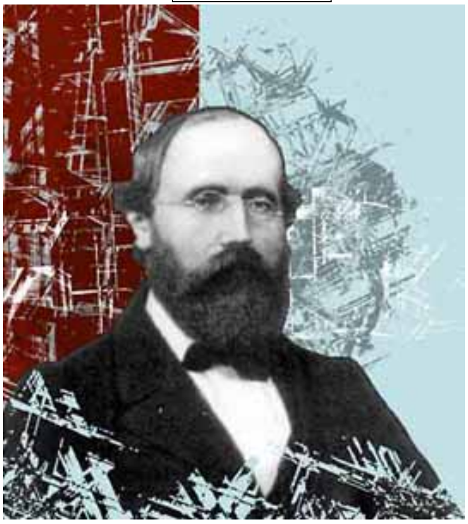
Chapitre 31

Séries numériques

Sommaire

31.1 Introduction

The "Millennium Prize Problems" are seven problems in mathematics that were stated by the Clay Mathematics Institute in 2000. As of June 2016, six of the problems remain unsolved. A correct solution to any of the problems results in a US $\boxed{\$\ 1{,}000{,}000}$ prize (sometimes called a "Millennium Prize") being awarded by the institute.



One of these major unsolved problems is the so-called Riemann hypothesis, a conjecture made casually by Riemann (1859) in his paper on the distribution of prime numbers. Riemann considered Euler's function

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

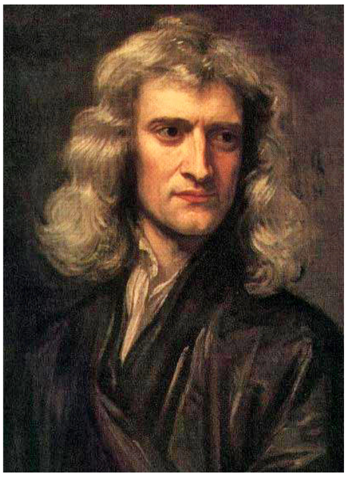
The Riemann hypothesis asserts that all interesting complex solutions of the equation $\zeta(s) = 0$ lie on a certain vertical straight line. This has been checked for the first 10,000,000,000 solutions (by Xavier Gourdon). Mathematicians later realized that Riemann's hypothesis governs the distribution of prime numbers to an extraordinary extent, which is why its proof is so eagerly sought. Yet, all the efforts of the best mathematicians have failed so far....

31.2 History

Infinite series were present in Greek mathematics, though the Greeks tried to deal with them as finitely as possibly by working with arbitrary finite sums $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ instead of infinite sums $a_1 + a_2 + \ldots$
The infinite geometric series was already known to Euclid. The harmonic series $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ was studied by Oresme around 1350, and the stunning series for the inverse tangent discovered by Indian mathematicians in the 15th century :

$$\mathsf{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

The invention of calculus in the 17th century released a flood of new series.



In fact, the exploration of infinite series was at the cutting edge of research in 17th-century mathematics, and Newton was at the forefront of this study. In this context, "series" means sum, and an infinite series is the sum of infinitely many terms. Newton realized that the binomial expansion could be used even if the exponent was not an integer.
Newton did the infinite series expansion of the sine, a well-known trigonometric ratio. His sine series is :

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

which has become an important result in mathematics down to the present day.

31.3 Généralités

La lettre $\mathbb{K}$ désignera dans tout ce cours le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1

Soit $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

1. On appelle série de terme général u_n la suite des sommes partielles de rang n, notée S_n

$$(S_n)_{n \geqslant p} = \left(\sum_{k=p}^{n} u_k \right)_{n \geqslant p} = (u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n)_{n \geqslant p}$$

   La série de terme général u_n est notée : $\sum\limits_{n \geqslant p} u_n$.

2. On dit que la série $\sum\limits_{n \geqslant p} u_n$ converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles converge. Dans ce cas, on appelle alors somme de la série cette limite qui se note : $\sum\limits_{n=p}^{+\infty} u_n$

3. On dit que la série $\sum\limits_{n \geqslant p} u_n$ est divergente si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n \geqslant p} u_n$ n'est pas convergente.

