

1 Combinaison de plongée (d'après oral CCP PSI) (Type « résolution de problème »)

→ ARQS

Il y a risque d'hypothermie lorsque la température du corps passe en-dessous de 35°C.

➡ Déterminer le temps au bout duquel il y a risque d'hypothermie pour un baigneur dans la Manche à 17°C.

Données :

- ▷ capacité thermique massique du corps humain : $c_{\text{corps}} = 3,5 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- ▷ résistance thermique de la peau : $R_{\text{peau}} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$;
- ▷ puissance produite par le métabolisme : $P_{\text{corps}} = 100 \text{ W}$;
- ▷ puissance surfacique reçue par le corps humain dans l'eau (par convection) : $P_{\text{conv}} = \alpha(T_{\text{ext}} - T)$, avec T la température de la peau, T_{ext} la température de l'eau et $\alpha = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

2 Age de la Terre selon Lord Kelvin

La Terre est assimilée à un milieu semi-infini occupant tout le demi-espace $z > 0$. On admet que la température ne dépend que de la profondeur z (comptée positivement vers le bas) et du temps t . La planète a une conductivité thermique λ , une masse volumique ρ et une capacité thermique massique c , toutes trois uniformes. On note $j_{\text{th}}(z, t)$ la densité de courant thermique.

1. Montrer que : $\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 j_{\text{th}}}{\partial z^2}$ (équation (1)) où D est la diffusivité thermique, $D = \frac{\lambda}{\rho c}$.

Au milieu du XIX^e siècle, Lord Kelvin a imaginé que la Terre a été formée à une température élevée uniforme T_0 au moment $t = 0$. Instantanément sa surface a été soumise à une température T_S . Depuis ce temps-là, la planète se refroidirait. Lord Kelvin a modélisé ce refroidissement pour en déduire l'âge de formation de la Terre.

2. Dans l'hypothèse de Lord Kelvin, quelle doit être la valeur de la densité de courant thermique en $z = 0$ lorsque t tend vers zéro, et lorsqu'il tend vers l'infini ? Quelle doit être la valeur de la densité de courant thermique à une profondeur z non nulle lorsque t tend vers zéro, et lorsqu'il tend vers l'infini ?

3. Lord Kelvin proposa la solution : $j_{\text{th}}(z, t) = -\frac{A}{\sqrt{Dt}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right)$ où t est le temps écoulé depuis la formation de la Terre. On **admet** qu'il s'agit bien d'une solution de l'équation (1). Vérifier qu'elle est compatible avec la condition initiale et les conditions aux limites. Dessiner schématiquement la valeur absolue de la densité de courant thermique en fonction de la profondeur pour deux époques différentes.

4. On suppose que $A = a(T_0 - T_S)^\alpha \lambda^\beta \rho^\gamma c^\delta$ où a est un facteur numérique et où α , β , γ et δ sont des exposants éventuellement nuls. Calculer α , β , γ et δ par analyse de l'homogénéité de la formule de Lord Kelvin.

5. On peut montrer que $a = 1/\sqrt{\pi}$. Exprimer la valeur du gradient thermique en surface de la Terre $\partial T / \partial z$. Lord Kelvin a admis que $T_0 - T_S$ était de l'ordre de 1000 à 2000 K et que D est proche de $1 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. L'augmentation de température avec la profondeur mesurée dans les mines indiquait un gradient thermique proche de $30 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$. Quel âge de la Terre Lord Kelvin a-t-il déduit de son modèle ?

6. Que pensez-vous de l'estimation précédente de l'âge de la Terre ? Quel est (ou quels sont) le (ou les) ingrédient(s) physique(s) que Lord Kelvin n'aurait pas dû négliger ? Pourquoi l'a-t-il (ou les a-t-il) négligé(s) ?

3 La fonction d'erreur de Gauss : $erf(\chi)$ (d'après CCMP2 MP-MPI 2023)

Bon nombre de problèmes rencontrés en physique peuvent être résolus à l'aide de « fonctions spéciales ». Ces fonctions définies mathématiquement sont implémentées dans de nombreuses bibliothèques informatiques (comme `scipy`) et peuvent être utilisées aussi simplement qu'une fonction sinus ou racine carrée qui sont elles aussi d'une certaine manière des fonctions spéciales et tout aussi analytiques ...

