

Contenu :

Ex 1 : Thermodynamique des supraconducteurs	1
<i>Transferts thermiques</i>	
Ex 1 : Propulsion d'engins spatiaux	5
<i>Machine thermique à écoulement</i>	

Ex 1 : Thermodynamique des supraconducteurs

Les vecteurs sont surmontés d'une flèche ($\vec{w}$), à l'exception des vecteurs unitaires notés avec un chapeau ($\hat{u}$). Les applications numériques seront réalisées avec seulement deux chiffres significatifs. Les *données numériques* nécessaires et un *formulaire*, relatif en particulier aux coordonnées sphériques, figurent en fin d'énoncé.

Parmi les applications importantes des basses températures, on compte la supraconductivité : certains métaux ou oxydes métalliques acquièrent, en dessous d'une certaine température critique ($T < T_{sc}$) un caractère supraconducteur, le matériau pouvant conduire un courant électrique *permanent* sans aucune dissipation d'énergie. Cette propriété est par exemple mise à profit pour la production de champs magnétiques intenses.

Dans tout ce qui suit, le matériau supraconducteur est assimilé à un conducteur thermique de conductivité thermique λ de la loi de FOURIER, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c . On rappelle que, dans ce cas, l'évolution de la température à l'*intérieur* du matériau conducteur est donnée par l'équation de diffusion thermique :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T \quad \text{où } \Delta \text{ est l'opérateur laplacien.}$$

Les échanges thermiques entre ce matériau et le fluide qui l'entoure seront, dans tous les cas, décrits par la loi de NEWTON : le transfert thermique pariétal (à la surface ou sur les bords) du solide de température T vers le fluide de température T_f , par unité de temps et par unité d'aire, est $j_{\text{par}} = k(T - T_f)$ où k est une constante. Les études menées en I.A et I.B sont totalement indépendantes.

I.A Refroidissement progressif d'un supraconducteur

Le matériau (supraconducteur) étudié dans cette partie **I.A** à la forme d'une boule de rayon R , de température uniforme $T(t)$. Il est entièrement plongé dans un liquide réfrigérant qui maintient, à grande distance du matériau, la température uniforme et constante $T_0 < T_{sc}$ (cf. figure 1).

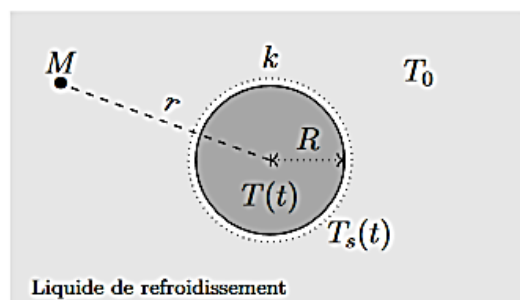


FIGURE 1 – Boule de supraconducteur en cours de refroidissement

- – 1. Donner, en les justifiant, les unités (ou les dimensions) de k et λ .
Établir, dans le cas unidimensionnel, l'équation de diffusion thermique rappelée ci-dessus.
- – 2. Rappeler l'expression de la diffusivité thermique D_{th} d'un matériau.
À quelle condition, portant sur la durée Δt du refroidissement, l'hypothèse consistant à considérer la température du matériau comme *uniforme* est-elle légitime? *On se placera dans ce cas dans la suite.*
- – 3. Exprimer en fonction des données la capacité thermique C_{th} de la boule solide, ainsi que la résistance thermique d'isolement R_{th} associée aux échanges pariétaux convecto-conductifs à sa surface.

Pour l'étude du refroidissement, il faut aussi tenir compte des transferts thermiques au sein du liquide réfrigérant. On admet que la température T_f en un point M du liquide supposé immobile ne dépend que de la distance r au centre O de la boule (figure 1). On néglige la capacité thermique massique du liquide réfrigérant ; sa conductivité thermique est notée λ' .

- – 4. Montrer que $T_f(r, t) = T_0 + [T_s(t) - T_0] R/r$
- – 5. Pourquoi est-il licite de décrire les transferts à travers le fluide en termes de résistance thermique?
Exprimer la résistance thermique R'_{th} associée au refroidissement conductif, en fonction de λ' et R .