Remarque :

1. Étudier la nature d'une série revient à déterminer si cette dernière est convergente ou divergente.
2. ⚠ Attention à ne pas confondre les notations ⚠

(a) $\sum_{n \geqslant p} u_n$ désigne une suite, plus précisément la suite des sommes partielles.

(b) $\sum_{k=p}^{n} u_k$ désigne un scalaire (c'est-à-dire un élément de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) sur lequel, on peut effectuer des calculs sans condition.

(c) $\sum_{k=p}^{+\infty} u_k$ n'existe qu'en cas de convergence et c'est un scalaire. On ne peut pas parler de la somme d'une série $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ sans avoir prouvé au préalable la convergence de la série étudiée.

Il n'est donc pas permis d'utiliser cette notation sans justification préalable.

31.3.1 Les séries à connaître

Donnons des exemples de séries :

Théorème 2 (Séries géométriques)

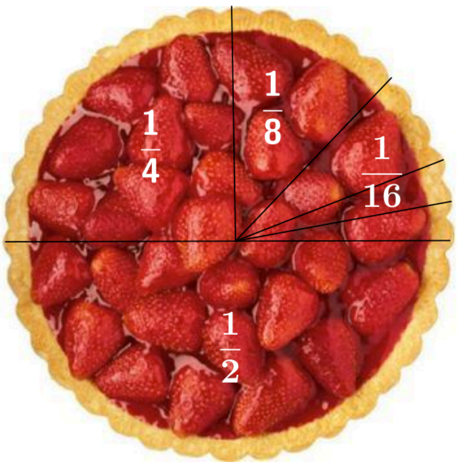
Soit $x \in \mathbb{C}$. Soit $p \in \mathbb{N}$.

La série $\sum_{n \geqslant p} x^n$ est convergente si, et seulement si, $|x| < 1$.

Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{n=p}^{+\infty} x^n = \frac{x^p}{1-x}}$$

Illustration : Partageons nous une tarte à la fraise



Partageons une tarte de la manière suivante :

- on donne une moitié de la tarte à un convive
- on donne un quart de la tarte à un autre convive
- on donne un huitième à un autre convive
- on donne un seizième à un autre convive
- ...

On obtient ainsi l'égalité suivante :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots = 1$$

On retrouve ainsi géométriquement le résultat suivant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Exercice A1 : Montrer que les séries $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{3^{2n}}$, $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n \geqslant 3} \frac{1}{2^n}$ sont convergentes et calculer leur somme.

Théorème 3

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

<u>*Exercice A2*</u> *:* [Pour s'entraîner]

1. Trouver deux réels a et b tels que pour tout entier naturel n,
$$\frac{9}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{a}{3n+1} + \frac{b}{3n+4}.$$
2. En déduire que la série de terme général $\left(\frac{9}{(3n+1)(3n+4)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa somme.

<u>*Exercice E3*</u> *:* On considère la suite de Fibonacci définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n \quad \text{et} \quad \phi_0 = 0,\ \phi_1 = 1$.

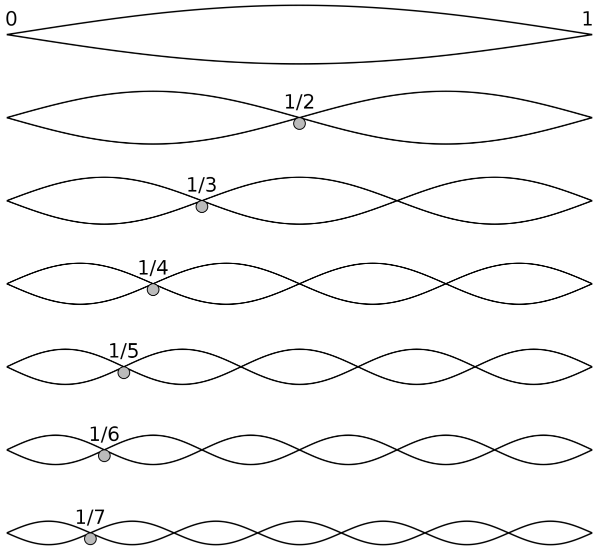
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi_{n+1}^2 - \phi_n\phi_{n+2} = (-1)^n$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(-1)^n}{\phi_n\phi_{n+1}} = \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} - \frac{\phi_{n+2}}{\phi_{n+1}}$.
3. En déduire l'existence et le calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\phi_n\phi_{n+1}}$.