On rencontre bien souvent des résolutions numériques de problèmes physiques alors que l'utilisation de ces fonctions spéciales permet une résolution complète et analytique. Ce problème se propose d'illustrer l'intérêt de ces « fonctions spéciales ».

III.A Introduction au problème de STEFAN

Un certain nombre de problèmes géologiques importants peuvent être modélisés par le chauffage ou le refroidissement instantané d'un demi-espace semi-infini. Au milieu du XIX^e siècle Lord KELVIN a ainsi utilisé cette idée pour estimer l'âge de la Terre. Il supposa qu'à la surface le flux d'énergie thermique résultait du refroidissement d'un flux initialement chaud de la Terre et a conclu que l'âge de la Terre était environ 65 millions d'années. On retrouve ces phénomènes en étudiant le refroidissement de la lithosphère océanique ou l'évolution d'une coulée de magma.

□ – 23. Comment explique-t-on de nos jours le résultat erroné obtenu par Lord KELVIN ?

On étudie un milieu matériel semi-infini défini par $y > 0$ dont la surface subit un changement instantané de température. Initialement à $t = 0^-$, le demi-espace est à la température uniforme T_1 ; pour $t > 0$, la surface $y = 0$ est maintenue à une température constante T_0 . Si $T_1 > T_0$, le milieu matériel se refroidit et sa température diminue. La situation est représentée à la figure 5 pour le cas $T_1 > T_0$.

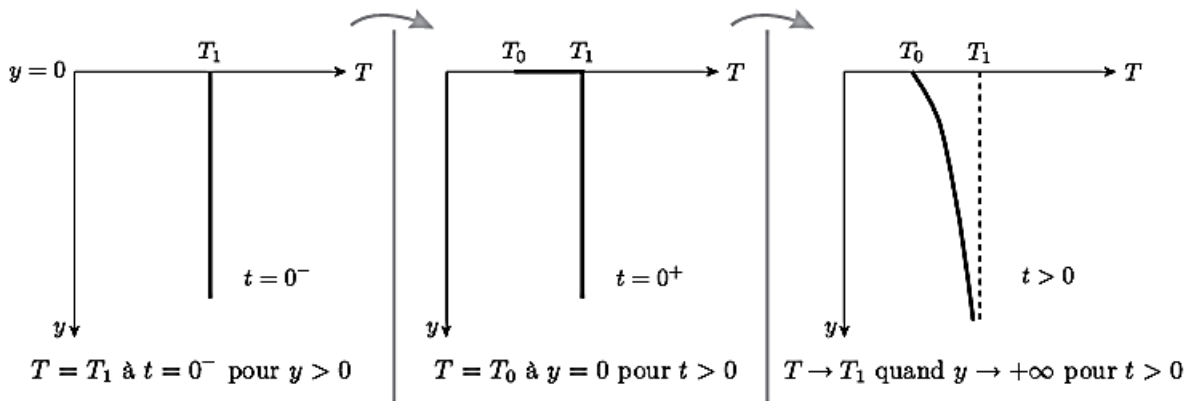


FIGURE 5 – Évolution de la température

Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire dS pendant dt , est noté $\delta\phi_Q$.

- – 24. Rappeler la définition du vecteur $\vec{j}_Q$, densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?
Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application.
En déduire la dimension de la conductivité thermique κ .

On étudie une tranche mésoscopique de sol de masse m de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c comprise entre y et $y + dy$ de surface $\mathcal{S}$.

- – 25. Quelle est l'énergie thermique δQ reçue par cette tranche entre t et $t + dt$?
Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique » ?
Établir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\frac{\partial j_Q}{\partial y}$, $\mathcal{S}$, dy et dt
puis en fonction de ρ , c , $\mathcal{S}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$, dy et dt .
En déduire l'équation de la chaleur à une dimension $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.
En déduire l'expression d'une longueur caractéristique L en fonction de D et du temps t .

On introduit la température adimensionnée

$$\theta(y, t) = \frac{T(y, t) - T_1}{T_0 - T_1}.$$

- – 26. Quelle est l'équation vérifiée par $\theta(y, t)$?
Déterminer les valeurs de $\theta(y > 0, t = 0)$, $\theta(y = 0, t > 0)$ et $\theta(y \rightarrow +\infty, t > 0)$.

On introduit une variable de similarité sans dimension $\eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}}$ et on suppose que θ n'est une fonction que de cette seule variable η .

