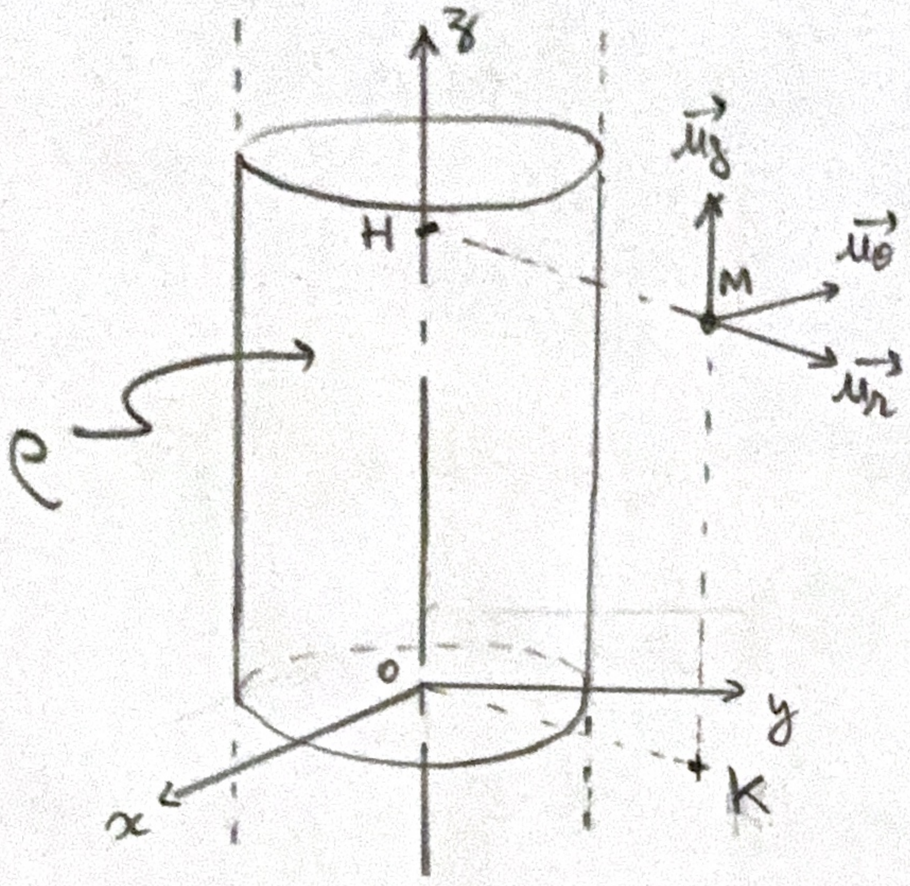
## C.3.b/ Cas du cylindre "infini" uniformément chargé en volume




Analyse des symétries de la distr de charges $(\mathcal{D}_q)$

$(\pi_1) = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ plan de sym de $(\mathcal{D}_q)$

$(\pi_2) = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ " " car cylindre "infini".

$\Rightarrow \vec{E}(M) \in \pi_1$ et $\vec{E}(M) \in \pi_2 \Rightarrow \vec{E}(M) // \vec{u}_r$ : $\boxed{\vec{E}(M) = E(M)\vec{u}_r}$.

Curie

Analyse des invariances de $(\mathcal{D}_q)$

$(\mathcal{D}_q)$ est invariante par rotat° autour de $(Oz)$

et par translat° selon $\vec{u}_z$ car cylindre "infini"

$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(M)\vec{u}_r = E(r, \theta, z)\vec{u}_r$

Curie

$\Leftrightarrow \boxed{\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r}$.

Choix d'une surface de Gauss $(\Sigma)$ :

$(\Sigma) = \underbrace{(\Sigma_1) \cup (\Sigma_{lat}) \cup (\Sigma_2)}$

ensemble des surfaces d'un cylindre $(\mathcal{C}_\Sigma)$ | d'axe $(Oz)$ de rayon $r = HM$ de hauteur $L$.

$(\Sigma_{1,2})$ disques de rayon $r$

$(\Sigma_{lat})$ surface latérale de $(\mathcal{C}_\Sigma)$.

