

Durée 4h

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la **clarté**, à la **précision** et à la **concision** de la **rédaction**. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un **stylo noir ou bleu foncé non effaçable** pour la rédaction de votre composition ; **d'autres couleurs, excepté le vert**, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les **schémas** et la **mise en évidence des résultats**.
- **Ne pas utiliser de correcteur**.
- **Numéroter** les copies : "i/nombre total".
- **Respecter les notations** de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la **numérotation de la question posée**.
- Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition.

Le sujet comprend un document réponse p.15-16 à rendre avec la copie.

Ex 1 : L'énergie électrique d'origine nucléaire

Le but de ce problème est de regarder, en tant que scientifique non expert du sujet, quelques aspects d'une centrale nucléaire de type EPR (signifiant Evolutionary Pressurised water Reactor), qui est un type de *réacteur à eau pressurisée* (REP).

Les 19 centrales nucléaires actuellement en fonctionnement en France ont été globalement construites sur le même mode. Tous leurs réacteurs utilisent la même technologie, dans laquelle de l'eau sous pression sert à transporter la chaleur produite par les réactions nucléaires. [...]

Les centrales nucléaires regroupent un total de 58 réacteurs dont 34 produisent chacun une puissance électrique de 900 MégaWatt (MWe) — 900 MWe permet d'alimenter près de 500 000 foyers. À cela s'ajoutent 20 réacteurs de 1300 MWe, tandis que les quatre derniers délivrent 1450 MWe. Un 59ème réacteur est actuellement en construction à Flamanville, dans la Manche. De type EPR (Evolutionary Pressurised water Reactor), il développera une puissance électrique de l'ordre de 1600 MWe. Actuellement, ces installations produisent près de 80 % de l'électricité produite en France.

Autorité de Sûreté Nucléaire, informations mises à jour en février 2018

Les trois parties du problème sont largement indépendantes, mais les données numériques fournies dans les différentes parties sont susceptibles d'être utilisées dans toutes les parties.

Les applications numériques seront faites avec un nombre de chiffres significatifs adapté. Les données numériques sont fournies en fin d'exercice p. 9 et 10. Un document réponse est à rendre avec la copie p. 15-16.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

I L'uranium, source d'énergie

I.A – L'uranium naturel

L'uranium est l'élément chimique de numéro atomique 92, de symbole U. Il fait partie de la famille des actinides.

L'uranium est le 48^e élément le plus abondant dans la croûte terrestre, son abondance est supérieure à celle de l'argent, comparable à celle du molybdène ou de l'arsenic, mais quatre fois inférieure à celle du thorium. Il se trouve partout à l'état de traces, y compris dans l'eau de mer.

C'est un métal lourd radioactif (émetteur alpha) de période très longue ($\sim 4,4688$ milliards d'années pour l'uranium 238 et $\sim 703,8$ millions pour l'uranium 235). Sa radioactivité, additionnée à celle de ses descendants dans sa chaîne de désintégration, développe une puissance de 0,082 watt par tonne d'uranium, ce qui en fait, avec le thorium 232 (quatre fois plus abondant, mais trois fois moins radioactif) et le potassium 40, la principale source de chaleur qui tend à maintenir les hautes températures du manteau terrestre, en ralentissant de beaucoup son refroidissement.

L'isotope ^{235}U est le seul isotope fissile naturel. Sa fission libère une énergie voisine de 202,8 MeV par atome fissionné dont 9,6 MeV d'énergie non récupérable, communiquée aux neutrinos produits lors de la fission. L'énergie récupérable est plus d'un million de fois supérieure à celle des combustibles fossiles pour une masse équivalente. De ce fait, l'uranium est devenu la principale matière première utilisée par l'industrie nucléaire.

Le minerai d'uranium qui a été exploité sur Terre possède une teneur en uranium pouvant varier de 0,1 % à 20 %. L'uranium est dit *naturel* quand il est constitué d'isotopes dans leur proportion d'origine (identique pour tous les minerais d'uranium) : soit 99,2743 % d'uranium 238 accompagné de 0,7202 % d'uranium 235 et d'une quantité infime d'isotope 234 (0,0055 %).

Wikipédia

Dans la suite nous négligerons l'apport de l'uranium 234 et considérerons que les proportions *naturelles* de l'uranium sont de 99,28 % pour ^{238}U et de 0,72 % pour ^{235}U . De plus, le terme « proportion d'uranium 235 » sera *toujours* à comprendre comme la proportion d'uranium 235 par rapport à tout l'uranium présent et non pas la proportion d'uranium 235 dans toute la matière présente (au cas où celle-ci ne serait pas composée uniquement d'uranium).

I.A.2) Radioactivité naturelle au XXI^e siècle

De nos jours, on estime qu'une parcelle carrée de 20 mètres de côté contient environ 24 kg d'uranium naturel sur une profondeur de 10 mètres.

Q 7. Estimer la puissance dégagée par la radioactivité de l'uranium sur une telle parcelle. Comparer avec la valeur donnée par l'extrait ci-dessus (0,082 watt par tonne d'uranium).

I.B – Le combustible nucléaire

L'uranium, une fois extrait, est d'abord enrichi en uranium 235 afin de pouvoir servir de combustible. Il est ensuite transformé en dioxyde d'uranium.

I.B.1) Cristal de dioxyde d'uranium

Le cristal de dioxyde d'uranium UO_2 est un cristal ionique (U^{4+} , O^{2-}) qui a la structure d'une fluorite (CaF_2), à savoir :

- les ions d'uranium forment un réseau cubique face centrée ;
- les ions d'oxygène forment un réseau cubique.

La maille correspondante est visible sur la figure A du document réponse.

Q 8. Indiquer sur cette figure la position des ions U^{4+} et O^{2-} . Comment s'appellent les sites du réseau de l'uranium occupés par les ions d'oxygène ?

Q 9. Vérifier que le nombre d'ions est cohérent avec la formule UO_2 .

Q 10. Quelle est la longueur du côté de la maille ? Commenter ce résultat. Comparer cette longueur avec les rayons ioniques des ions uranium et oxygène qui valent respectivement 97 pm et 140 pm.

I.B.2) Combustible utilisé dans les centrales

Le dioxyde d'uranium enrichi à 5 % est d'abord produit sous forme de poudre avant d'être compacté en *pastilles* de 7,5 g (cf figure 1).