- – 27. Montrer que

$$\frac{d^2\theta(\eta)}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta(\eta)}{d\eta} = 0.$$

- – 28. En utilisant la fonction $\varphi(\eta) = \frac{d\theta(\eta)}{d\eta}$, montrer que $\theta(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz$.

On donne $\int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire une expression de $T(y, t)$ faisant apparaître une intégrale.

La fonction $\chi \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\chi e^{-z^2} dz$ est appelée fonction d'erreur de GAUSS, elle est implémentée dans `scipy`.

Elle est souvent notée $\text{erf}(\chi)$. On peut l'appeler directement en utilisant la commande : `from scipy.special import erf`.

III.B Formation d'une croûte de lave solide.

Dans cette dernière partie on s'intéresse à une coulée de lave en fusion et à la formation d'une croûte solide à sa surface. On étudie alors l'augmentation de l'épaisseur de cette croûte en fonction du temps.

À la surface extérieure, en $y = 0$, la lave est en contact avec l'air à la température constante T_0 . La lave en fusion à la température T_f est donc soudainement portée à la température T_0 à $t = 0$. Dans ces conditions, la couche superficielle de la lave se solidifie, et on note $y_s(t)$ l'épaisseur de la couche de lave solide.

Nous devons donc résoudre l'équation de la chaleur dans l'espace $0 \leq y \leq y_s(t)$ avec comme conditions aux limites $T = T_0$ en $y = 0$, et $T = T_f$ en $y = y_s(t)$, et comme condition initiale $y_s = 0$ à $t = 0$.

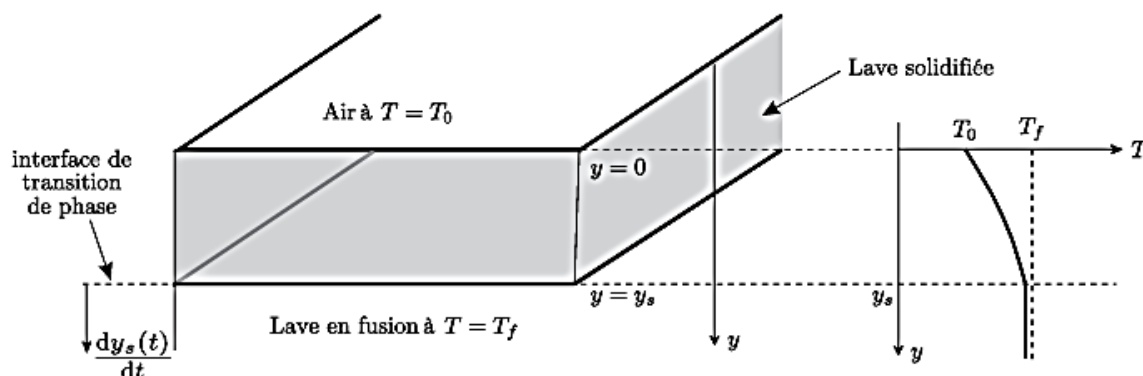


FIGURE 6 – Formation d'une croûte de lave solide

La position $y_s(t)$ de l'interface de transition de phase est une fonction a priori inconnue du temps. Comme dans la situation précédente il n'y a pas d'échelle de longueur définie dans ce problème. Pour cette raison, on travaillera également avec la variable de similarité sans dimension $\eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}}$.

On utilisera également la température adimensionnée

$$\theta(y,t) = \frac{T(y,t) - T_0}{T_f - T_0}$$

La profondeur de l'interface de solidification $y_s(t)$ doit enfin s'adapter à la longueur caractéristique de la diffusion thermique. Nous supposons que celle-ci varie proportionnellement à la racine carrée du temps, de telle sorte que : $\eta_s = \frac{y_s(t)}{2\sqrt{Dt}} = cte = \lambda$. Cette constante est inconnue et reste à déterminer.

□ – 29. En reprenant l'équation de la question 27, montrer que

$$\theta(\eta) = \frac{\text{erf}(\eta)}{\text{erf}(\lambda)}.$$

Afin d'obtenir l'expression puis la valeur de la constante λ , nous allons étudier la solidification d'une tranche de lave d'épaisseur dy_s entre les instants t et $t + dt$

□ – 30. Quelle est l'énergie δQ libérée par la solidification à la température T_f d'une tranche dy_s de lave de surface S en fonction de la masse volumique ρ de la lave en fusion et l'enthalpie de fusion massique : $\Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}$.