On suppose pour finir que $\lambda' \gg Rk$.

- – 6. Déterminer l'équation d'évolution de la température $T(t)$ de la boule solide ; on posera $\tau = \frac{\rho R c}{3k}$.
- – 7. On notera $T_i = T(t = 0)$ la température initiale du matériau. Tracer l'allure de la courbe $T(t)$ et exprimer la durée Δt au bout de laquelle le matériau débute la transition conducteur $\mapsto$ supraconducteur.

I.B Refroidissement stationnaire d'un fil supraconducteur

L'absence de résistivité dans les matériaux supraconducteurs n'empêche pas, notamment dans le cadre de régimes transitoires électromagnétiques, l'existence de dissipations de puissance dues au champ électrique induit. Il s'ensuit un chauffage local du matériau supraconducteur. Le passage éventuel de celui-ci au-dessus de la température critique T_{sc} a alors un effet catastrophique : l'effet Joule apparaît, la température augmente de plus en plus et la surchauffe du bobinage peut détruire celui-ci : c'est le phénomène de *quench* (voir figure 2).

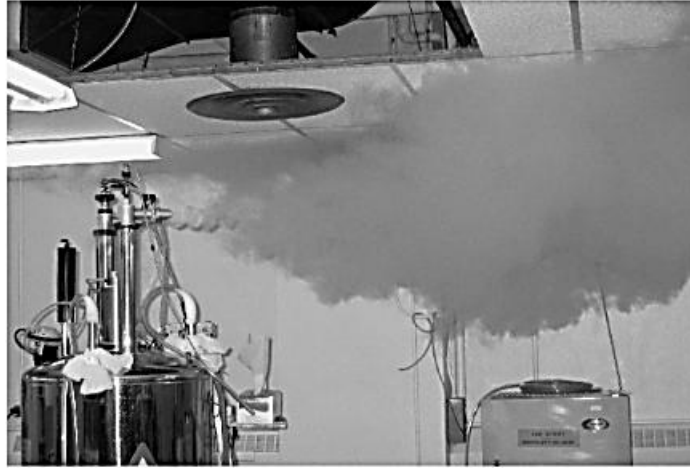


FIGURE 2 – Fuite d'hélium suite à la destruction (*quench*) d'un aimant supraconducteur utilisé pour la RMN. Département de Chimie de l'université de l'Alberta

On va dans ce qui suit s'intéresser aux conditions de refroidissement propres à éviter le phénomène de *quench*.

Le matériau supraconducteur étudié a la forme d'un fil cylindrique de rayon R , de très grande longueur (figure 3). Il est entièrement plongé dans un liquide réfrigérant qui maintient une température uniforme $T_0 < T_{sc}$, avec lequel les échanges thermiques se font selon la loi de NEWTON. La totalité du fil cylindrique est le siège d'une production de puissance électromagnétique avec la densité volumique supposée uniforme et constante p_u .