## Calcul du flux de $\vec{E}$ au travers de $(\Sigma)$ :

$$\Phi_\Sigma = \oiint_{M\in(\Sigma)} \vec{E}(M).\vec{dS} = \underbrace{\iint_{M_1\in(\Sigma_1)} \vec{E}(M_1).\vec{dS_1}}_{\Phi_1} + \underbrace{\iint_{M_2\in(\Sigma_2)} \vec{E}(M_2).\vec{dS_2}}_{\Phi_2} + \int_{M\in(\Sigma_{lat})} \vec{E}(M).\vec{dS_{lat}}$$

avec $\begin{cases} \vec{dS}_{1/2} = dS_{1/2}(\pm\vec{u_z}) \perp \vec{E}(M_{1/2}) \parallel \vec{u_r} \Rightarrow \Phi_1 = 0 = \Phi_2 \\ \vec{dS}_{lat} = dS_{lat}.\vec{u_r} \parallel \vec{E}(M) \end{cases}$

ainsi : $\boxed{\Phi_\Sigma = \iint_{M\in(\Sigma_{lat})} E(r)\vec{u_r}.dS_{lat}.\vec{u_r} = E(r).\iint_{(\Sigma_{lat})} dS_{lat} = E(r).2\pi r.L}$

↳ à $r$ fixé

## Calcul de la charge intérieure à $(\Sigma)$ :

$$\boxed{Q_{int} = \iiint_{P\in(\mathcal{V}_\Sigma)} \rho(P).d\tau} = \begin{cases} \rho.\pi r^2.L \text{ si } r<R \\ \rho.\pi R^2.L \text{ si } r>R \end{cases}$$

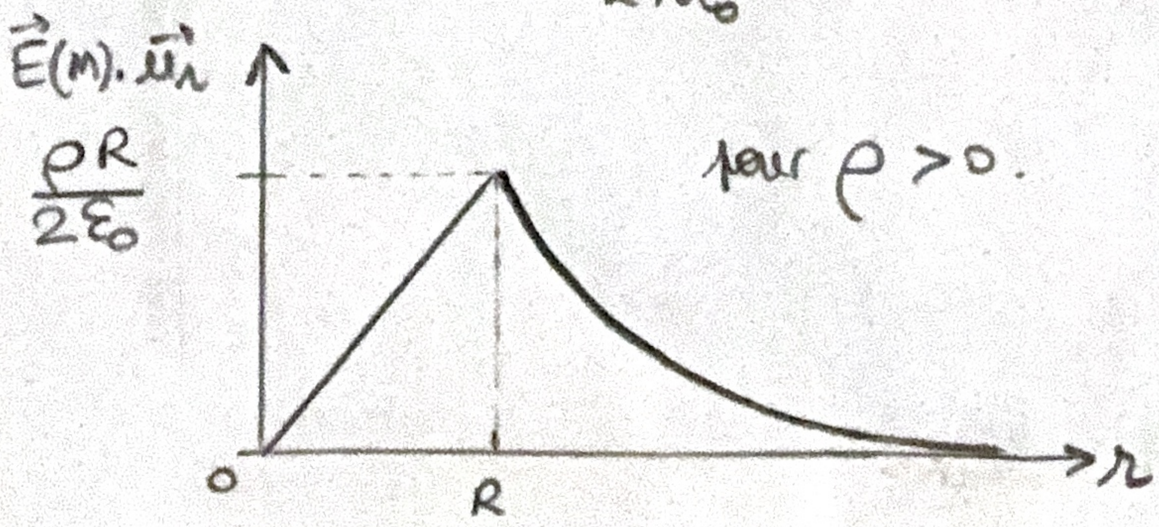
## Application du th. de Gauss :

$$\Phi_\Sigma = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad E(r).2\pi r.L = \begin{cases} \rho.\pi r^2.L/\varepsilon_0 \text{ si } r<R \\ \rho.\pi R^2.L/\varepsilon_0 \text{ si } r>R \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad E(r) = \begin{cases} \rho.r/2\varepsilon_0 \text{ si } r<R \\ \rho.R^2/2r\varepsilon_0 \text{ si } r>R \end{cases}$$