Figure 1 Pastilles de combustible d'uranium

Q 11. Quelle est l'énergie E_0 que va dégager cette pastille combustible si tout l'uranium 235 se désintègre naturellement (par radioactivité α) ? Un ordre de grandeur est attendu.

La radioactivité naturelle (radioactivité α) n'est pas utile au fonctionnement d'une centrale nucléaire qui exploite plutôt la fission : lorsqu'un neutron de faible énergie cinétique, dit *lent*, entre en collision avec un noyau d'uranium 235, celui-ci donne deux noyaux fils, en général du krypton 93 et du baryum 140 ou bien du strontium 94 et du xénon 140. Ces deux noyaux emportent de l'énergie sous forme cinétique (environ 200 MeV) qu'ils restituent au matériau dans lequel ils sont présents. En plus de ces noyaux, la fission du noyau d'uranium libère deux ou trois neutrons qui vont, à leur tour, entrer en collision avec un autre noyau d'uranium ou être absorbés par un autre atome. Lorsque les réactions de fission sont nombreuses, le phénomène peut s'emballer car il y a plus de neutrons produits que de neutrons absorbés (on parle de *divergence*). En revanche, si les neutrons sont trop souvent absorbés par d'autres noyaux que l'uranium 235, la réaction s'arrête. Le fonctionnement optimal d'une centrale se fait au point d'équilibre : il est nécessaire qu'il y ait suffisamment de neutrons produits pour engendrer des réactions de fission en chaîne, mais sans excès de manière à éviter l'emballement.

Q 12. Un foyer composé de 4 personnes habitant dans une maison de 150 m² avec chauffage électrique consomme en moyenne une énergie électrique correspondant à 20 000 kW·h en une année. Évaluer les masses de combustible nécessaires pour alimenter un tel foyer en électricité pendant un an dans le cas d'une centrale au charbon, puis d'une centrale nucléaire de type REP. Commenter.

II Le cœur du réacteur

Le principe de fonctionnement d'une centrale nucléaire est représenté figure 2. Le réacteur chauffe une certaine quantité d'eau qui circule, en boucle fermée, dans le circuit *primaire*. L'eau du circuit primaire permet de vaporiser l'eau contenue dans le circuit *secondaire* dont la circulation assure la rotation de turbines couplées à des alternateurs. Le circuit *tertiaire* est utilisé pour liquéfier l'eau du circuit secondaire en sortie des turbines, avant qu'elle ne soit à nouveau injectée dans les générateurs de vapeur.

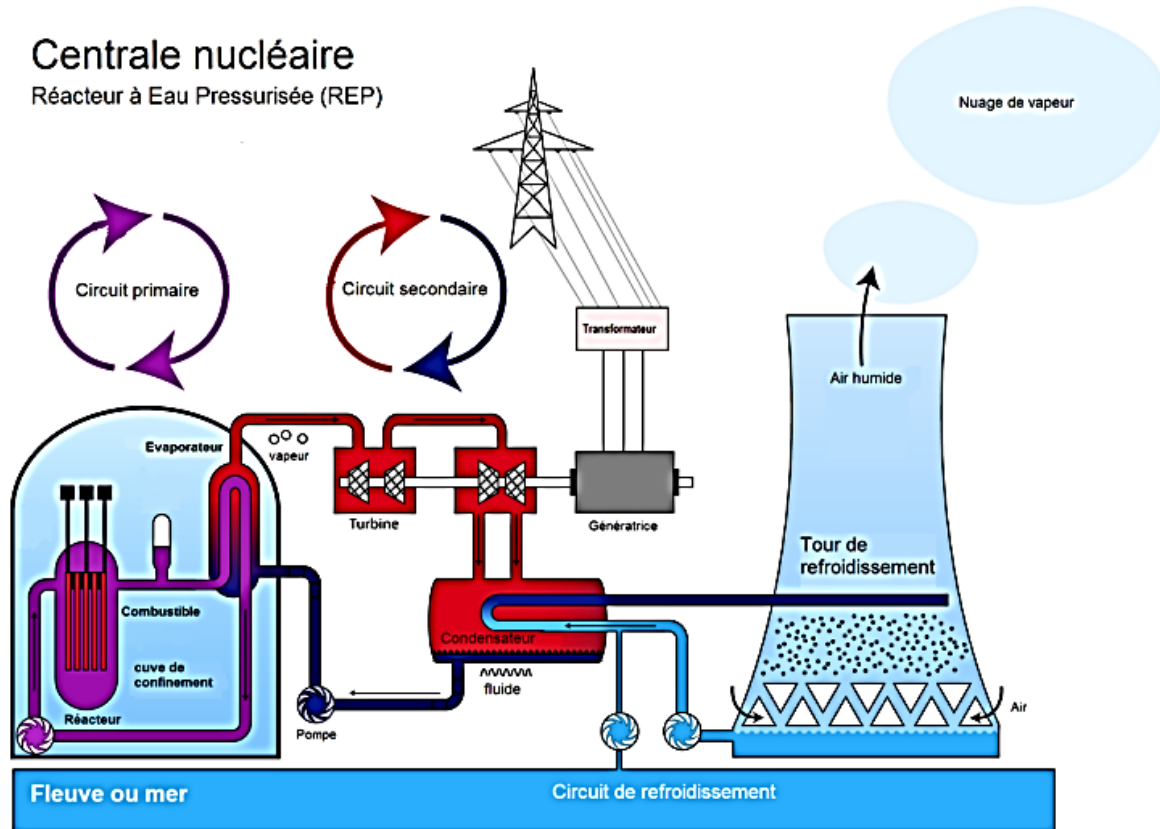


Figure 2 Principe d'une centrale nucléaire (source : Wikipedia)

Au cœur d'une tranche de centrale (qui comporte en général 2 ou 3 tranches), le combustible nucléaire est sous forme de pastilles cylindriques (figure 1). Ces pastilles sont regroupées en *crayons*, eux-même réunis en *assemblages* (figure 3). Un assemblage contient 600 kg de dioxyde d'uranium enrichi. Un cœur de réacteur est l'association de 241 assemblages (figure 4).

II.A – Quelques analyses préliminaires

Q 13. Pourquoi produire le combustible sous forme de pastilles au lieu de cylindres prêts à mettre dans la gaine du crayon ? Quel est l'intérêt de faire une multitude de petits crayons de combustibles plutôt que quelques-uns, plus gros ?