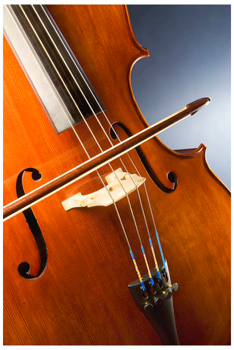
<u>*Exercice E4*</u> *:*

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{k(k+1)\dots(k+p-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+p)} = \frac{p}{k(k+1)\dots(k+p)}.$$
2. En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}$ est convergente et calculer sa somme.

Théorème 4 (Série harmonique)

La série dite harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est divergente et $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$.





La terminologie "série harmonique" provient de la musique. Lorsque l'on joue par exemple un LA à 440Hz (première corde), le noeud se trouve par convention à 1. Si l'on souhaite jouait un LA dans l'octave suivante à 880 Hz, le noeud se déplace de moitié...

Théorème 5 (Série harmonique alternée)

La série dite harmonique alternée $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln(2)$.

<ins>*History*</ins> *:* Gottfried Wilhelm Leibniz, born in Leipzig in 1646, was almost an exact contemporary of Newton and has been described as a universal genius. The young Leibniz was brilliant : he finished his undergraduate degree by about age 16 and had a doctorate in law by age 20. Unlike Newton, who spent at least the first part of his career as a professor at Cambridge, Leibniz spent all of his adult life as a public servant, but the extent of his interests and talents is breathtaking. Leibniz plunged into mathematical studies and, with his characteristic zeal, raced to the frontier of knowledge. In 1674, he solved the infinite series $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ that is now known as the Leibniz series. During the last years of his life, Leibniz became involved in a dispute with Newton over who created calculus.

Exercice E5 : En vous inspirant du théorème précédent, montrer que la série de terme général $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice C6 : Soit $(a,b)\in]1,+\infty[\times]0,+\infty[$. Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{a+kb}$ est convergente et que l'on a l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{a+kb}=\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt.$$

Théorème 6 ("Basel problem")

La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

History : The Basel problem was formulated in 1689 by Jakob Bernoulli. The challenge was to find the exact value of the infinite series $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ the sum of the reciprocals of the squares. Bernoulli himself was able to get an approximation of the sum of this series : a value that is less than 2. In the 1730s, Euler found a more accurate approximation for the series : 1.644934.... He almost stopped there but later wrote, "... against all expectations I have found an elegant expression for the sum of the series..." With this solution $\frac{\pi^2}{6}$, Euler became famous around the world. His hardships make Euler, really, the counterpart of Beethoven. Remember Beethoven loses his hearing and yet continues to produce great music. Euler loses his vision but continues to produce great mathematics.

Exercice A7 :

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2}=\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2}$.
2. En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(2k+1)^2}$ est convergente et que $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

Théorème 7 (Série exponentielle)

Pour tout $x\in\mathbb{C}$, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}$ est (absolument) convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x.$$

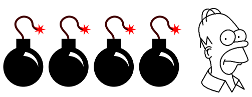
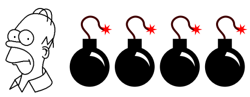
Exercice A8 : Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{n!}$ est convergente et calculer sa somme (remarquer que $n^2=n(n-1)+n$).

