Supplément TDEM3 – Dipôles électrostatique et magnétostatique

Données pour l'ensemble des exercices :

$\mu_0 = 4\pi.10^{-7} H.m^{-1}$ et $\varepsilon_0 \approx 8{,}84.10^{-12} F.m^{-1}$

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,z}.\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,z}.\vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{r,\theta}.\vec{e}_z$

En coordonnées sphériques : $\overrightarrow{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi}.\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi}.\vec{e}_\theta + \frac{1}{r sin\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta}.\vec{e}_\varphi$

Résultante des actions subies par un dipôle dans un champ électrostatique extérieur $\vec{E}_{ext}(M)$:

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}(\vec{p}.\vec{E}_{ext})$$

Expression du champ électrique / magnétique créé par un dipôle électrique / magnétique placé en O :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 OM^5}\left(3(\vec{p}.\overrightarrow{OM})\overrightarrow{OM} - OM^2.\vec{p}\right) \qquad ou \qquad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi OM^5}(3(\overrightarrow{\mathfrak{M}}.\overrightarrow{OM})\overrightarrow{OM} - OM^2.\overrightarrow{\mathfrak{M}})$$

1 Dipôle et spire chargée

Un dipôle $\vec{p}$ est placé au centre O d'une spire circulaire de rayon a portant la charge par unité de longueur λ, uniforme. $\vec{p}$ est aligné sur l'axe de la spire (cf. figure 1).

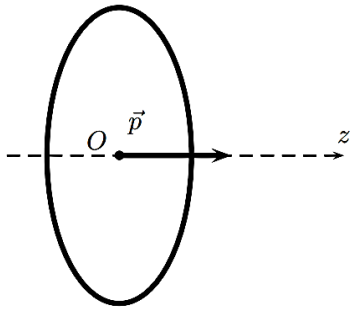


FIGURE 1 – Dipôle et fil circulaire

La spire crée en tout point M de l'axe (Oz) un champ :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}}\overrightarrow{u_z}$$

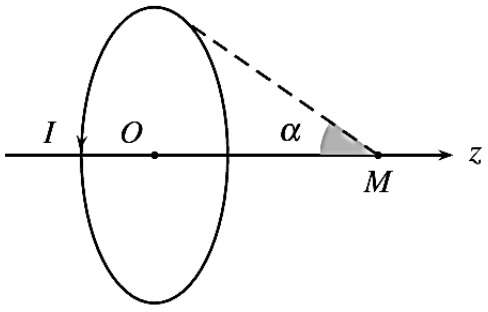
1. Déterminer la résultante des actions subies par le dipôle dans ce champ extérieur.
2. On place maintenant le dipôle en un point quelconque de l'axe (Oz) et on oriente son moment selon $+\overrightarrow{u_z}$. Déterminer la(les) cotes $z_{éq}$ de la(des) position(s) d'équilibre en précisant leur stabilité pour $\lambda > 0$.

2 Champ magnétique créé par une spire – Approximation dipolaire

On considère une spire circulaire de rayon R, de centre centre O et d'axe (Oz), parcourue par un courant d'intensité I dans le sens positif autour de (Oz). On admet que le champ magnétique créé par la spire en un point M de (Oz) est :

$$\overrightarrow{B}(M) = B_0(\sin\alpha)^n \overrightarrow{u_z},$$

où B_0 est une constante indépendante de M, α le demi-angle (non algébrique) sous lequel la spire est vue depuis le point M et n une constante.



1. Exprimer $\overrightarrow{B}(M)$ en fonction de B_0, R et z. Que devient cette expression pour $z \gg R$?

2. Exprimer le moment magnétique de la spire.

3. En utilisant la formule du champ magnétique dipolaire vue en cours, trouver la valeur de n ainsi que l'expression de B_0 en fonction de I et R.

3 Oscillateur à deux dipôles

Deux dipôles magnétiques (cf. fig. 3) de même moment dipolaire m constant peuvent tourner librement autour de deux axes parallèles, fixes, perpendiculaires à la droite AB qui les joint ($AB = a$).

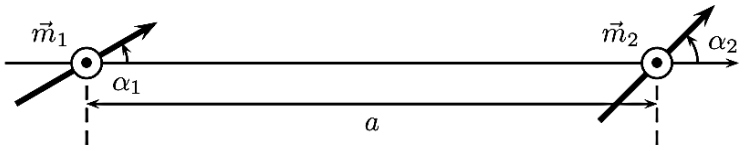


FIGURE 3 – Oscillateur à deux dipôles

1. Établir l'expression de l'énergie potentielle d'interaction entre ces deux dipôles, en fonction des angles α_1 et α_2 faits par les deux moments dipolaires avec la droite AB. On posera $W_0 = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{m^2}{a^3}$.
2. Déterminer les états d'équilibre du système. Étudier leur stabilité.
3. On appelle J le moment d'inertie d'un de ces dipôles par rapport à son axe de rotation. Déterminer la pulsation des petites oscillations autour de l'équilibre d'un dipôle lorsque l'orientation de l'autre est bloquée.