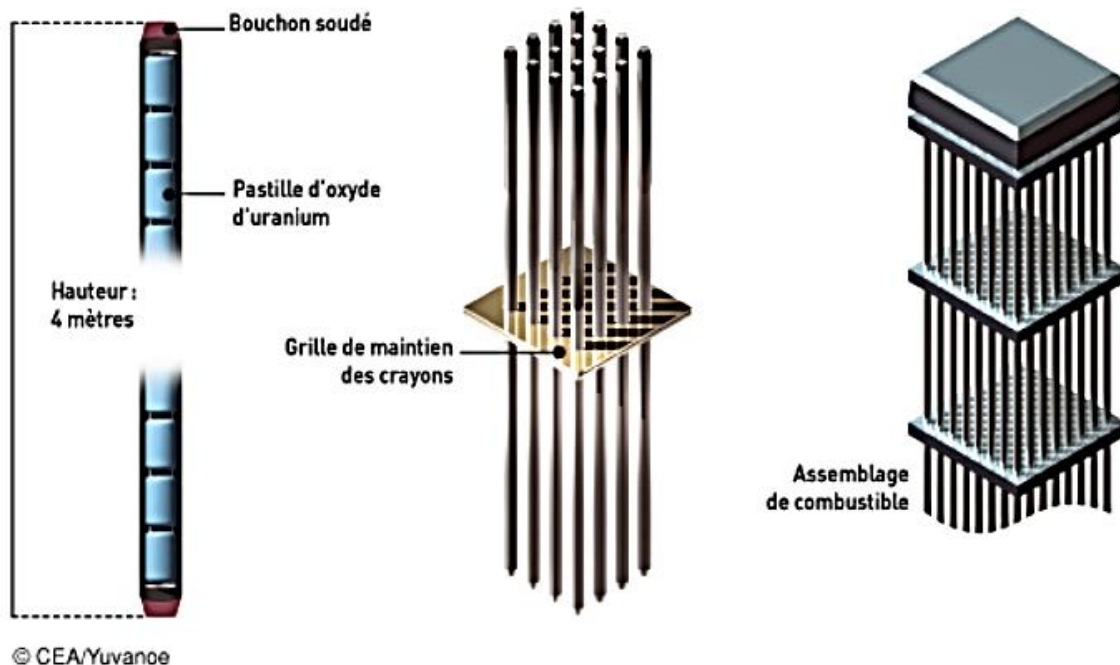


Figure 3 Assemblage du combustible au cœur d'une centrale

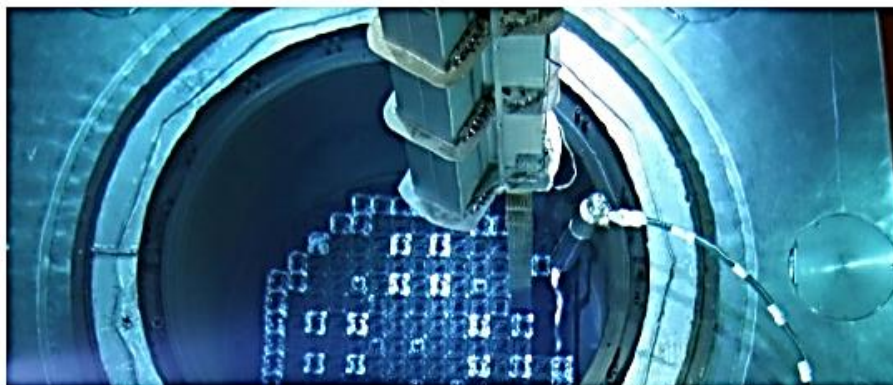


Figure 4 Vue du cœur d'un réacteur

Q 14. Un assemblage est un quadrillage de 17×17 emplacements. Or, il ne contient que 265 crayons de combustible. À quoi peuvent servir les autres emplacements ?

Q 15. Vérifier que la surface totale d'échange entre l'eau du circuit primaire et les crayons indiquée dans les données (environ 8000 m^2) est cohérente avec la structure du cœur du réacteur.

II.B – Approche théorique

II.B.1) Modélisation

On modélise un crayon radioactif par un cylindre d'axe (Oz) et de rayon R dans lequel les réactions nucléaires produisent une puissance volumique uniforme. Le régime est considéré stationnaire.

On utilise le système de coordonnées cylindriques d'axe (Oz) : (r, θ, z) .

Q 16. Justifier que la température est une fonction de r uniquement. Que peut-on en déduire sur la densité de courant thermique $\vec{j}$?

Q 17. La figure 5 présente quatre profils de température à l'intérieur du crayon, ainsi que les expressions analytiques de $T(r)$ associées (pour chacune de ces expressions, la constante K est une constante positive). Parmi ces profils, quel est le seul susceptible de correspondre au crayon radioactif étudié ? Justifier votre réponse à partir d'arguments qualitatifs uniquement (sans aucun calcul).

Q 18. En admettant que le profil identifié représente réellement le champ de température à l'intérieur du crayon, relier la constante K aux grandeurs physiques pertinentes dont les valeurs numériques sont données dans le document réponse.

Q 19. À l'aide des caractéristiques du cœur données dans le document réponse, proposer une estimation de la puissance volumique libérée dans le combustible lorsque le réacteur est en fonctionnement nominal.

