Chapitre 33

Déterminants

Sommaire

Dans ce chapitre, nous présentons la théorie des déterminants. Cet outil fondamental va nous être très utile pour détecter si une matrice carrée est inversible, à orienter les espaces vectoriels réels, à inverser de manière théorique les matrices carrées.
Il a fallu plus de 100 ans aux mathématiciens pour réussir à établir une théorie satisfaisante des déterminants. Il n'est pas étonnant que cette théorie puisse sembler en première approche délicate.

Un peu d'histoire

- En 1750, Cramer donne des règles générales permettant de calculer les solutions d'un système à n équations à n inconnues. Ces résultats s'appuient sur des calculs de déterminants, mais restent sans preuve.
- En 1764, Bézout reprend les travaux de Cramer et effectue les premiers développement d'un déterminant par rapport à une colonne.
- Vers 1770, Vandermonde et Laplace donnent les propriétés usuelles des déterminants (multilinéarité, développement par rapport à une ligne ou à une colonne).
- En 1801, Gauss utilise pour la première fois le mot "déterminant". Cette dénomination est repris en 1812 par Cauchy qui donne d'autres propriétés des déterminants (déterminant d'un produit de deux matrices carrées, invariance du déterminant par la transposition).
- Cayley introduit la notation du déterminant avec les barres verticales et établit la formule de la comatrice.

33.1 Formes multilinéaires

Définition 1

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit F, $E_1, \dots, E_p$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit $f : E_1 \times \dots \times E_p \to F$ une application.
On dit que l'application f est p-linéaire si, et seulement si,
pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, pour tout $(x_1, \dots x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \dots E_p$, l'application $x_k \mapsto f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_p)$ est linéaire.

Explication :

Soit $k \in [\![1, p]\!]$, l'application f est linéaire par rapport la k^e variable après avoir figé toutes les autres. Pour tout $x_k, x_k' \in E_k$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$;

$$f(x_1, \dots, x_{k-1}, \lambda x_k + \mu x_k', x_{k+1}, \dots, x_p) = \lambda f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_p) + \mu f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k', x_{k+1}, \dots, x_p)$$

Remarques : Soit $f : E_1 \times \dots \times E_p \to F$ une application p-linéaire.

- Si $F = \mathbb{K}$ on dit que $f : E_1 \times \dots \times E_p \to \mathbb{K}$ est une forme p-linéaire.
- Lorsque $p = 1$, on dit que $f : E_1 \to F$ est linéaire.
- Lorsque $p = 2$, on dit que $f : E_1 \times E_2 \to F$ est bilinéaire.
- Lorsque $p = 3$, on dit que $f : E_1 \times E_2 \times E_3 \to F$ est trilinéaire.

Exemples :

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. La loi de multiplication externe $\cdot : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda \cdot x \end{array} \right.$ est bilinéaire d'après les axiomes vérifiés par un espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
2. Le produit vectoriel $\wedge : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) & \mapsto & \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y} \end{array} \right.$ est bilinéaire.
3. Tout produit scalaire sur un espace vectoriel E est une forme bilinéaire sur E.
4. Le produit matriciel $\left\{ \begin{array}{ccc} M_{n,p}(\mathbb{K}) \times M_{p,r}(\mathbb{K}) & \to & M_{n,r}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \mapsto & AB \end{array} \right.$ est une application bilinéaire.
5. Le produit de deux fonctions $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ (f, g) & \mapsto & fg \end{array} \right.$ est une application bilinéaire.

Exercice A1 :

1. Montrer que l'application :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ (A, B, C) & \mapsto & ABC \end{array} \right.$$

est trilinéaire

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $f_1, \dots, f_p \in L(E, \mathbb{K})$. Montrer que :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E^p & \to & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \displaystyle\prod_{k=1}^{p} f_p(x_p) \end{array} \right.$$

est une forme p-linéaire.

33.1.1 Formes p-linéaires

Nous allons nous intéresser en particulier au cas des formes p-linéaires où $E_1 = E_2 = \cdots = E_p$ et $F = \mathbb{K}$.

Définition 2 (Forme p-linéaire symétrique, antisymétrique)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $f : E^p \to \mathbb{K}$ une forme p-linéaire.