4 Moteur synchrone (d'après CCINP PSI 2008)

Le principe de la conversion d'énergie électrique en énergie mécanique repose sur une interaction champ magnétique - courant électrique. Dans la machine synchrone, le stator est alimenté par un système de courants triphasés. Il crée à l'intérieur de la machine un champ tournant. Le rotor s'apparente à une bobine alimentée en courant continu. L'interaction du champ magnétique créé par le stator sur le courant du rotor est à l'origine d'un couple électromagnétique.

PARTIE I - Préliminaire: champ magnétique créé par une spire en un point de son axe.

On considère une spire circulaire de centre O, de rayon R, contenu dans le plan Oxy, orthogonal à l'axe Oz et parcourue par un courant électrique constant I. On considère un point M, de cote z, situé sur l'axe Oz.
Le champ magnétique $\vec{B}$ (*M*), créé par la spire au point M s'écrit :

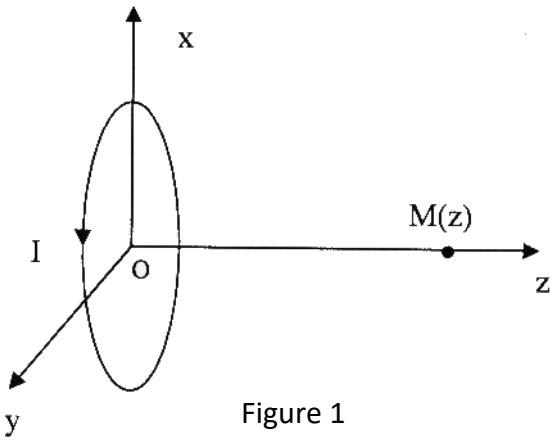


Figure 1

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2}.\frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_Z$$

1) Par des considérations de symétrie, justifier la direction du champ magnétique $\vec{B}$ (*M*).

PARTIE II - Principe de la conversion d'énergie électromécanique

A] Etude du stator

Le stator est constitué de trois bobines, dont les axes principaux contenus dans le plan xOy sont décalés de $\frac{2\pi}{3}$ les uns par rapport aux autres. Elles sont alimentées par un système de courant triphasé d'amplitude maximale I_m, (de valeur efficace I_{eff}) et de fréquence f_s (de pulsation ω_s). On a

$$\left\{\begin{array}{l} i_1(t) = I_m \cos(\omega_s t + \varphi) \\ i_2(t) = I_m \cos(\omega_s t + \varphi - \frac{2\pi}{3}) \\ i_3(t) = I_m \cos(\omega_s t + \varphi + \frac{2\pi}{3}) \end{array}\right\}$$

Chaque bobine crée dans la machine un champ magnétique proportionnel au courant qui la traverse et dirigé suivant son axe principal.

On note K le coefficient de proportionnalité et on a : $\vec{B}_j(t) = K.i_j(t).\vec{e}_j$ avec j = 1, 2 ou 3

$\vec{e}_1 = \vec{e}_X$

$\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ se déduisent de $\vec{e}_1$ par les rotations d'angle respectif $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.

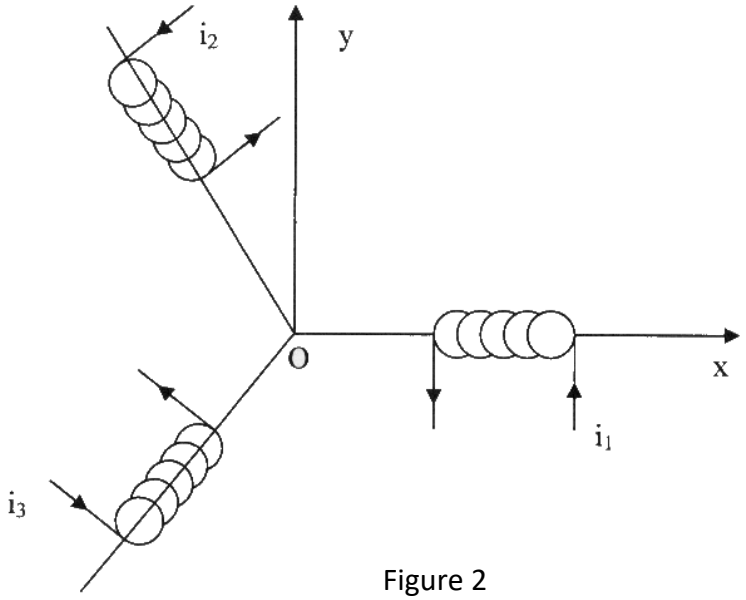


Figure 2

A.1) Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}_s$ créé par le stator à l'intérieur de la machine dans la base ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$) . On exprimera chaque composante en fonction de K, I_m, $\omega_s t$ et φ.