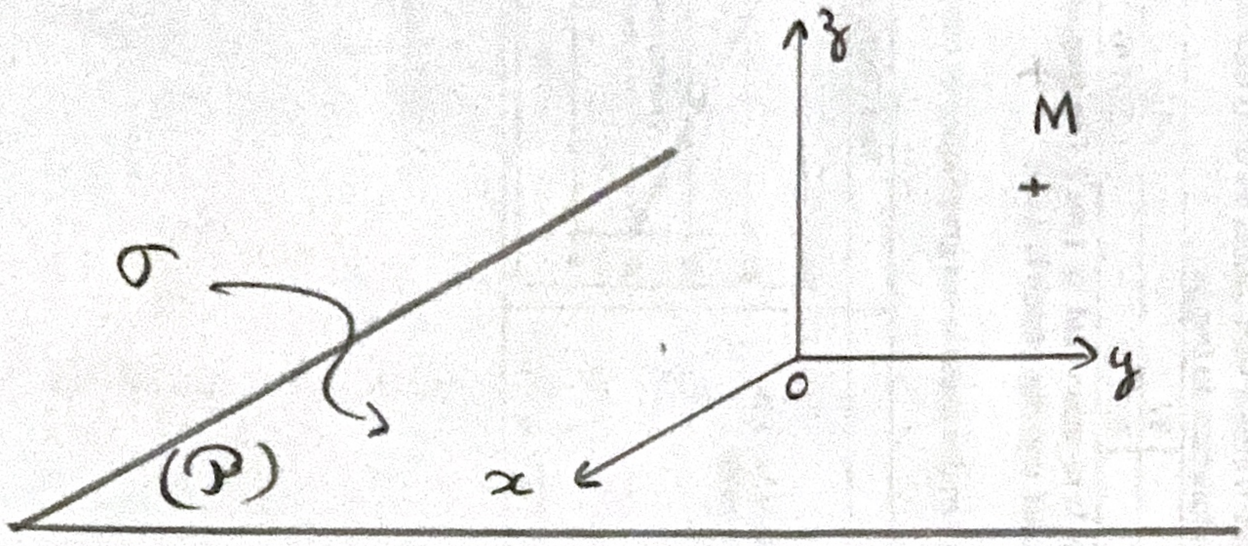
CCL : $\boxed{\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{u_r} \text{ si } r<R \\ \frac{\rho R^2}{2r\varepsilon_0}\vec{u_r} \text{ si } r>R \end{cases}}$




pour $\rho > 0$.

on vérifie la continuité de $\vec{E}(M)$ en $r = R$.

C.3. c) Cas du plan "infini" uniformément chargé en surface. Chap. 3/




Analyse des symétries de la distr de charges $(\mathcal{D}_q)$.

$(\pi_1)$ : $(M, \vec{u_z}, \vec{u_x})$ plan de sym. de $(\mathcal{D}_q)$

$(\pi_2)$ : $(M, \vec{u_z}, \vec{u_y})$ " "

$\xRightarrow[\text{Curie}}$ $\vec{E}(M) \in (\pi_1)$ et $\vec{E}(M) \in (\pi_2)$ $\Rightarrow \vec{E}(M) \parallel \vec{u_z}$ : $\boxed{\vec{E}(M) = E(M)\vec{u_z}}$.

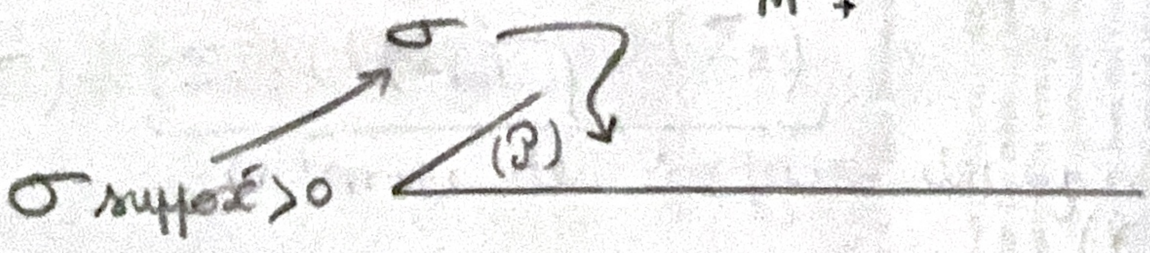
NB: on note aussi que $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y})$ est plan de sym. de $(\mathcal{D}_q)$

$\xRightarrow[\text{Curie}}$ pour M' sym de M / à $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y})$, $\vec{E}(M')$ est le sym. de $\vec{E}(M)$ par $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y})$. (*)

Analyse des invariances de $(\mathcal{D}_q)$ :

$(\mathcal{D}_q)$ est invariante par translate selon $\vec{u_x}$
et " " " $\vec{u_y}$

$\Rightarrow$ Curie $\boxed{\vec{E}(M) = E(M)\vec{u_z} = E(x,y,z)\vec{u_z} = E(z)\vec{u_z}}$




d'où $E(-z_M) = -E(z_M)$ $\Leftrightarrow$ la fº $E(z)$ est impaire

$\rightarrow$ dans la suite, on considère les points M tq $z > 0$.