31.3.2 Quelques propriétés

Théorème 8 (Condition nécessaire de convergence)

1. **SI** une série $\sum_{n\geqslant p}u_n$ converge **ALORS** $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.
2. Si une suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum_{n\geqslant p}u_n$ est divergente.

Remarques :

1.  La réciproque est complètement fausse !!! 

Il suffit de considérer la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ qui est divergente et pourtant $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

2. Lorsque le terme général d'une série ne converge pas vers 0, on dit que la série diverge grossièrement.

Exercice A9 : Étudier la nature des séries suivantes $\sum_{n\geqslant 0}\sin(n)$, $\sum_{n\geqslant 1}e^{1+\frac{1}{n}}$.

Proposition 9

Deux séries qui diffèrent d'un nombre fini de termes sont de même nature.

Définition 10 (Reste d'ordre n)

Soit $\sum_{n\geqslant p}u_n$ une série convergente. On note S sa somme et S_n sa somme partielle d'ordre n :

$$\forall n\in[\![p,+\infty[\![,\quad S_n=u_p+\cdots+u_n$$

Pour tout $n\in[\![p,+\infty[\![$, le reste d'ordre n de cette série est $R_n=S-S_n$.

On peut alors écrire : $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k$.

Théorème 11

Soit $\sum_{n\geqslant p}u_n$ une série convergente alors le reste d'ordre n de cette série converge vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty}R_n=0.$$

Exercice E10 : Soit (u_n) une suite positive et décroissante. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ est convergente. Montrer que :

$$u_n\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{2n}u_k\geqslant nu_{2n}\geqslant 0$
2. Vérifier que $\sum_{k=n+1}^{2n}u_k=R_n-R_{2n}$. Quelle est la limite de cette somme lorsque n tend vers $+\infty$?
3. En déduire que $\lim_{n\to+\infty}2nu_{2n}=0$.
4. Montrer de même que $\lim_{n\to+\infty}(2n+1)u_{2n+1}=0$.
5. Conclure.

Théorème 12 (Lien suite-série)

Soit $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite. La suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ converge si et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant p}(u_{n+1}-u_n)$ converge.

Exercice E11 : Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est divergente.

Exercice E12 : [à faire un fois que le cours sur les séries est fini]
On définit la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

Montrer que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

31.3.3 Structure d'espace vectoriel

Théorème 13

1. L'ensemble E des suites $(a_n)_{n\geqslant p}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que la série $\sum_{n\geqslant p} a_n$ soit convergente est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant p}, (v_n)_{n\geqslant p} \in E$, soit $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, alors $\sum_{n\geqslant p}(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et on a l'égalité :
$$\sum_{n=p}^{+\infty}(\lambda u_n+\mu v_n) = \lambda\sum_{n=p}^{+\infty} u_n + \mu\sum_{n=p}^{+\infty} v_n.$$
3. L'application $\begin{cases} E \to \mathbb{K} \\ (u_n)_{n\geqslant p} \mapsto \sum_{n=p}^{+\infty} u_n. \end{cases}$ est une forme linéaire sur E.

Remarque : ⚠ Écrire l'égalité $\sum_{n=p}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=p}^{+\infty} u_n + \sum_{n=p}^{+\infty} v_n$ n'est valable qu'à la condition que les trois séries soient convergentes. En effet, on ne peut séparer des sommes de séries sans précaution. Prenons l'exemple suivant, on aurait

$$0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-1) = \cancel{\sum_{n=0}^{+\infty}} 1 - \cancel{\sum_{n=0}^{+\infty}} 1,$$

ce qui est absurde puisque $\sum_{n\geqslant 0} 1$ diverge grossièrement.

Exercice A13 : Montrer que $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{2^n+1}{n!}\right)$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice E14 : Soit $a,b\in\mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \qquad u_0, u_1\in\mathbb{R}.$$

On suppose que le trinôme $X^2 - aX - b$ admet deux racines réelles distinctes α et β telles que $|\alpha|<1$ et $|\beta|<1$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.
2. Calculer la somme de cette série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ en fonction de u_0 et u_1.

