0$$

♦ Expressions de l'entropie d'une phase condensée idéale :

$$S(T) = C \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + S_0$$

7 CCINP/CMT : Diffusion thermique et mammifères marins

Les mammifères sont des animaux à sang chaud, leurs cellules sont le siège de réactions chimiques exothermiques qui dégagent une puissance volumique P_v . Ceci produit une puissance totale P qui maintient le mammifère à température constante.

On assimile un mammifère à une sphère de rayon R . On note λ la conductivité thermique du milieu dans lequel se trouve le mammifère, et $T_0 = 20^\circ\text{C}$ la température de ce milieu loin du mammifère.

- 1) Déterminer $T(r)$ la température dans le milieu, à une distance r du centre du mammifère, en fonction de T_0 , λ et P . Exprimer T_R la température cutanée du mammifère i.e. à sa surface.
- 2) Déterminer l'expression de la puissance volumique P_v pour que $T_R = 30^\circ\text{C}$ en fonction de λ et R .
- 3) Pourquoi n'existe-t-il pas de « petits » mammifères marins?



Photographie d'un marsouin (vaquita) : plus petit mammifère marin

Données :

<u>Coordonnées cylindriques</u>	<u>Coordonnées sphériques</u>
$\vec{\text{grad}}f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,z} \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,z} \cdot \vec{u}_\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{r,\theta} \cdot \vec{u}_z$	$\vec{\text{grad}}f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} \cdot \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} \cdot \vec{u}_\varphi$

8 CCINP/CMT : Mal des transports

Les organes internes du corps (en particulier l'estomac) entrent en résonance pour des fréquences inférieures à 0,5 Hz. Dans ce cas, le mal des transports apparaît.

Lorsque deux adultes entrent dans une voiture de masse 1,45 tonnes, la voiture s'affaisse de 1,5 cm.

▷ Ces personnes seront-elles malades dans cette voiture ?

9 CCINP/CMT : Fusible 5 A

Un fusible est un organe de sécurité dont le rôle est d'ouvrir un circuit électrique lorsque le courant électrique dans celui-ci atteint une valeur d'intensité donnée pendant un certain temps. Son nom vient du fait qu'il fonctionne par fusion d'un filament conducteur, sous l'effet de l'élévation de température provoquée par la surintensité.

Un fusible est constitué d'un fil cylindrique en plomb de rayon r et de longueur L traversé par un courant d'intensité I . Le fil est enfermé dans une capsule remplie d'un isolant thermique. Ses deux extrémités sont serties dans des plots métalliques massifs qui sont à la température ambiante T_0 .



▷ Déterminer le diamètre du fil pour qu'il joue le rôle d'un fusible pour une intensité égale à 5 A.

Données :

$$T_0 = 25^\circ\text{C}$$

$$T_{\text{fusion}}(\text{Pb}) = 328^\circ\text{C}$$

$$\text{conductivité thermique : } \lambda(\text{Pb}) = 34 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$$

$$\text{conductivité électrique : } \gamma(\text{Pb}) = 4,81 \cdot 10^6 \Omega^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$$

$$L = 5 \text{ cm}$$

10 CCMP : Gel d'un lac

On étudie la formation d'une couche de glace à la surface d'un lac. La température en surface est $T_s = -10^\circ\text{C}$ alors que l'eau liquide du lac est à sa température de fusion T_f . On note $e(t)$ l'épaisseur de la couche de glace à l'instant t et on suppose que $e(t=0) = 0$.

- 1) Exprimer la densité de courant thermique j_Q dans la couche de glace en régime stationnaire en fonction de $e(t)$ notamment.
- 2) On note de l'épaisseur de glace formée entre t et $t + dt$. Exprimer de en fonction de j_Q , de l'enthalpie massique de fusion de la glace ℓ et de sa masse volumique μ . En déduire une équation différentielle vérifiée par $e(t)$.
- 3) Résoudre cette équation et déterminer l'épaisseur formée au bout d'une journée, d'une semaine et d'un mois. Commenter.

Données : caractéristiques de la glace

$$\text{conductivité thermique : } \lambda = 2,1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$$

$$\text{masse volumique : } \mu = 917 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

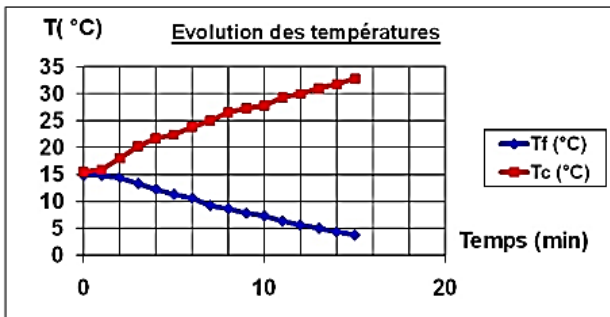
$$\text{enthalpie massique de fusion : } \ell = 333 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$$

11 CCINP/CMT : Etude expérimentale d'une pompe à chaleur

On étudie la pompe à chaleur photographiée ci-dessous (le condenseur plonge dans le seau rouge) et dont on souhaiterait mesurer l'efficacité.



On a réalisé des mesures de températures d'eau à l'intérieur des seaux rouge (T_c) et bleu (T_f).



t (min)	Tf (°C)	Tc (°C)
0	14,8	15,5
1	14,8	15,9
2	14,4	18
3	13,3	20,2
4	12,2	21,7
5	11,3	22,4
6	10,6	23,8
7	9,2	25
8	8,6	26,52
9	7,8	27,3
10	7,3	27,8
11	6,3	29,3
12	5,6	30
13	5	31
14	4,3	31,8
15	3,8	32,8

▷ Quelles mesures et quelles données supplémentaires vous permettraient d'évaluer l'efficacité de cette pompe à chaleur ?