## Choix de la surface de Gauss. $(\Sigma)$ :

$(\Sigma) = \underbrace{(\Sigma_1) \cup (\Sigma_{lat}) \cup (\Sigma_2)}$

ensemble des surfaces d'un cylindre $(\mathcal{C}_\Sigma)$ | d'axe $(KM)$ de rayon $R$ de hauteur $2.z$

$(\Sigma_1)$ disque de rayon $R$ de centre $M$

$(\Sigma_2)$ " " " $M'$

$(\Sigma_{lat})$ surface latérale de $(\mathcal{C}_\Sigma)$

## Calcul du flux de $\vec{E}$ au travers de $(\Sigma)$ :

$$\Phi_\Sigma = \oiint_{M \in (\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \iint_{M_1 \in (\Sigma_1)} \vec{E}(M_1) \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{M_2 \in (\Sigma_2)} \vec{E}(M_2) \cdot d\vec{S}_2 + \underbrace{\iint_{M_3 \in (\Sigma_{lat})} \vec{E}(M_3) \cdot d\vec{S}_{lat}}_{\Phi_{lat}}.$$

avec $d\vec{S}_1 = dS_1 \vec{u}_z \;/\!/\; \vec{E}(M_1)$

$d\vec{S}_2 = dS_2 (-\vec{u}_z) \;/\!/\; \vec{E}(M_2)$

$d\vec{S}_{lat} = dS_{lat}\, \vec{u}_r \perp \vec{E}(M_3) \;/\!/\; \vec{u}_z \Rightarrow \Phi_{lat} = 0.$

ainsi $\Phi_\Sigma = \iint_{M_1 \in (\Sigma_1)} E(z)\vec{u}_z \cdot dS_1 \vec{u}_z + \iint_{M_2 \in (\Sigma_2)} E(-z)\vec{u}_z \cdot dS_2 (-\vec{u}_z)$

↳ à $z$ fixé ; ↳ à $(-z)$ fixé

$$\Leftrightarrow \Phi_\Sigma = E(z) \cdot \iint_{(\Sigma_1)} dS_1 - \underbrace{E(-z)}_{-E(z)} \cdot \iint_{(\Sigma_2)} dS_2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Phi_\Sigma = 2E(z) \cdot \pi R^2}$$

## Calcul de la charge intérieure à $(\Sigma)$ :

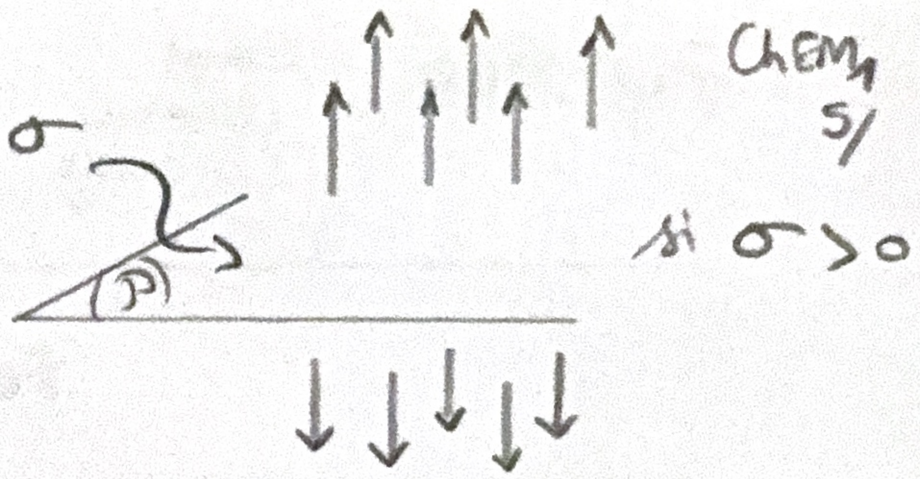
$$\boxed{Q_{int} = \iint_{P \in (\mathcal{P}) \cap (\mathcal{C}_\Sigma)} \sigma(P) \cdot dS = \sigma \cdot \pi R^2}$$