31.4 Séries à termes positifs

31.4.1 Théorème fondamental

Théorème 14 (fondamental pour les séries à termes positifs)

Soit $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite à termes $\boxed{\text{positifs}}$. Notons pour tout $n \in [\![p, +\infty[\![$, $S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k$ la suite des sommes partielles.

1. La suite $(S_n)_{n \geqslant p}$ est croissante.
2. La série $\sum_{n \geqslant p} u_n$ converge si, et seulement si, la suite $(S_n)_{n \geqslant p}$ des sommes partielles est majorée.
3. Si la série $\sum_{n \geqslant p} u_n$ diverge, alors : $\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=p}^{n} u_k = +\infty$.

Exercice E15 : [Pour s'entraîner] Soit $a \in]0, 1[$. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = (1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)$ avec $0 < a < 1$.

1. Prouver l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant x + 1$.
2. Montrer que $(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n) \leqslant \exp\left(\dfrac{a}{1-a}\right)$.
3. En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} \ln(1+a^n)$ est convergente.

Exercice C16 : [ENS-Paris-2019]
Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ et $(b_n)_{n \geqslant 0}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} \leqslant a_n + b_n$$

et $\sum_{n \geqslant 0} b_n$ converge.
Montrer que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ converge.

31.4.2 Comparaison série intégrale

Théorème 15 (Comparaison série intégrale)

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $f : [p, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue, positive et décroissante sur $[p, +\infty[$. Alors :

1. Pour tout entier $n \in [\![p+1, +\infty[\![$,

$$\int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)dt.$$

2. La série $\sum_{n \geqslant p} f(n)$ est convergente si, et seulement si, la suite $\left(\int_p^n f(t)dt\right)_{n \geqslant p}$ est convergente.

Exercice A17 : Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n \ln(n)}$ est divergente.

Théorème 16 (Séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.
2. En cas de divergence lorsque $\alpha \leqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) \qquad \text{et} \qquad \forall \alpha \in]0,1[, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

31.4.3 Théorème de comparaison pour des séries à termes positifs

Théorème 17 (Inégalités)

Soit $(u_n)_{n\geqslant p}$ et $(v_n)_{n\geqslant p}$ deux suites $\boxed{\text{à termes positifs.}}$

On suppose qu'il existe $n_0 \in [\![p, +\infty[\![$, $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n. \quad (\star)}$ Alors :

1. Si $\displaystyle\sum_{n\geqslant p} v_n$ est convergente, alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant p} u_n$ est convergente.
2. Si $\displaystyle\sum_{n\geqslant p} u_n$ est divergente, alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant p} v_n$ est divergente.

Preuve : Soit $N \geqslant n_0$. En sommant $(\star)$ pour n allant de n_0 à N, on obtient :

$$0 \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} u_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} v_n.$$

Supposons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant p} v_n$ converge. Comme $(v_n)_{n\geqslant p}$ est positive, la suite des somme partielle $\left(\displaystyle\sum_{n=p}^{N} v_n\right)_{n\geqslant p}$ est majorée par un réel M_v.

Donc la suite $\left(\displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} v_n\right)_{n\geqslant p}$ est aussi majorée par un réel M_v.

Donc la suite $\left(\displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} u_n\right)_{n\geqslant p}$ est aussi majorée par un réel M_v.

Finalement la suite $\left(\displaystyle\sum_{n=p}^{N} u_n\right)_{n\geqslant p}$ est aussi majorée par un réel $M_v + \displaystyle\sum_{n=p}^{n_0-1} u_n$.

Or la suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ est positive. Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant p} u_n$ est convergente.

Par contraposée, si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant p} u_n$ est divergente, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant p} v_n$ est divergente.