A.2) Montrer que ce champ est de norme constante et porté par un vecteur unitaire dont on précisera le sens et la direction dans la base ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$). Justifier l'appellation de champ tournant et préciser son sens de rotation.

A.3) On donne K = 0,05 $T.A^{-1}$, I_{eff}, = 15 A, f_s = 50 Hz. Calculer la valeur numérique de $||\vec{B}_s||$ et la vitesse de rotation de ce champ tournant en tr/min.

B] Couple exercé sur le rotor :

Dans la suite du problème, on pose $\vec{B}_s = B_s.\vec{u}(t)$, où Bs est l'amplitude du champ magnétique créé par le stator et $\vec{u}(t)$ le vecteur unitaire de la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ tel que l'angle $((\vec{e}_x, \vec{u}(t)) = \omega_s t + \varphi$.

Le rotor tourne autour de l'axe Oz, à la vitesse angulaire constante $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$. D'un point de vue électrique, il est assimilable à une bobine plate rectangulaire de surface géométrique S = 2.r_0.H, de largeur 2.r_0 et de longueur H suivant Oz. Cette bobine comporte p spires en série. Elles sont géométriquement confondues. Chaque spire est parcourue par le courant continu d'intensité I.

Soit $\vec{n}(t)$ le vecteur unitaire de la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, normal à la surface S orientée du rotor. On note θ l'angle $(\vec{e}_x, \vec{n})$. On posé θ(t) = θ_0 + Ωt .

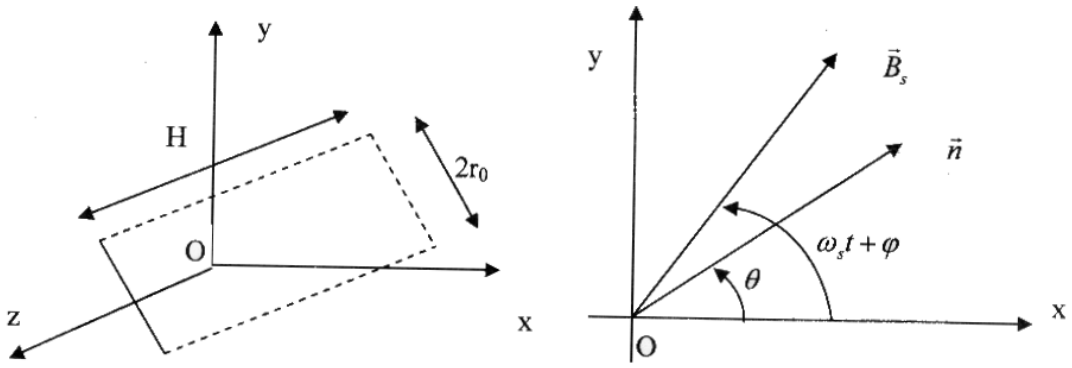


Figure 3

B.1) Déterminer le moment mécanique $\vec{\Gamma}(t) = \Gamma(t)\vec{e}_Z$ des actions électromagnétiques, exercé sur le rotor .

B.2) La pulsation ω_s étant imposée et constante, établir, suivant les valeurs de Ω, le couple moyen Γ_{syn}, associé à $\Gamma(t)$. Pourquoi ce type de moteur est-il qualifié de synchrone ? Ce type de moteur, connecté à un réseau de fréquence fixe peut-il démarrer seul ?

B.3) Tracer la courbe représentant Γ_{syn} en fonction du décalage angulaire $\psi = \varphi - \theta_0$. Délimiter les intervalles de ψ correspondant aux fonctionnements moteur et générateur. Que vaut ψ lorsque Γ_{syn} est maximum ? Donner l'expression de ce couple maximum, noté Γ_{max}.

Que vaut le flux magnétique Φ_{mag} créé par le stator, c'est à dire le flux de $\vec{B}_s$ à travers le rotor lorsque $\Gamma_{syn} = \Gamma_{max}$?

B.4) Pour un couple $0 \leq \Gamma_{syn} \leq \Gamma_{max}$ donné, il existe deux valeurs (éventuellement une valeur double) de l'écart angulaire $\psi = \phi - \theta_0$. Discuter de la stabilité du fonctionnement de la machine pour chacune de ces deux valeurs. Cette étude doit aussi prendre en compte la valeur double.