Appl° du Th. de Gauss :

$$\Phi_\Sigma = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow 2E(z) \cdot \pi R^2 = \frac{\sigma \cdot \pi R^2}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{ avec } z > 0.$$

et par imparité $E(z) = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}$ pour $z < 0$

CCL : $$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z} & \text{pour } z>0 \\ \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z} & \text{pour } z<0 \end{cases}$$



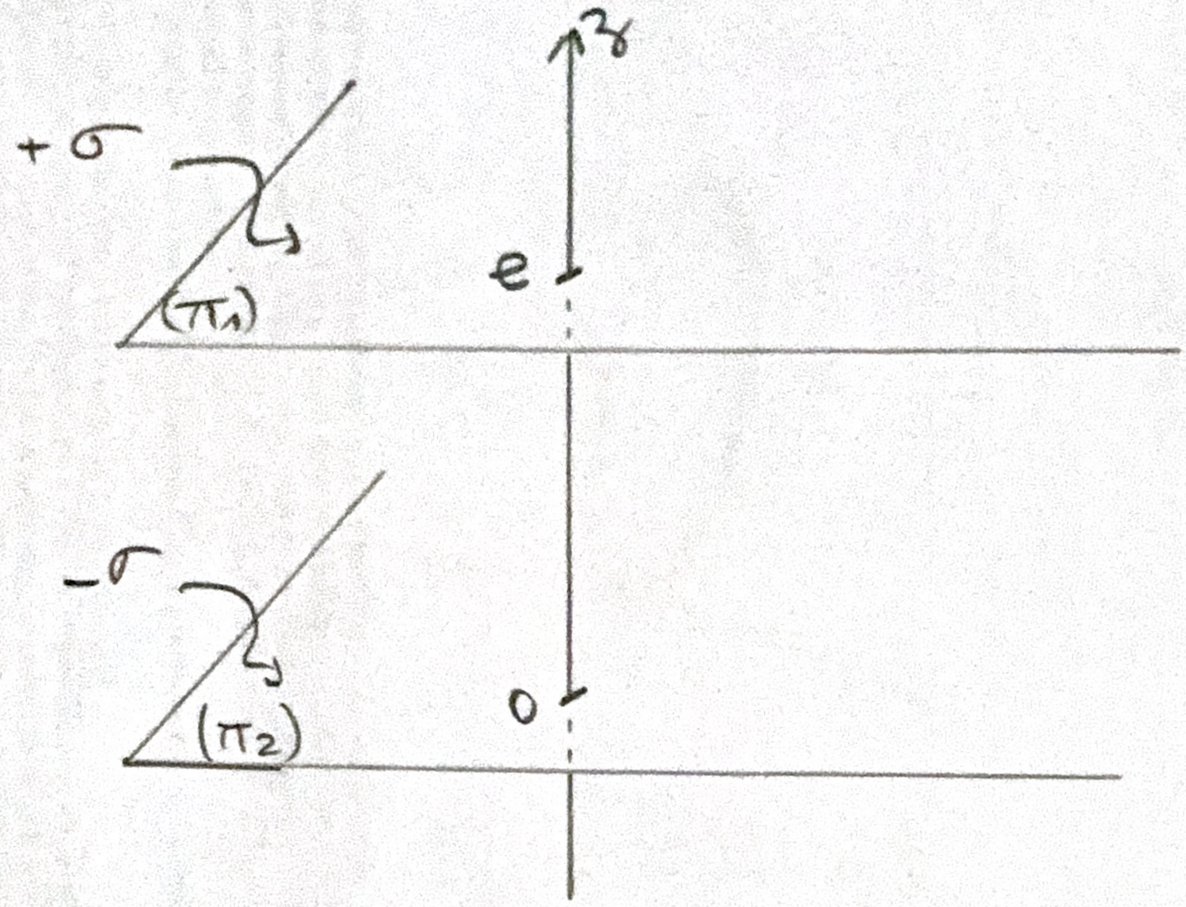

→ $\vec{E}(M)$ uniforme sur chq 1/2 espace $z>0$ / $z<0$

→ $\vec{E}(M)$ discontinu en $z=0$

↳ dû à la modélisat° : charges localisées sur une surface

en réalité charges présentes dans une couche d'épaisseur $e>0$.