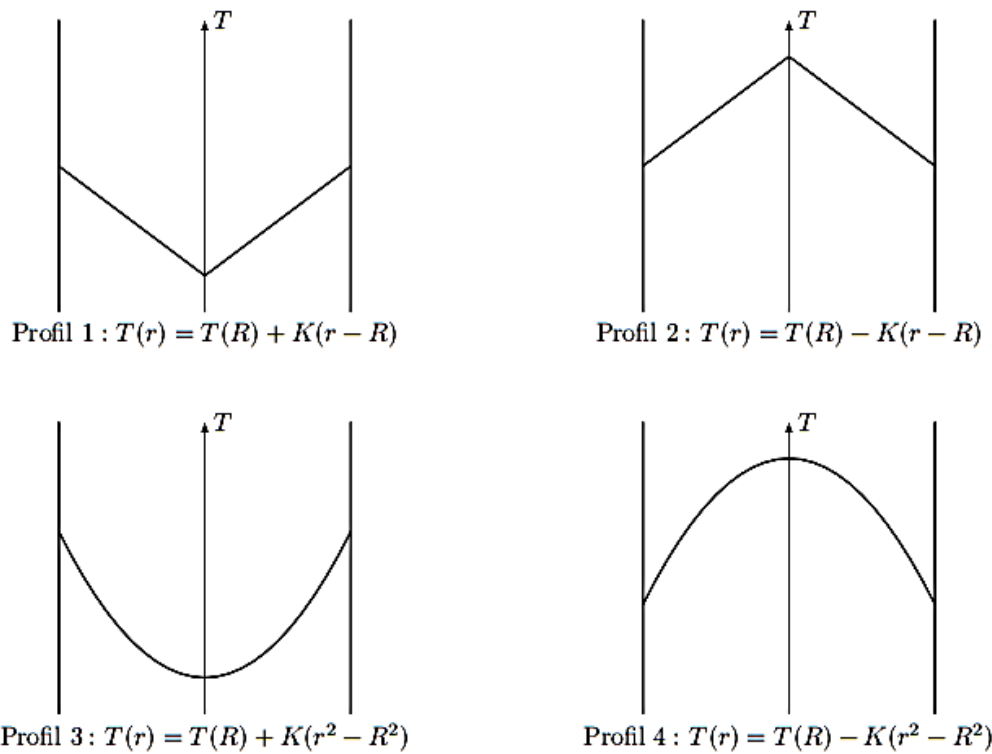


Figure 5

Q 20. Proposer une définition plausible de la *puissance linéique*. Confirmer (ou non) cette définition par un calcul d'ordre de grandeur (une page maximum). Comment expliquer l'existence d'une puissance linéique maximale ?

Q 21. En supposant que la température en $r = R$ est celle de l'eau au voisinage des crayons, calculer numériquement la température au « cœur » du crayon (en $r = 0$). Commenter.

II.B.2) Amélioration du modèle

Q 22. Pourquoi la température en $r = R$ ne vaut-elle pas exactement la température de l'eau indiquée dans les données ?

Q 23. À l'aide d'une démarche à préciser (une page maximum), proposer un modèle conduisant à une meilleure estimation de la température au cœur du crayon en tenant compte du constat précédent. Ne pas hésiter, pour cela, à introduire les grandeurs physiques pertinentes en proposant, le cas échéant, des ordres de grandeur raisonnables.

Q 24. En réalité, la conductivité thermique du dioxyde d'uranium n'est pas indépendante de la température mais possède le profil donné figure 6. Expliquer, de manière qualitative mais argumentée, de quelle manière est modifié le profil de température et, en particulier, si on peut s'attendre à une température plus élevée ou plus basse que celle calculée précédemment.

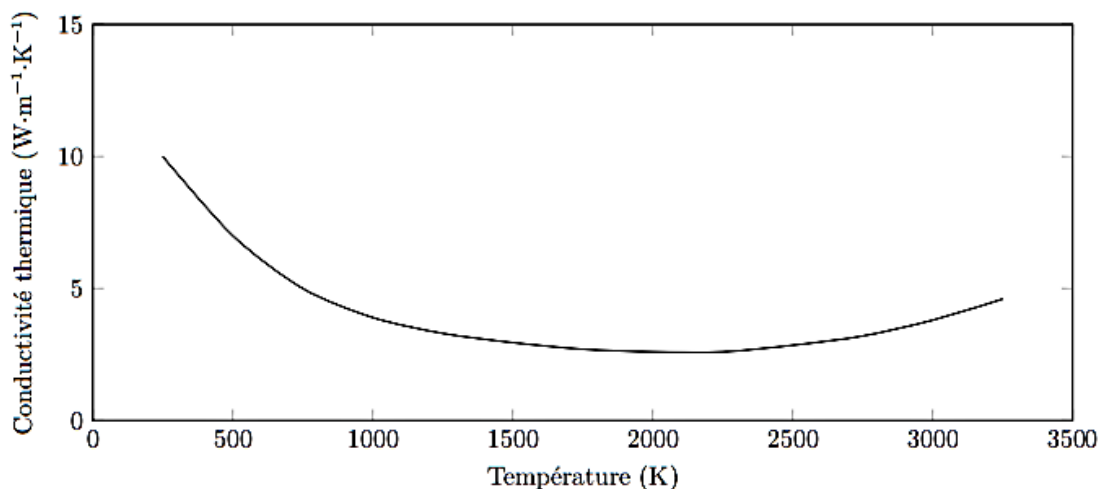


Figure 6

III Du réacteur aux turbines

Au niveau du circuit secondaire, la centrale fonctionne comme représenté sur le schéma de la figure 7. Dans ce schéma x désigne le titre de vapeur, c'est à dire le rapport entre le débit massique de vapeur d'eau et le débit massique total (liquide et vapeur).