□

Théorème 18 (Équivalents)

Soit $(u_n)_{n\geqslant p}$ et $(v_n)_{n\geqslant p}$ deux suites $\boxed{\text{à termes positifs.}}$ On suppose $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.}$

Alors les séries $\sum\limits_{n\geqslant p} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant p} v_n$ sont de même nature. En d'autres termes :

1. $\sum\limits_{n\geqslant p} u_n$ est convergente si, et seulement si, $\sum\limits_{n\geqslant p} v_n$ est convergente.
2. $\sum\limits_{n\geqslant p} u_n$ est divergente si, et seulement si, $\sum\limits_{n\geqslant p} v_n$ est divergente.

Preuve : Soit $(u_n)_{n\geqslant p}$ et $(v_n)_{n\geqslant p}$ deux suites telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Par définition : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Il existe un rang $n_0 \in [\![p, +\infty[\![$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3}{2}$$

$$\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant \frac{1}{2} v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2} v_n$$

En appliquant le théorème précédent, on constate que :

- Si la série $\sum\limits_{n\geqslant p} v_n$ est convergente alors la série $\sum\limits_{n\geqslant p} \frac{3}{2} v_n$ est convergente, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant p} u_n$ est convergente.
- D'autre part, si la série $\sum\limits_{n\geqslant p} u_n$ est convergente alors la série $\sum\limits_{n\geqslant p} \frac{1}{2} v_n$ est convergente, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant p} v_n$ est convergente.

$\square$

Remarques : ⚠

1. Il est indispensable d'évoquer la positivité dans ces deux théorèmes.
2. Les hypothèses des deux théorèmes portent sur $\boxed{\text{les termes généraux}}$ et non sur les sommes partielles.

Exercice A18 : Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sin(\frac{1}{2^n})$
2. $\sum\limits_{n\geqslant 4} \ln(1 + \frac{1}{n})$
3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$

31.5 Séries absolument convergente

31.5.1 Généralités

Définition 19

Soit $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite de complexes.
On dit que la série $\sum_{n\geqslant p} u_n$ converge absolument si, et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant p} |u_n|$ converge.

Exemple : La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument alors que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ ne converge pas absolument.

Théorème 20

Si la série $\sum_{n\geqslant p} u_n$ converge absolument alors elle converge.

⚠ La réciproque est fausse, la série harmonique alternée $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente sans être absolument convergente.

Méthode 21

On peut désormais utiliser les théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs appliquées à $|u_n|$.

Exercice A19 : Étudier la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^3}$.

Définition 22 (Semi-convergence)

Une série qui converge mais qui ne converge pas absolument est dite semi-convergente.

Exemple : La série harmonique alternée $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est semi-convergente.

Théorème 23

Soit $x \in \mathbb{C}$. La série exponentielle $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Proposition 24

Soit $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ soit absolument convergente.
L'ensemble $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Preuve : Montrons que $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

On vérifie que la suite nulle $0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}$ est dans $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$. En effet, $\sum_{n\geqslant 0}|0|$ converge, ainsi $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ est absolument convergente.

Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$. Soit $(u_n),(v_n)\in\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$. Remarquons que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant|\lambda u_n+\mu v_n|\leqslant|\lambda||u_n|+|\mu||v_n|$$

Or les séries $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0}v_n$ sont absolument convergentes. Ainsi, les séries $\sum_{n\geqslant 0}|u_n|$ et $\sum_{n\geqslant 0}|v_n|$ sont convergentes. Par combinaison linéaire, la série $\sum_{n\geqslant 0}(|\lambda||u_n|+|\mu||v_n|)$ est convergente.

D'après le théorème de comparaison par inégalité des séries positives, la série $\sum_{n\geqslant 0}|\lambda u_n+\mu v_n|$ est convergente. Donc la série $\sum_{n\geqslant 0}(\lambda u_n+\mu v_n)$ est absolument convergente. La suite $(\lambda u_n+\mu v_n)_{n\geqslant 0}=\lambda(u_n)+\mu(v_n)\in\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$.

En conclusion, l'ensemble $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. $\square$

Proposition 25 (Inégalité triangulaire)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$ alors $\left|\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|$.