1. On dit que f est **symétrique** si, et seulement si, la valeur de f ne change pas lorsque l'on intervertit deux de ces vecteurs. En d'autres termes :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \text{ avec } i < j, \quad f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_p) = f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_p).$$

2. On dit que f est **antisymétrique ou alternée** si, et seulement si, la valeur de f est changé en son opposé lorsque l'on intervertit deux de ces vecteurs. En d'autres termes :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \text{ avec } i < j, \quad f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_p) = -f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_p).$$

Exemples :

1. Tout produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique.
2. Considérons une forme trilinéaire alternée $\varphi : E^3 \to \mathbb{K}$. On a donc pour tout $x, y, z \in E$:

$$\varphi(x,z,y) = -\varphi(x,y,z), \quad \varphi(z,y,x) = -\varphi(x,y,z), \quad \varphi(y,x,z) = -\varphi(x,y,z).$$

Par contre,

$$\varphi(z,x,y) = -\varphi(x,z,y) = +\varphi(x,y,z) \quad \text{et} \quad \varphi(y,z,x) = -\varphi(x,z,y) = +\varphi(x,y,z).$$

Exemples : Considérons une forme 5-linéaire alternée $\varphi : E^5 \to \mathbb{K}$. Pour tout $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in E^5$,

$$\varphi(x_3,x_5,x_4,x_1,x_2) = -\varphi(x_1,x_5,x_4,x_3,x_2) = +\varphi(x_1,x_2,x_4,x_3,x_5) = -\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5).$$

$$\begin{aligned}\varphi(x_4,x_5,x_1,x_2,x_3) &= -\varphi(x_1,x_5,x_4,x_2,x_3) = +\varphi(x_1,x_2,x_4,x_5,x_3) = -\varphi(x_1,x_2,x_3,x_5,x_4) \\ &= +\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\end{aligned}$$

Changer l'ordre des arguments de φ correspond à appliquer une permutation sur les indices de (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5). Par exemple :

$$\varphi(x_3,x_5,x_4,x_1,x_2) = \varphi(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)},x_{\sigma(4)},x_{\sigma(5)})$$

avec $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Explication :

Changer l'ordre des arguments d'une forme p-linéaire $\varphi : E^p \to \mathbb{R}$ revient à appliquer une permutation sur les indices de $(x_1,\dots,x_p) \in E^p$ en considérant $\varphi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(p)})$ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_p$.

Avec cette remarque, reformulons la définition précédente.

Définition 3 (Reformulation)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $f : E^p \to \mathbb{K}$ une forme p-linéaire.

1. On dit que f est **symétrique** si, et seulement si, pour toute transposition $\tau = (i,j) \in \mathfrak{S}_p$
$$f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(p)}) = f(x_1, \dots, x_p)$$
2. On dit que f est **antisymétrique ou alternée** si, et seulement si, pour toute transposition $\tau = (i,j) \in \mathfrak{S}_p$
$$f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(p)}) = -f(x_1, \dots, x_p)$$

Proposition 4

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $f : E^p \to \mathbb{K}$ une forme p-linéaire. On a les équivalences suivantes :

1. L'application f est **symétrique** si, et seulement si,
$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_p, \quad f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = f(x_1, \dots, x_p)$$
2. On dit que f est **antisymétrique ou alternée** si, et seulement si,
$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_p, \quad f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p)$$

Preuve : Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_p$. On sait que σ se décompose comme une composée de transpositions. En d'autres termes, il existe $s \in \mathbb{N}^*$ et $\tau_1, \tau_2 \dots, \tau_s$ des transpositions telles que :
$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_s.$$
Rappelons que la signature de σ est alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^s$.

1. Supposons que f une forme p-linéaire symétrique, évaluons pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$:
$$\begin{array}{rcl} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) & = & f(x_{(\tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_s)(1)}, \dots, x_{(\tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_s)(p)}) \\ & = & f(x_{(\tau_1[(\tau_2 \circ \cdots \circ \tau_s)(1)]}, \dots, x_{\tau_1[(\tau_2 \circ \cdots \circ \tau_s)(p)]}) \\ & = & f(x_{(\tau_2 \circ \cdots \circ \tau_s)(1)}, \dots, x_{(\tau_2 \circ \cdots \circ \tau_s)(p)}) \\ & = & \dots \\ & = & f(x_{\tau_s(1)}, \dots, x_{\tau_s(p)}) = f(x_1, \dots, x_p). \end{array}$$
2. Supposons que f une forme p-linéaire alternée, évaluons pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$:
$$\begin{array}{rcl} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) & = & f(x_{(\tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_s)(1)}, \dots, x_{(\tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_s)(p)}) \\ & = & f(x_{(\tau_1[(\tau_2 \circ \cdots \circ \tau_s)(1)]}, \dots, x_{\tau_1[(\tau_2 \circ \cdots \circ \tau_s)(p)]}) \\ & = & -f(x_{(\tau_2 \circ \cdots \circ \tau_s)(1)}, \dots, x_{(\tau_2 \circ \cdots \circ \tau_s)(p)}) \\ & = & \dots \\ & = & (-1)^{s-1} f(x_{\tau_s(1)}, \dots, x_{\tau_s(p)}) = (-1)^s f(x_1, \dots, x_p) \\ & = & \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p) \end{array}$$