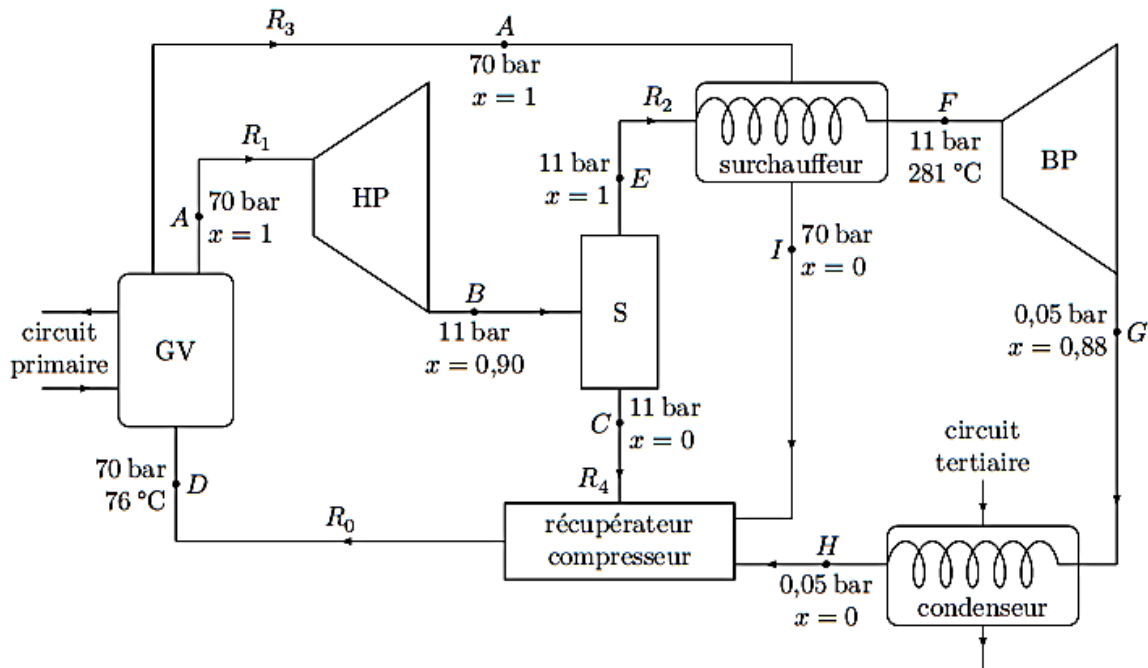


Figure 7

Les échanges d'énergie avec le circuit primaire se font au niveau du générateur de vapeur (GV), dans lequel l'eau du circuit secondaire entre avec un débit R_0 , initialement à l'état (D). À la sortie du générateur de vapeur, l'eau est sous forme de vapeur saturante (état A). La plus grande partie (débit R_1) est dirigée vers la turbine haute pression (HP) ; une autre (débit R_3) est destinée au surchauffeur. Dans la turbine, l'eau passe de l'état (A) à l'état (B). De là, l'eau passe dans un séparateur dont le seul rôle est de répartir les deux phases par gravité. En haut de ce séparateur sort de la vapeur saturante dans l'état (E), avec un débit R_2 , qui est ensuite surchauffée jusqu'à $T_F = 281^\circ\text{C}$ grâce à la liquéfaction totale jusqu'à l'état (I) d'une partie de la vapeur issue du générateur de vapeur. Une fois surchauffée, la vapeur dans l'état (F) passe dans une turbine basse pression (BP) dont elle sort à l'état (G). Elle est ensuite entièrement liquéfiée par échange thermique avec le circuit tertiaire (en général, de l'eau de rivière ou de mer) jusqu'à l'état (H). Avant d'être réinjectée dans le générateur de vapeur, un récupérateur-compresseur, récolte l'eau entièrement liquide issue du séparateur, du surchauffeur et du condenseur et les comprime jusqu'à l'état (D).

III.A – Approche générale

Soit un élément quelconque, avec une seule entrée et une seule sortie, pour lequel on note :

- R le débit massique de fluide à travers l'élément ;
- P_u la puissance fournie au fluide par les forces autres que pressantes ;
- P_{th} , la puissance thermique fournie au fluide ;
- h_e , l'enthalpie massique du fluide juste avant l'entrée ;
- h_s , l'enthalpie massique du fluide juste après la sortie.

Q 25. Montrer que $R(h_s - h_e) = P_u + P_{th}$.

Dans le cas d'un élément comportant plusieurs entrées et sorties, le bilan précédent se généralise en

$$\sum_{i(\text{sorties})} R_i h_{s,i} - \sum_{j(\text{entrées})} R_j h_{e,j} = P_u + P_{th}.$$

III.B – Analyse du cycle

Q 26. Placer tous les états A, B, C, ..., I sur le diagramme (T, s) de l'eau fourni dans le document réponse.

III.B.1) Enthalpies massiques

Q 27. Par lecture graphique, déterminer la valeur de l'enthalpie massique h_F de l'eau dans l'état (F).

Q 28. Calculer les valeurs des enthalpies massiques h_B et h_G à partir des données numériques fournies.

Q 29. Estimer la valeur de l'enthalpie massique h_D .

III.B.2) Calcul des différents débits

Q 30. Exprimer les relations simples qui existent entre les débits R_0 , R_1 et R_3 , puis entre R_2 , R_1 et x_B (titre de vapeur au point B) et enfin entre R_4 , R_1 et x_B .

Q 31. Le surchauffeur est un simple échangeur de chaleur entre deux fluides ; il n'y a donc aucune puissance mécanique mise en jeu. En supposant que le surchauffeur soit parfaitement calorifugé, trouver une relation entre les débits R_2 et R_3 faisant intervenir des enthalpies massiques à préciser.

Q 32. Calculer numériquement les différents débits.

III.B.3) Au niveau des turbines

Les machines réalisant la compression ou la détente d'un fluide ont une conception très compacte pour des raisons de poids, d'encombrement et de coût. Pour les mêmes raisons, elles tournent très vite (plusieurs milliers de tours par minute).

Q 33. Les transformations dans les turbines HP et BP sont-elles réversibles ? Justifier soigneusement votre réponse. Dans le cas où les transformations sont irréversibles, quelles sont les causes de cette irréversibilité ?

III.B.4) Au niveau du condenseur

Le condenseur fonctionne de la même manière que le surchauffeur.

Q 34. Déterminer l'expression du débit que doit avoir le circuit tertiaire pour que son élévation de température ne dépasse pas 5 °C. Estimer puis commenter son ordre de grandeur. Justifier l'existence d'une limite supérieure de l'élévation de température.

III.C – Rendement du cycle

III.C.1) Rendement effectif

Q 35. Définir et calculer un rendement pour l'ensemble du circuit secondaire. Comparer ce rendement à d'autres rendements connus. (Pour information, chaque réacteur est en fait associé à 4 circuits secondaires identiques.)

III.C.2) Intérêt du surchauffeur

Q 36. À l'aide d'une démarche à préciser, déterminer une estimation du rendement que l'on obtiendrait en l'absence de surchauffeur. Commenter.