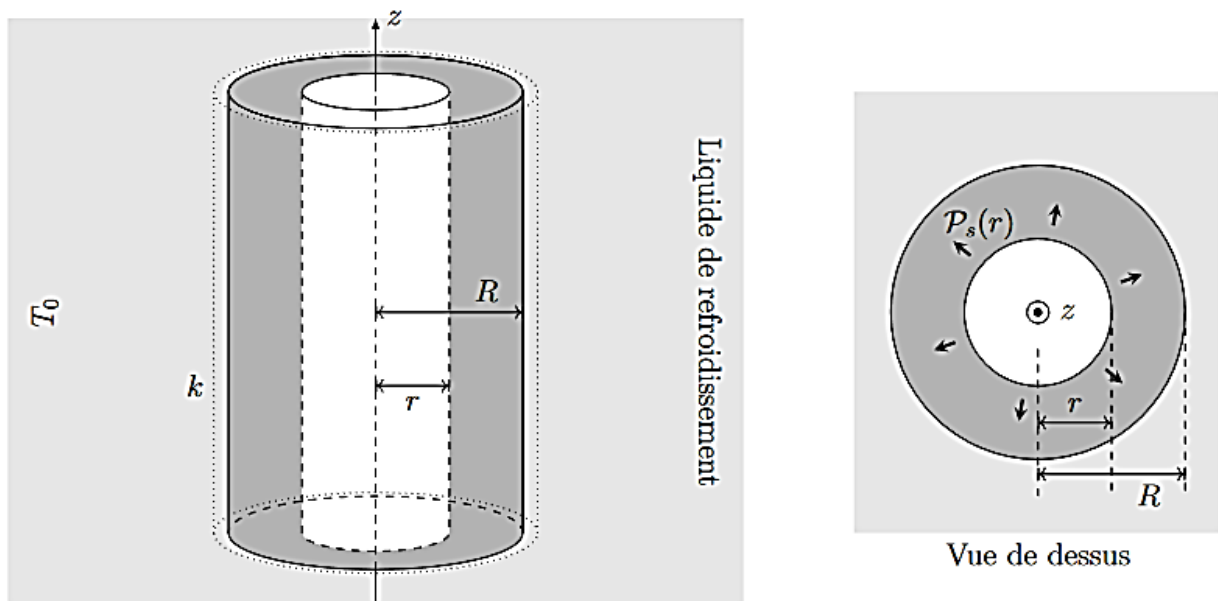
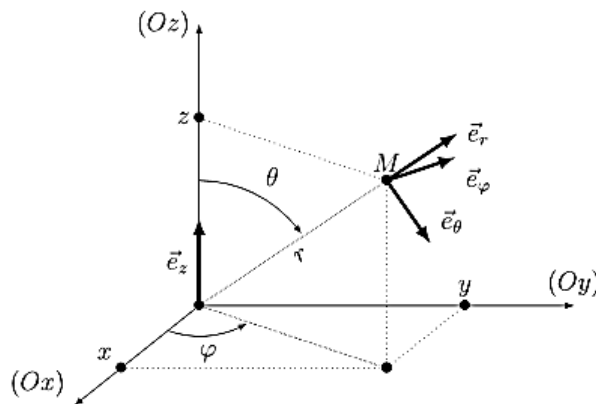


FIGURE 3 – Fil supraconducteur en régime stationnaire

- – 8. Exprimer la puissance totale $\mathcal{P}_s(r)$ évacuée par une hauteur H de la partie du fil située au plus à la distance r de l'axe avec $0 \leq r < R$, cf. figure 3.
- – 9. En déduire, en régime permanent, l'intensité $j_{th}(r)$ de la densité volumique de flux thermique conductif dans le fil.
- – 10. Déterminer l'expression de la température de surface T_s en fonction de T_0 , k , p_u et R .
- – 11. À quel endroit dans le fil la température est-elle maximale?
Déterminer l'expression de la valeur T_{max} correspondante.
- Montrer que le phénomène de *quench* ne se produit pas si p_u est inférieur à une valeur critique p_{max} que l'on exprimera.

Repérage sphérique d'un point M

Le point M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) peut aussi être repéré par ses coordonnées sphériques r , θ et φ rappelées sur le schéma ci-après :



Formulaire en coordonnées sphériques

Gradient :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{u}_\varphi$$

Laplacien scalaire :

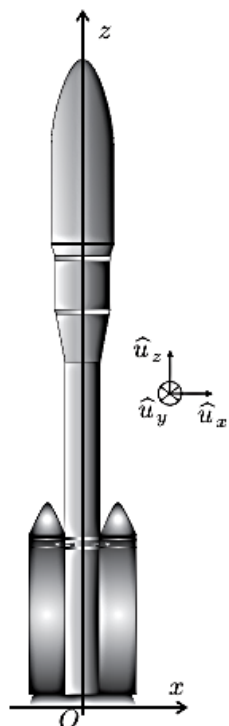
$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right]$$

Ex 1 : Propulsion d'engins spatiaux

Pour les applications numériques on utilisera 3 chiffres significatifs. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires $\hat{u}_x$ ou d'une flèche dans le cas général $\vec{v}$. A l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les grandeurs complexes sont soulignées : $\underline{z} \in \mathbb{C}$.

