

1 Sorbet maison

Une sorbetière est une machine permettant de fabriquer des glaces. La préparation (fruits, eau et sucre), sortie du réfrigérateur, est versée dans un bol sorti du congélateur. Ce bol contient une solution saline dont la fusion progressive permet de récupérer une grande quantité d'énergie à basse température, et donc de refroidir efficacement la préparation. Un petit moteur fait tourner une pale qui agite le mélange, jusqu'à la prise en glace.



On modélise l'ensemble de la façon suivante :

- ▷ la préparation de masse m est initialement liquide à 0°C , elle commence à solidifier dès qu'elle est versée ;
- ▷ le bol de la sorbetière demeure à température constante $T_0 = -15^\circ\text{C}$;
- ▷ la température T du mélange est uniforme ;
- ▷ la puissance thermique échangée entre le mélange et le bol de la sorbetière s'écrit $\mathcal{P} = \alpha(T - T_0)$;
- ▷ les échanges thermiques avec l'air sont négligés pour simplifier.

On note c la capacité thermique massique de la glace, et $\Delta_{\text{fus}}h$ son enthalpie de fusion.

1 - Quelle est la durée nécessaire à ce que le mélange solidifie complètement ?

2 - La glace est meilleure à déguster à $T^* = -8^\circ\text{C}$. Combien de temps supplémentaire faudra-t-il patienter une fois la glace totalement solidifiée avant de se régaler ?

2 Transformations polytropiques d'un gaz parfait

Un échantillon de gaz parfait, de masse molaire M et rapport des capacités thermiques γ , subit une transformation au cours de laquelle sa pression P et son volume massique v suivent la loi dite polytropique : $Pv^k = \text{cte}$, où k est une constante. La transformation est de plus mécaniquement réversible : à chaque instant la pression extérieure P_{ext} et la pression du gaz P sont égales.

1. Trouver une loi de la forme $f(v, T) = \text{cte}$ vérifiée au cours de cette transformation. En déduire une relation entre $\frac{dv}{v}$ et $\frac{dT}{T}$.

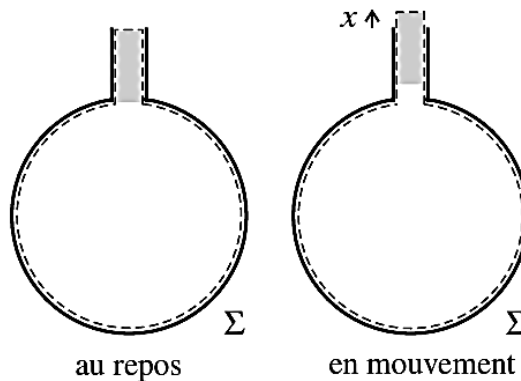
2. Exprimer le transfert thermique massique élémentaire δq entre deux états très proches en fonction de la différence de température dT et des caractéristiques du gaz.

3 Résonateur de Helmholtz

Un résonateur de Helmholtz est constitué par une sphère de volume V_0 reliée à un conduit cylindrique de longueur h et section A . L'air contenu dans le résonateur est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M et rapport des capacités thermiques γ . On se propose d'étudier un mode de vibration du résonateur tel que :

- l'air contenu dans le conduit se déplace en bloc (comme si c'était un bouchon solide) d'une très petite longueur x , algébrique et comptée positivement vers l'extérieur du résonateur (voir figure),
- l'air contenu dans le résonateur n'a pas d'échange thermique avec l'extérieur.

On appelle P_0 et T_0 la pression et la température de l'air atmosphérique et P et T la pression et la température dans le résonateur.



1. Exprimer la masse m d'air dans le conduit et la quantité d'air n dans la sphère lorsque le résonateur est au repos en fonction de h , A , V_0 , M , P_0 et T_0 .

2. En négligeant la variation d'énergie interne de l'air du conduit et la variation d'énergie cinétique de l'air dans la sphère, montrer que l'application du premier principe au système fermé $\Sigma = \{\text{gaz dans le résonateur au repos}\}$ mène à la relation : $\frac{nR}{\gamma-1}dT + m\ddot{x}dx = -P_0Adx$.

3. De même, établir la relation : $\frac{nR}{\gamma-1}dT = -PAdx$.

4. Montrer que $\frac{Adx}{V_0 + Ax} = -\frac{1}{\gamma-1} \frac{dT}{T}$ puis que $\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{Adx}{V_0 + Ax}$. Exprimer P au premier ordre en x , en fonction de P_0 , V_0 , A et x .

5. Montrer que : $m\ddot{x} = -\frac{\gamma P_0 A^2}{V_0}x$. Quelle est la fréquence f_0 du mode d'oscillation étudié ?

6. On indique que la vitesse du son dans l'air est $c_{\text{son}} = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$. Exprimer la longueur d'onde λ_0 d'une onde sonore de fréquence f_0 en fonction de V_0 , A et h .

7. *Application numérique* : la sphère a un rayon $r = 6,0\text{cm}$, le conduit est un cylindre de rayon $a = 1,0\text{cm}$ et hauteur $h = 4,0\text{cm}$, $M = 0,029\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $R = 8,314\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. Calculer λ_0 . Commenter la valeur trouvée.