31.5.2 Théorème de comparaison par domination et négligeabilité

Théorème 26 (Domination)

Soit $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $(v_n)_{n\geqslant p}$ une suite $\boxed{\text{à termes positifs.}}$ On suppose que : $\boxed{u_n=\underset{n\to+\infty}{O}(v_n).}$ Alors :

1. Si $\sum_{n\geqslant p}v_n$ est convergente, alors $\sum_{n\geqslant p}u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
2. Si $\sum_{n\geqslant p}u_n$ est divergente, alors $\sum_{n\geqslant p}v_n$ est divergente.

Théorème 27 (Négligeabilité)

Soit $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $(v_n)_{n\geqslant p}$ une suite $\boxed{\text{à termes positifs.}}$ On suppose que : $\boxed{u_n=\underset{n\to+\infty}{o}(v_n).}$ Alors :

1. Si $\sum_{n\geqslant p}v_n$ est convergente, alors $\sum_{n\geqslant p}u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
2. Si $\sum_{n\geqslant p}u_n$ est divergente, alors $\sum_{n\geqslant p}v_n$ est divergente.

Corollaire 28 (Règles du n^α)

Soit $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite à valeurs complexes

1. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} (n^\alpha u_n) = 0$.

   Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et $\sum_{n\geqslant p} u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

2. On suppose qu'il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} (n^\alpha u_n) = +\infty$.

   Alors il existe $n_0 \in [\![p, +\infty[\![$ tel que pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $|u_n| \geqslant \frac{1}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\geqslant p} u_n$ diverge.

<u>*Exercice A20*</u> *:* Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{2021}\ln(n)}$
2. Soit (u_n) une suite positive. Montrer que si $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ est convergente.

<u>*Exercice A21*</u> *:* Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont :

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \frac{2^n}{n!}, \quad e^{-n^2}, \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \quad \frac{|\cos(n)|}{n^2}, \quad \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n}, \quad \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^4}}, \quad \sqrt[4]{1+\frac{1}{n^4}}-1.$$

<u>*Exercice E22*</u> *:* Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont définis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^n - 1, \qquad \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}, \qquad n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

<u>*Exercice E23*</u> *:* Déterminer la nature des séries suivantes de terme général (u_n) :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2n}\right)\right)$, où $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \exp\left(-\sqrt{n^2-1}\right)$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

<u>*Exercice C24*</u> *:* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$. On suppose que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente vers 0. On posera par convention $S_{-1} = 0$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = b_n S_n + \sum_{k=0}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1})$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} S_k(b_k - b_{k+1})$ est absolument convergente.
3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ est convergente.
4. Soit $x \in]0, 2\pi[$. Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(nx)}{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos(nx)}{n+1}$ sont convergentes.

31.6 Séries alternées (programme de MP)

Définition 29

On dit qu'une série $\sum_{n \geqslant p} u_n$ est une série alternée si, et seulement si,

$$\forall n \geqslant p, \quad u_n = (-1)^n |u_n| \quad \text{ou} \quad \forall n \geqslant p, \quad u_n = (-1)^{n+1}|u_n|.$$

Le signe du terme général u_n change de signe à chaque fois que l'on passe au terme suivant.

Exemple : Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est alternée.

Théorème 30 (Critère spécial des séries alternées ou de Leibniz)

Soit $\sum_{n \geqslant p} u_n$ une série alternée. On suppose que :

1. La suite $(|u_n|)_{n \geqslant p}$ est décroissante.
2. $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Alors

1. La série $\sum_{n \geqslant p} u_n$ est convergente.
2. Si on note $S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k$ la suite des sommes partielles, les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Exercice C25 : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive décroissante tendant vers 0. Le but de cet exercice est de montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n a_n$. On notera S sa limite.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$. Montrer que : $|R_n| \leqslant a_{n+1}$.
3. Pour $\alpha > 0$, étudier la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. Dans quel cas cette série est-elle absolument convergente ?

31.7 Fiche méthode