12 CCS2 : Constante de gravitation universelle

Il sera accordé une grande importance aux qualités d'exposition. Le candidat est invité, dès le début de son passage au tableau, à présenter le sujet préparé de manière ordonnée et argumentée.

1. Dans le manteau terrestre, la masse volumique de la Terre s'exprime selon $\rho(r) = \frac{g_0}{2\pi r G}$, où $g_0 = 9,8 \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}$, r est la distance au centre de la Terre et G la constante de gravitation universelle.

En déduire l'expression du champ gravitationnel $g(r)$ dans le manteau terrestre. On néglige l'effet de la rotation de la Terre sur elle-même ainsi que l'influence des autres astres.

2. Expliquer la mesure du couple de torsion de la balance de torsion, puis exploiter les données suivantes pour déterminer la constante de gravitation universelle
 - longueur de tige : 2 m ;
 - masses fixées à la tige : 10,105 kg ;
 - période du dispositif constitué : 271,5 s ;
 - un miroir est disposé dans l'axe de la tige ; il est éclairé par un spot lumineux et la lumière réfléchie est projetée sur un écran situé à 2,5 m ;
 - des masses $M = 158 \text{ kg}$ distantes de 200 mm des masses de la tige (et disposées selon la **figure 1**) provoquent un déplacement de 2,42 mm du spot lumineux sur l'écran.

Loi locale vérifiée par le champ de gravitation \vec{g} en un point P quelconque : $\text{div}(\vec{g}) = -4\pi\rho G$.

Le principe de la balance de torsion

Charles Augustin Coulomb (1736–1806) fut l'un des premiers à utiliser ce système. Pour démontrer que la force entre deux sphères chargées est en $1/R^2$, il utilise une balance qui établit l'équilibre entre la force électrique et la force de torsion. Pour les expériences de Cavendish (1798) et de Boys (1895), c'est l'attraction gravitationnelle qui est compensée par la force de torsion. Ce phénomène entraîne une torsion du fil qui maintient le système en équilibre.

Initialement, les petites sphères sont dans une position stable. Lorsque l'on approche les grosses sphères des plus petites, la force d'attraction gravitationnelle entre les deux types de sphères va produire un couple tendant à faire tourner la tige. Les petites sphères s'approchent des plus grosses jusqu'à ce que la torsion du fil équilibre le couple gravitationnel.

À la nouvelle position d'équilibre, il y a égalité entre le moment du couple de torsion et le moment provoqué par la force d'attraction. Cette condition va permettre d'obtenir une relation qui sera utilisée pour la détermination de la valeur de G . Lors du changement de positions des grosses sphères, le fléau va passer d'un état d'équilibre à un autre. Il y aura rotation du fléau. La mesure de l'angle de rotation permettra de remonter au couple de torsion. Cependant ce couple fait intervenir les caractéristiques mécaniques du fil de suspension. Pour déterminer ces caractéristiques, il suffira de mesurer la période d'oscillation de la balance. Ainsi, la mesure de la période d'oscillation et la mesure de l'angle de rotation du fléau permettent d'obtenir la force d'attraction.

NB : Pour la situation représentée ci-dessus, le fil de torsion de constante C exerce sur le système un couple de rappel de moment $-\mathcal{C}\alpha$.

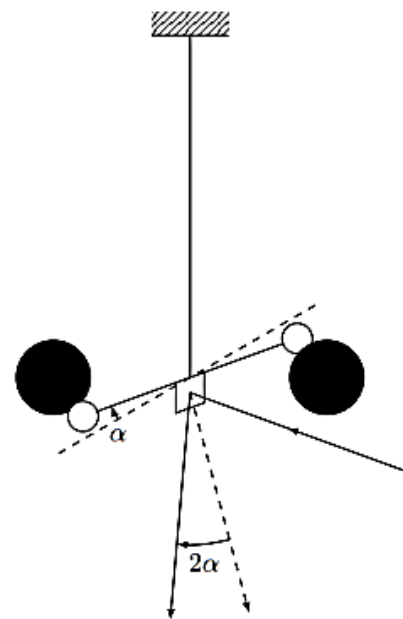


Figure 1

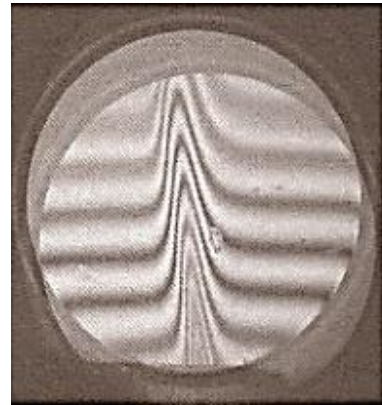
13 CCS1 Montoloy 2022 : Mesure de l'indice optique d'un gaz

On considère un interféromètre de Michelson réglé en coin d'air et éclairé avec une lampe au sodium qui émet une lumière considérée comme monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 589 \text{ nm}$.

On place un écran à une distance $D = 80 \text{ cm}$ du miroir (M1) et une lentille convergente entre les deux telle que le grandissement transversal $|\gamma| = 5$.

On émet un jet de gaz avec un briquet au voisinage d'un miroir.

On obtient alors sur l'écran la figure ci-contre (à l'échelle).



- 1) Décrire le montage expérimental.
- 2) Déterminer l'interfrange i de la figure d'interférences dont l'image est observée sur l'écran.
- 3) Déterminer la distance focale image de la lentille.
- 4) Déterminer l'indice optique du gaz du briquet.