DONNEES Ex 1 - L'énergie électrique d'origine nucléaire

◆ Formulaire

Opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques

Pour un champ scalaire $f = f(r, \theta, z)$:

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Pour un champ vectoriel $\vec{A} = A_r(r, \theta, z) \vec{u}_r + A_\theta(r, \theta, z) \vec{u}_\theta + A_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

◆ Données numériques

L'uranium source d'énergie

Uranium 235	
masse atomique ^{235}U	235,04 g·mol ⁻¹
abondance naturelle ^{235}U	0,72 %
période radioactive ^{235}U	703,8 × 10 ⁶ années
Uranium 238	
masse atomique ^{238}U	238,04 g·mol ⁻¹
abondance naturelle ^{238}U	99,28 %
période radioactive ^{238}U	4,468 × 10 ⁹ années
Désintégration α	
énergie libérée ^{235}U	4,68 MeV
énergie libérée ^{238}U	4,27 MeV
Fission	
énergie libérée ^{235}U	2,0 × 10 ² MeV
Oxygène	
masse molaire	16 g·mol ⁻¹
Constante d'Avogadro	
N_A	6,02 × 10 ²³ mol ⁻¹

Dioxyde d'Uranium enrichi	
proportion ^{235}U	5,0 %
proportion ^{238}U	95,0 %
masse volumique du cristal	11,0 g·cm ⁻³
Pastille nucléaire	
forme géométrique	cylindre
hauteur	≈ 14 mm
diamètre	8,19 mm
Unité énergétique	
1 eV	1,60 × 10 ⁻¹⁹ J
1 tonne équivalent charbon	29,3 × 10 ⁹ J
1 tonne équivalent pétrole	41,9 × 10 ⁹ J

Sur les caractéristiques du cœur

Structure	
réseau assemblage	carré 17×17 crayons
nombre de crayons de combustible	265
diamètre d'un crayon	9,5 mm
épaisseur de la gaine d'un crayon	0,57 mm
nombre d'assemblages	241 par cœur
masse d'UO ₂ par assemblage	600 kg
Combustible (dioxyde d'uranium)	
conductivité thermique moyenne	5,0 W·m ⁻¹ ·K ⁻¹
température de fusion	2865 °C

Circuit primaire	
débit par boucle	27,2 × 10 ³ m ³ ·h ⁻¹
nombre de boucles	4
pression	155 bar
température à l'entrée	296 °C
température au voisinage des crayons	332 °C
température à la sortie	330 °C
surface d'échange	8000 m ²
densité de courant thermique en périphérie d'un crayon (fonctionnement nominal)	157 W·cm ⁻²
puissance linéique (fonctionnement nominal)	470 W·cm ⁻¹
puissance linéique maximale à ne pas dépasser	590 W·cm ⁻¹

Sur les caractéristiques du circuit secondaire

générateur de vapeur $D \rightarrow A$	
débit de vapeur	640 kg.s ⁻¹
état physique à l'entrée	liquide
température entrée	76 °C
état physique à la sortie	vapeur saturante
pression	70 bar
turbine haute pression $A \rightarrow B$	
état physique à l'entrée	vapeur saturante
pression entrée	70 bar
état physique à la sortie	vapeur humide
titre en vapeur à la sortie	0,90
pression sortie	11 bar
turbine basse pression $F \rightarrow G$	
état physique à l'entrée	vapeur sèche
température entrée	250 °C
pression entrée	11 bar
état physique à la sortie	vapeur humide
titre en vapeur à la sortie	0,88
pression sortie	0,05 bar

surchauffeur $A \rightarrow I$ et $E \rightarrow F$	
état physique à l'entrée (A)	vapeur saturante sèche
pression entrée (A)	70 bar
état physique sortie (I)	liquide saturant
pression sortie (I)	70 bar
état physique à l'entrée (E)	vapeur saturante sèche
pression entrée (E)	11 bar
état physique sortie (F)	vapeur sèche
pression sortie (F)	11 bar
température sortie (F)	250 °C
condenseur $G \rightarrow H$	
état physique à l'entrée	vapeur humide
titre en vapeur à l'entrée	0,88
état physique à la sortie	liquide saturant
pression	0,05 bar

Sur l'eau

Pression de 70 bar	
température d'équilibre liquide – vapeur	286 °C
enthalpie massique du liquide	1268 kJ.kg ⁻¹
enthalpie massique de la vapeur	2772 kJ.kg ⁻¹
entropie massique du liquide	3,12 kJ.kg ⁻¹ .K ⁻¹
entropie massique de la vapeur	5,81 kJ.kg ⁻¹ .K ⁻¹
Pression de 11 bar	
température d'équilibre liquide – vapeur	184 °C
enthalpie massique du liquide	781 kJ.kg ⁻¹
enthalpie massique de la vapeur	2781 kJ.kg ⁻¹
entropie massique du liquide	2,18 kJ.kg ⁻¹ .K ⁻¹
entropie massique de la vapeur	6,55 kJ.kg ⁻¹ .K ⁻¹

Pression de 0,05 bar	
température d'équilibre liquide – vapeur	33,0 °C
enthalpie massique du liquide	137,8 kJ.kg ⁻¹
enthalpie massique de la vapeur	2561 kJ.kg ⁻¹
entropie massique du liquide	0,476 kJ.kg ⁻¹ .K ⁻¹
entropie massique de la vapeur	8,39 kJ.kg ⁻¹ .K ⁻¹

Ex 2 : Coefficient de partage et type de volcanisme

Données :

Fonctions :

- `range(n)` renvoie la séquence des n premiers entiers (de 0 à $n-1$) ;
- `np.sqrt(x)` renvoie $\sqrt{x}$.

Opérations sur les listes :

- `len(L)` donne le nombre d'éléments de la liste L ;
- `L.append(e)` ajoute l'élément e à la fin de la liste L ;
- `L[i]` renvoie le i -ième élément de la liste L ;
- `sum(L)` renvoie la somme des éléments de la liste L .

Opérations sur les tableaux numpy (`np.array`) :

- `len(A)` : taille du tableau A dans sa première dimension (nombre d'éléments pour un vecteur, nombre de lignes pour une matrice) ;
 - `np.random.normal(a, u_a, N)` renvoie un tableau unidimensionnel de taille N contenant N valeurs aléatoires suivant une loi normale de valeur moyenne a et d'écart-type u_a ;
 - `np.polyfit(L1, L2, 1)` renvoie un tuple contenant la pente et l'ordonnée à l'origine issues d'une modélisation affine des éléments de $L2$ en fonction de ceux de $L1$.
-

Les magmas sont issus de la fusion partielle des roches du manteau, qui conduit à la formation d'un premier magma appelé magma primaire. Celui-ci cristallise par un refroidissement lent dans la chambre magmatique alimentant un volcan (figure 8). Lors de la cristallisation, les éléments chimiques se répartissent entre la phase solide en formation et la phase liquide, selon leur compatibilité avec les réseaux cristallins des solides formés. Ainsi, les minéraux cristallisent graduellement en quittant le liquide magmatique résiduel et modifient localement sa composition chimique : on parle de différenciation du magma par cristallisation fractionnée.