Données valables dans tout le problème

- Masse de l'électron, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$;
- Charge élémentaire, $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;
- Constante de Newton de la gravitation universelle, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^2$;
- Permittivité diélectrique du vide, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$;
- Constante d'Avogadro, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$;
- Rayon de la Terre, $R_t = 6,37 \cdot 10^3 \text{ km}$;
- Masse de la Terre, $M_t = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$;
- Intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre, $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- Constante de Boltzmann, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$;
- Constante de Planck, $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$;
- Constante des gaz parfaits, $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$;



I. — Généralités

I.A. — Aspect cinétique - Lois de vitesse

À l'instant $t = 0$, une fusée de masse totale m_0 décolle verticalement dans le référentiel terrestre (voir figure 1). On définit le débit de masse $D_m > 0$ des gaz brûlés, par $D_m = -\frac{dm}{dt}$, $m(t)$ désignant la masse de la fusée à un instant $t > 0$ quelconque. On note $\vec{u} = -u\hat{u}_z$ avec $u > 0$, la vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée. On note $\vec{v} = v(t)\hat{u}_z$ la vitesse de la fusée dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On suppose que D_m et u restent constants et que le champ de pesanteur g reste uniforme lors du lancement.

□ 1 — En prenant pour système la fusée à l'instant t , exprimer sa quantité de mouvement $\vec{p}_f$ aux instants t et $t + dt$. Déterminer de même la quantité de mouvement $\vec{p}_g$ à l'instant $t + dt$ du gaz éjecté pendant dt .

□ 2 — On rappelle que la dérivée temporelle d'un vecteur $\vec{w}(t)$ est définie par la relation $\frac{d\vec{w}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{w}(t + dt) - \vec{w}(t)}{dt}$. En utilisant le principe fondamental de la dynamique pour l'ensemble {fusée + gaz}, établir l'équation différentielle

$$m \frac{dv}{dt} = D_m u - mg \quad (1)$$

FIGURE 1 – Fusée

□ 3 — Identifier, dans le second membre de l'équation (1), l'intensité F de la force de poussée. À quelle condition la fusée décolle-t-elle ?

□ 4 — On nomme impulsion spécifique I_s d'un ergol (gaz propulseur) le temps pendant lequel une masse m de cet ergol peut fournir une poussée équivalente au poids ressenti par m à la surface de la terre. Exprimer I_s en fonction de u et g .

□ 5 — Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ de la fusée à l'instant t , en fonction de t , $m(t)$, g , u et de la masse de la fusée à l'instant $t = 0$ notée m_0 .

□ 6 — On suppose le vaisseau extrait de l'attraction terrestre (mission interplanétaire), sa masse totale est alors m_i et sa vitesse $\vec{v} = v_i\hat{u}_z$. On allume à nouveau un moteur pendant une durée Δt conduisant à une variation de masse $\Delta m = m_i - m_f$. Adapter l'expression précédente pour obtenir la relation de Tsiolkovski donnant l'accroissement de vitesse correspondant, noté $\Delta V = v_f - v_i$, en fonction de u , m_i et m_f .

L'exemple qui suit a pour objet de montrer l'intérêt des fusées à plusieurs étages. Soit une fusée de masse totale $m_t = 134$ tonnes constituée de deux étages. La masse totale du premier étage est $m_{t_1} = 110$ tonnes dont 100 tonnes d'ergols, et celle du second est $m_{t_2} = 24,0$ tonnes dont 20,0 tonnes d'ergols.

□ 7 — En considérant que la vitesse d'éjection des gaz $u = 4,00 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ est la même lors de la poussée de chaque étage, calculer les accroissements de vitesse apportés successivement par chacun des étages de la fusée. Comparer avec le cas d'une fusée ne possédant qu'un seul étage et la même répartition de masses, c'est-à-dire 14,0 tonnes de structure et 120 tonnes d'ergols. Les calculs seront effectués dans l'hypothèse d'une absence de pesanteur.