□ – 31. Toute l'énergie libérée par la solidification doit être évacuée par diffusion dans la lave solide car la lave en fusion reste à la température T_f . Montrer que :

$$\rho \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) \frac{dy_s(t)}{dt} = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=y_s}$$

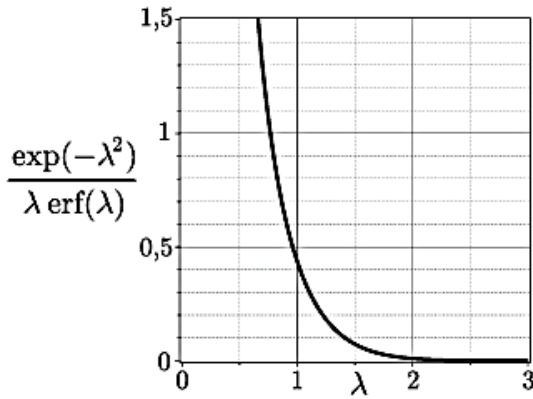


FIGURE 7 – Graphe de $\lambda \mapsto \frac{\exp(-\lambda^2)}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)}$

On donne les valeurs numériques suivantes :

- $\Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) = 400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- $c = 1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- $T_f - T_0 = 1000 \text{ K}$
- $\rho = 2600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- $D = 7 \times 10^{-7} \text{ SI}$
- $\sqrt{\pi} \sim 1,77$

- – 32. En déduire que
- $$\frac{\exp(-\lambda^2)}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)} = \frac{\sqrt{\pi}}{c(T_f - T_0)} \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f).$$
- – 33. Quel algorithme peut on utiliser pour obtenir la constante λ numériquement ?
Expliquer en quelques mots son fonctionnement.
- – 34. À l'aide de la figure 7, estimer la valeur numérique de λ .
En déduire l'épaisseur de la croûte de lave six mois après l'éruption.
Comparer votre résultat à ceux de la figure 8 tirés d'une expérience¹.

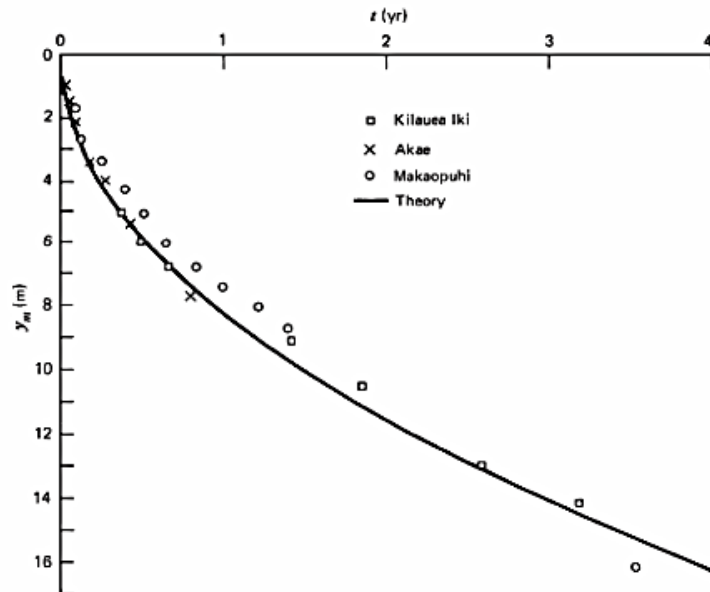


FIGURE 8 – Épaisseurs des croûtes de lave solides à la surface des lacs de lave dans les trois cratères à fosse Kilauea Iki (1959), Alae (1963) et Makaopuhi (1965) sur le volcan Kilauea, Hawaii (Wright et al., 1976), et résultat théorique.

1. Wright, T. L., Peck, D. L., and Shaw, H. R. (1976). Kilauea lava lakes : Natural laboratories for study of cooling, crystallization, and differentiation of basaltic magma. In *The Geophysics of the Pacific Ocean Basin and its Margin*, eds. G. H. Sutton, M. H. Manghnani, R. Moberly, and E. U. McAffee, vol. 19 of *Geophysical Monograph Series*, Washington, D.C. : American Geophysical Union, pp. 375–90