V.A – Loi de Rayleigh

On propose de caractériser ce processus de cristallisation par le modèle suivant : on étudie l'évolution de la masse de liquide lors de l'étape de cristallisation ayant lieu entre t et $t + dt$ (figure 9). On notera $m_L(t)$ la masse de liquide restant à l'instant t . Par ailleurs, on note $m_L^i(t)$ et $m_L^i(t + dt)$ les masses respectives d'élément i dans la phase liquide à t et à $t + dt$ et $m_S^i(t + dt)$ la masse d'élément i dans la masse dm_S de magma solide qui cristallise entre t et $t + dt$.

On note w_L^i et w_S^i les fractions massiques respectives de l'élément dans les phases liquide et solide, exprimées ici en parties par million (ppm) avec $1 \text{ ppm} = 10^{-6} = 1 \text{ mg} \cdot \text{kg}^{-1}$.

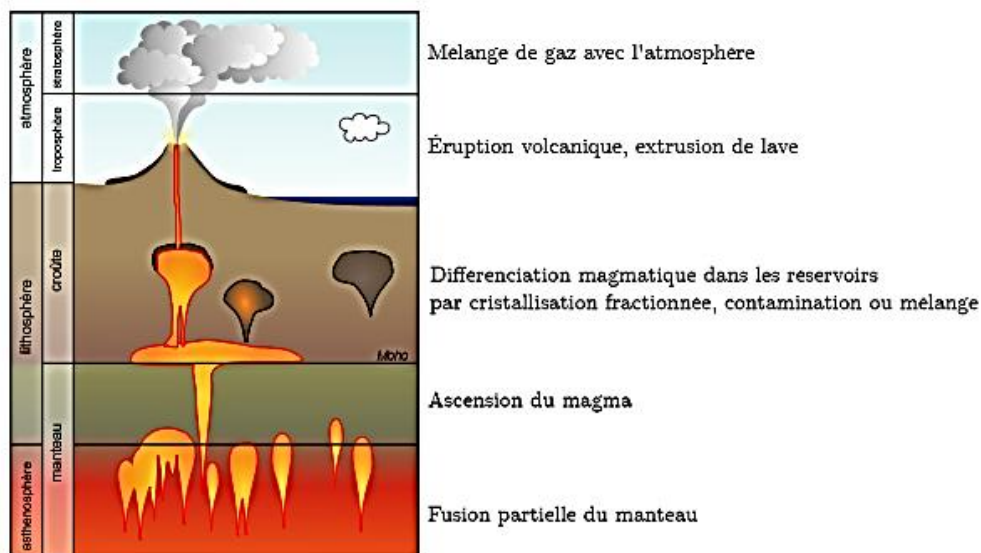


Figure 8 Magnétisme et volcanisme. D'après Wikipédia.

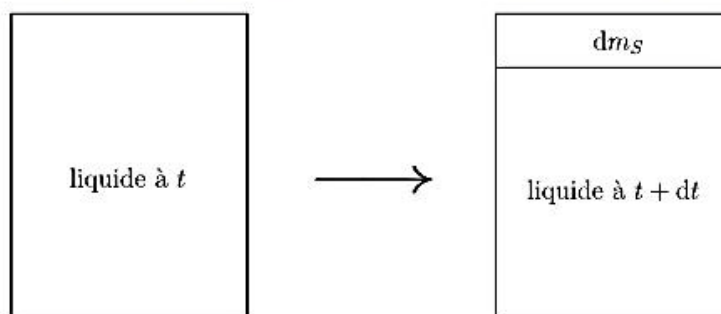


Figure 9 Processus de cristallisation entre t et $t + dt$.

Q 34. Exprimer $m_L^i(t)$, $m_L^i(t + dt)$ et $m_S^i(t + dt)$ en fonction de $w_L^i(t)$, $w_L^i(t + dt)$, $w_S^i(t + dt)$, $m_L(t)$, $m_L(t + dt)$ et dm_S .

On utilise la notion de coefficient de partage solide-liquide de l'élément i , noté D_i , pour caractériser ce transfert de l'élément i de la phase liquide vers la phase solide. Ce coefficient est d'autant plus grand que l'élément a une grande compatibilité avec le réseau cristallin de la phase solide. Il est défini par $D_i = \frac{w_S^i(t + dt)}{w_L^i(t)}$. On le suppose constant sur chaque étape de différenciation considérée.

On note $m_{L,0}$ la masse initiale de liquide magmatique avant différenciation et $f = \frac{m_L}{m_{L,0}}$ le degré de différenciation. La fraction massique initiale de l'élément i dans la phase liquide est notée $w_{L,0}^i$.

Q 35. En traduisant la conservation de la matière totale, puis la conservation de l'élément i entre les instants t et $t + dt$, établir une relation entre D_i , $\frac{dm_L}{m_L}$ et $\frac{dw_L^i}{w_L^i}$. En déduire la loi dite de Rayleigh :

$$w_L^i(t) = \beta f^{D_i-1}$$

où on exprimera β en fonction des données du problème.

V.B – Validation de l'hypothèse d'un processus de cristallisation fractionnée

Dans la suite de cette partie, on veut valider l'hypothèse que le magma actif dans la formation des volcans de la Chaîne des Puys, près de Clermont-Ferrand, suit effectivement un processus de cristallisation fractionnée.

Le volcanisme lié à la Chaîne des Puys a débuté il y a environ 100 000 ans et a présenté quatre périodes majeures : entre -100 000 et -90 000 ans ; entre -75 000 et -70 000 ans ; entre -45 000 et -30 000 ans et entre -13 500 et -9 000 ans. On dispose d'un ensemble d'échantillons de roches volcaniques éjectées lors de ces

périodes d'activité, chacune étant donc relative à un stade plus ou moins avancé de différenciation du magma au moment de l'éruption. Le Rubidium (Rb) et le Thorium (Th) sont présents à l'état de traces dans les liquides et les roches magmatiques. Ils se caractérisent par une forte affinité pour le liquide magmatique dans lequel ils forment des structures très stables et, au contraire, sont incompatibles avec la plupart des mailles cristallines. Leurs coefficients globaux de partage dépendent peu de la nature des phases minérales du solide qui cristallise. Il est d'autre part possible de doser la teneur en Rb et Th dans des échantillons de roches. Les résultats sont présentés dans le tableau 1.