## C.3.d). Cas du condensateur plan




i) D'ap. le principe de superposition, $\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$

avec $\vec{E}_i(M)$ champ créé en M par le plan $(\pi_i)$

↳ déterminé au § C.3.c).

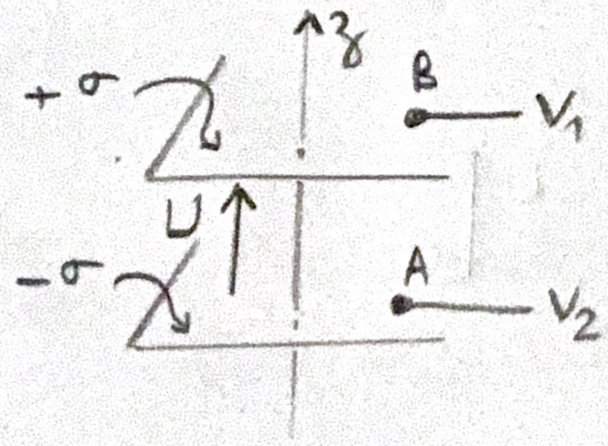
Résultat de la somme vectorielle:

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } z > e \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z} & \text{pour } z \in ]0, e[ \\ \vec{0} & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

→ $\vec{E}(M) = \vec{0}$ à l'ext. du condensateur

$\vec{E}(M)$ uniforme : $\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z}$ dans l'espace inter-armatures.

ii).



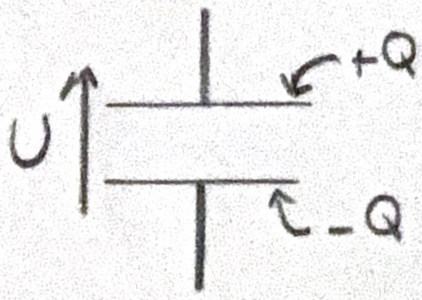

$$U = V_B - V_A = \int_A^B dV = \int_A^B -\vec{E}.\vec{dl}$$

$$\Leftrightarrow U = \int_A^B + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z}\cdot dl\,\vec{u_z} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_A^B dl$$

$$\Leftrightarrow U = \frac{\sigma . e}{\varepsilon_0}$$

avec $\sigma = \frac{Q}{S}$ d'où $U = \frac{Q.e}{S.\varepsilon_0}$

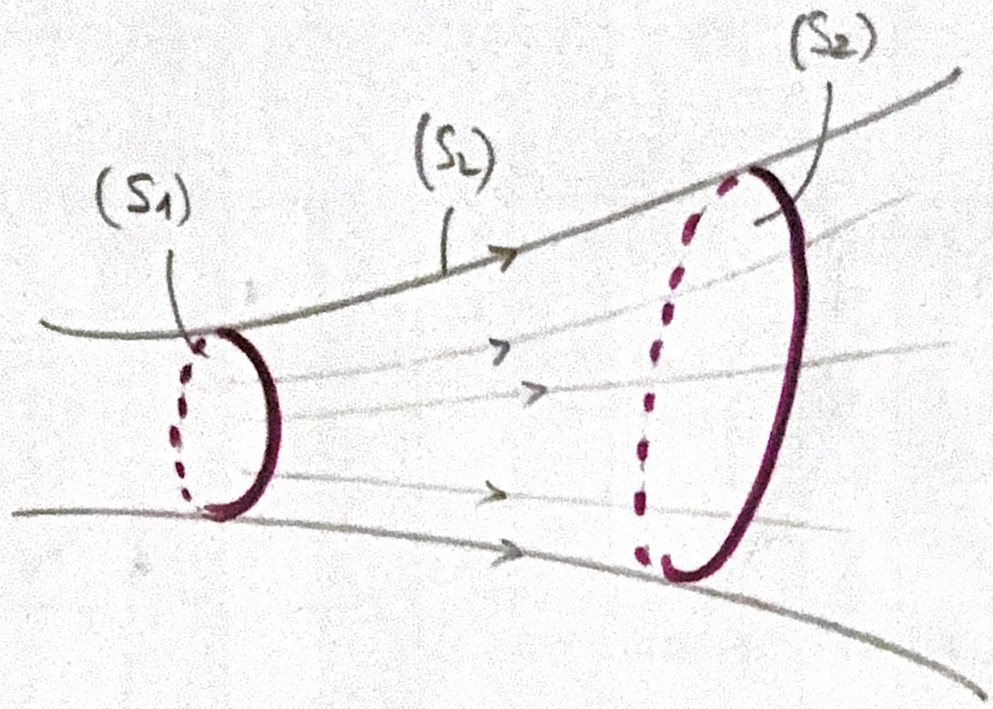
iii) Symbole élec:




on a $Q = C.U \Leftrightarrow Q = C.\frac{Q.e}{S.\varepsilon_0}$

$$\Leftrightarrow C = \frac{S.\varepsilon_0}{e}$$

# C.4. Tubes de champ. Conservate du flux




→ ldc

i.e courbes orientées tgtes en tout point à $\vec{E}$.

Rap. th. de Gauss : $\Phi_{(S)} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$ ↑ (S) ne contient aucune charge

$$\Leftrightarrow \quad \Phi_S = \oiint_{M\in(S)} \vec{E}(M).\vec{dS} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \iint_{M_1\in(S_1)} \vec{E}(M_1).\vec{dS_1} + \iint_{M_2\in(S_2)} \vec{E}(M_2).\vec{dS_2} + \underbrace{\iint_{M_L\in(S_L)} \vec{E}(M_L).\vec{dS_L}}_{\Phi_L} = 0.$$

avec $\vec{dS_L} \perp \vec{E}(M_L)$ car surface $(S_L)$ formée de ldc.

$\Rightarrow \Phi_L = 0$

d'où $\underbrace{\iint_{M_2(S_2)} \vec{E}(M_2).\vec{dS_2}}_{\text{flux sortant en 2}} = -\underbrace{\iint_{M_1\in(S_1)} \vec{E}(M_1).\vec{dS_1}}_{\text{flux entrant en 1}}$.

⇔ conservate du flux de $\vec{E}$ à travers toute sect d'un tube de champ vide de charge.

Rq : notⁿ de conservatⁿ des flux déjà introduite au ch T4/T2 MP MPI pour diffusⁿ thermique en rég. stationnaire en l'abs. de source.

# C.5. Th. de Gauss "gravitationnel" : retour sur l'analogie

| Electrostatique | | Gravitation |
|---|---|---|
| ① Expression de la force d'interaction entre systèmes ponctuels: | | |
| $\overrightarrow{F_{é,\ O\to M}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.q_O.q_M.\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$ | | $\overrightarrow{F_{g,\ O\to M}} = -\mathcal{G}.m_O.m_M.\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$ |
| ② Constante associée : | | |
| $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ | | |
| ③ Lien entre force et champ électrostatiques / gravitationnels : | | |
| $\overrightarrow{F_{é,\to M}} = q_M.\vec{E}(M)$ | | $\overrightarrow{F_{g,\to M}} = m_M.\vec{A}(M)$ |
| ④ « Source » du champ électrostatique / gravitationnel : | | |
| Distribution de charges | | |
| **⑤ Théorème de Gauss :** | | |
| $\Phi_S = \oiint_{M\in(S)} \vec{E}(M)\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ | | $\Phi_S = \oiint_{M\in(S)} \vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{dS} =$ |

➲ Exercice classique : Compléter le tableau ci-dessus pour obtenir le théorème de Gauss de la gravitation.

On en déduit que les calculs de champs effectués au § C.3 s'appliquent au cas de la gravitation.
On a notamment calculé le champ électrostatique créé par une sphère uniformément chargée en volume. On obtient donc des résultats analogues pour le champ gravitationnel créé par une planète dont la distribution de masses est à symétrie sphérique :
En particulier **pour $r > R$ (i.e. à l'extérieur de la planète), le champ est identique à celui créé par une source ponctuelle de masse $M_{tot}$ située au centre de la planète**, cf TD.
C'est pour cela qu'en mécanique, il est légitime **d'assimiler les astres à des masses ponctuelles**.