Une autre manière de minimiser les dépenses en carburant est d'augmenter la vitesse d'éjection, limitée à quelques kilomètres par seconde dans le cas d'une propulsion chimique comme nous le verrons dans la suite de ce problème.

□ 8 — Pour une charge utile de masse $m_u = 500 \text{ kg}$, calculer les masses m_{c_1} et m_{c_2} de carburant (la masse initiale du vaisseau est $m_0 = m_u + m_c$) à prévoir pour obtenir une variation de vitesse $\Delta V = 5,00 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, dans le cas d'une propulsion chimique ($u = 4,00 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$) et d'une propulsion ionique ($u = 20,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$).

I.B. — Aspect énergétique - Rendement propulsif du moteur fusée

□ 9 — Le vaisseau se déplace à une vitesse de norme v dans le référentiel d'étude galiléen. Exprimer l'énergie cinétique dans ce référentiel de la masse dm du gaz éjectée pendant dt , en déduire la puissance cinétique P_{jet} contenue dans le jet de gaz issu du moteur. Exprimer de même la puissance reçue par le vaisseau de la part de la force de poussée. On exprimera ces deux termes en fonction de D_m, u et v .

□ 10 — On définit le rendement propulsif comme le rapport de la puissance cinétique gagnée par le vaisseau sur la puissance totale dépensée. En admettant une conversion parfaite de l'énergie stockée dans le vaisseau en énergie cinétique du jet et du vaisseau, montrer que le rendement propulsif peut se mettre sous la forme

$$\eta(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

où l'on précisera l'expression de x en fonction des données du problème.

□ 11 — Tracer la courbe $\eta(x)$, pour quelle valeur de x le rendement propulsif est-il maximal ? Pour quelles valeurs de x le rendement est-il nul ? Montrer que l'on pouvait prévoir ces résultats sans calcul.

En fait, bien que des moteurs à vitesse d'éjection variable soient étudiés et quelquefois exploités, le rendement énergétique de la propulsion est souvent considéré comme secondaire : l'énergie fournie par une pile nucléaire ou des panneaux solaires est presque illimitée, ce qui n'est pas le cas des réserves de gaz propulsif.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Limites de la propulsion chimique

Considérons l'écoulement d'une tranche de fluide, comprise entre les sections S_1 et S_2 à l'instant t et entre S'_1 et S'_2 à l'instant $t + dt$. Durant le laps de temps dt cette tranche échange un certain travail W et une certaine quantité de chaleur Q avec l'extérieur. On note par ailleurs W' le travail échangé sans mettre en jeu les forces de pression.

□ 12 — Appliquer le premier principe de la thermodynamique à cette tranche, établir, en régime permanent, la relation entre W' , Q et les variations d'énergie massique de la tranche considérée.

On se place dans la tuyère d'un moteur fusée, lorsque l'écoulement est permanent et s'effectue à altitude constante sans travail autre que celui des forces de pression. Le gaz éjecté est considéré comme parfait, de masse molaire M , d'indice adiabatique $\gamma = 1,4$. Il provient d'une chambre de combustion, où ses température et pression sont notées T_c et P_c . Le gaz est initialement au repos, $v_c = 0$. Par ailleurs, on considère que le transit du gaz dans la tuyère est suffisamment rapide et les échanges suffisamment lents pour que l'on puisse négliger les transferts thermiques.

□ 13 — Exprimer la vitesse maximale atteinte par le gaz en sortie de la tuyère en fonction de γ , R , T_c et M . On négligera la température de sortie devant T_c .

□ 14 — Les ergols utilisés pour la propulsion sont du dihydrogène et du dioxygène, leur réaction stœchiométrique permet d'obtenir une température de combustion de l'ordre de $T_c = 3,0 \cdot 10^3$ K. Calculer la vitesse maximale d'éjection des gaz issus de la tuyère et l'impulsion spécifique correspondante.