$w(\text{Rb})$ en ppm	5,21	6,52	6,81	8,51	12,8	13,5	15,8	17,9	21,3	22,1
$w(\text{Th})$ en ppm	37,5	46,7	47,8	57,1	90,6	90,9	110	130	152	157

Tableau 1 Extrait des données relatives à l'évolution de la fraction massique en Rb en fonction de celle en Th en parties par million (ppm) dans différents produits volcaniques de la Chaîne des Puys. D'après Villemant B., 1985. *La différenciation des séries volcaniques : géochimie des éléments tracés dans les séries du Massif Central et d'Italie centrale*. Thèse de doctorat. Université Paris VI.

On suppose que le résultat de mesure est bien décrit par une variable aléatoire de densité normale avec une incertitude-type sur les fractions massiques de la forme $u(w) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} w$ où $\Delta = 5\%$.

Les produits volcaniques éjectés lors d'une éruption sont représentatifs de la composition du liquide magmatique dont ils sont issus à un moment donné dans l'histoire de la différenciation de ce liquide.

Q 36. Montrer que, pour deux éléments i et j dont les coefficients de partage vérifient $D_i \ll 1$ et $D_j \ll 1$, le rapport w_L^i/w_L^j est constant.

On se propose d'utiliser une procédure Monte-Carlo pour valider l'hypothèse d'un processus de cristallisation fractionnée. Le code en langage Python correspondant est fourni en annexe 1 ; des informations complémentaires sont précisées dans les données du début de l'exercice.

Q 37. Décrire en quelques lignes le principe d'une simulation Monte-Carlo en faisant le lien avec les variables A , X , a et u_a du code proposé en annexe 1. On commentera en particulier précisément le rôle des lignes 25, 36 et 38.

On obtient après une exécution du code Python de l'annexe 1 dans l'interpréteur l'affichage suivant :

```
La pente a est 0.1386273960033664 d'incertitude-type 0.0049036710758989
L'ordonnée à l'origine b est 0.2983346169365785 ppm d'incertitude-type
0.3494478625397468 ppm
```

On obtient également le graphique de la figure 10 où l'incertitude élargie à 95 % de confiance est donnée par $U = 2u$, u étant l'incertitude-type.

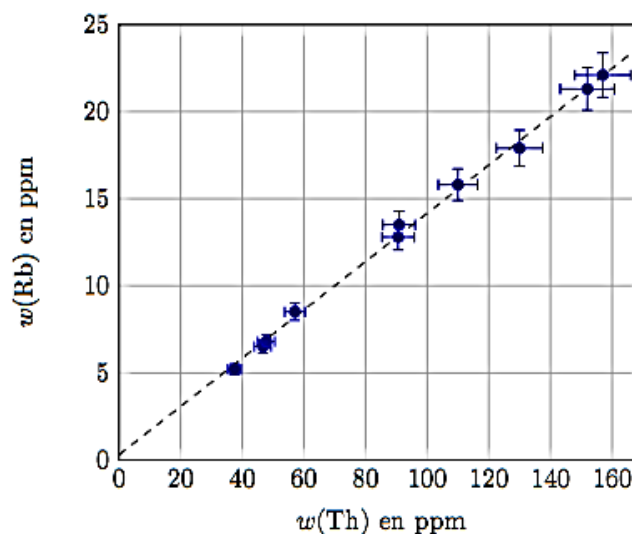


Figure 10 Tracé de $w(\text{Rb})$ en fonction de $w(\text{Th})$ avec des barres d'incertitudes élargies à 95 % de confiance.

Q 38. Expliquer en quoi ce résultat permet de conclure sur la validation de l'hypothèse de processus de cristallisation fractionnée.

Annexe 1 – Code Monte Carlo

```
1  # Importation des bibliothèques
2  import numpy as np # Commandes de calculs numériques
3  import numpy.random as rd # Commandes de générateurs aléatoires
4  import matplotlib.pyplot as plt # Commandes de tracés
5
6  # Liste des valeurs des fractions massiques w en Rb en ppm
7  Rb = [5.21, 6.52, 6.81, 8.51, 12.8, 13.5, 15.8, 17.9, 21.3, 22.1]
8  # Liste des valeurs des fractions massiques w en Th en ppm
9  Th = [37.5, 46.7, 47.8, 57.1, 90.6, 90.9, 110, 130, 152, 157]
10
11 # Régression linéaire
12 # Calcul de la pente et de l'ordonnée à l'origine
13 # de la droite  $w(Rb) = a \cdot w(Th) + b$ 
14 a, b = np.polyfit(Th, Rb, 1)
15
16 # Incertitude-types sur les fractions massiques en Rb et Th
17 u_Rb = [0.05*y/np.sqrt(3) for y in Rb]
18 u_Th = [0.05*x/np.sqrt(3) for x in Th]
19 NbreTirages = 10000
20 A, B = [], []
21 A_carre, B_carre = [], []
22 for j in range(NbreTirages):
23     X = []
24     for i in range(len(Th)):
25         x = rd.normal(Th[i], u_Th[i], 1)[0]
26         X.append(x)
27     Y = []
28     for k in range(len(Rb)):
29         y = rd.normal(Rb[k], u_Rb[k], 1)[0]
30         Y.append(y)
31     a, b = np.polyfit(X, Y, 1)
32     A.append(a)
33     A_carre.append(a**2)
34     B.append(b)
35     B_carre.append(b**2)
36 am = sum(A)/NbreTirages
37 bm = sum(B)/NbreTirages
38 u_a = np.sqrt(sum(A_carre)/NbreTirages-am**2)
39 u_b = np.sqrt(sum(B_carre)/NbreTirages-bm**2)
40
41 # Affichage des résultats de la modélisation
42 print("La pente a est", am, "d'incertitude-type", u_a)
43 print("L'ordonnée à l'origine b est", bm, "ppm d'incertitude-type", u_b, "ppm")
44
45 # Tracé des données avec incertitudes élargies et du modèle affine
46 plt.errorbar(Th, Rb, xerr=2*np.array(u_Th), yerr=2*np.array(u_Rb), capsize=3, fmt="o")
47 plt.plot([0, 170], [bm, am*170+bm], 'k--')
48 plt.axis([0, 170, 0, 25]) # Limites du tracé
49 plt.xlabel("w(Th) en ppm") # Légende des abscisses
50 plt.ylabel("w(Rb) en ppm") # Légende des ordonnées
51 plt.grid() # Grille
52 plt.show() # Affichage
```

-- FIN DE L'ENONCE --