□

Théorème 5

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $f : E^p \to \mathbb{K}$ une forme p-linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L'application f est **antisymétrique ou alternée**
2. L'application f s'annule sur toute famille de vecteurs de E^pcontenant au moins deux vecteurs égaux. En d'autres termes :
$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p, \quad \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad \text{avec } i < j$$
$$x_i = x_j \implies f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = 0.$$

Preuve : Montrons que (1) $\implies$ (2). Supposons que f une forme p-linéaire alternée. Soit $(x_1,\ldots,x_p)\in E^p$. Soit $(i,j)\in [\![1,p]\!]$ avec $i<j$, par définition de l'antisymétrie, on a :

$$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p)=-f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_p)$$

Supposons que $x_i=x_j$, on a alors :

$$f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_j,\ldots,x_p)=-f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_j,\ldots,x_p)$$
$$2f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_j,\ldots,x_p)=0.$$

Donc

$$f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_j,\ldots,x_p)=0.$$

Montrons la réciproque. Supposons que (2) est vraie. Montrons que f est alternée.
Soit $(x_1,\ldots,x_p)\in E^n$. Soit $(i,j)\in [\![1,p]\!]$ avec $i<j$. Comme (2) est vraie, on a :

$$f(x_1,\ldots,x_i+x_j,\ldots,x_i+x_j,\ldots,x_p) \quad = \quad 0$$

En utilisant la linéarité par rapport à la i^e variable, puis par rapport à la j^e variable, on a :

$$\begin{aligned}
0 &= f(x_1,\ldots,x_i+x_j,\ldots,x_i+x_j,\ldots,x_p)\\
&= f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_i+x_j,\ldots,x_p)+f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i+x_j,\ldots,x_p)\\
&= \underbrace{f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_i,\ldots,x_p)}_{=0}+f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p)+f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_p)+\underbrace{f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_j,\ldots,x_p)}_{=0}\\
&= f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p)+f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_p)
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p)=-f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_p).$$

Donc f est bien alternée.

$\square$

Remarque : On notera $\mathcal{A}^p(E)$ l'ensemble des formes p-linéaires alternées définies sur E^p. On peut prouver que $\mathcal{A}^p(E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Théorème 6 (Les formes p-linéaires alternées détectent les familles liées de p vecteurs)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $f: E^p\to\mathbb{K}$ une forme p-linéaire alternée. Soit $(x_1,\ldots,x_p)\in E^p$.
Si la famille $(x_1\ldots,x_p)$ est une famille liée, alors $f(x_1,\ldots,x_p)=0$.

Preuve : Supposons que $(x_1\ldots,x_p)$ est une famille liée. Ainsi l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. Supposons qu'il s'agit de i^e vecteur x_i. Il existe $(\lambda_k)_{k\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}}$ tel que :

$$x_i=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}\lambda_k x_k$$

Évaluons désormais :

	Explications :
$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_p) = f\left(x_1,\ldots,\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}\lambda_k x_k,\ldots,x_p\right)$	
$= \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}\lambda_k f(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_p)$	On utilise la p-linéarité de f (plus précisément la linéarité par rapport à la variable i)
$= \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}\lambda_k f\underbrace{(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_p)}_{x_k \text{ apparaît deux fois}}$	Le vecteur x_k apparaît deux fois.
$= \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}\lambda_k\times 0=0.$	Il s'agit du théorème précédent.

$\square$

Théorème 7

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $f: E^p\to\mathbb{K}$ une forme p-linéaire alternée. On ne change pas la valeur de f quand on ajoute à l'une des variables une combinaison linéaire des autres.

33.1.2 À la recherche des formes p-linéaires alternées

On suppose désormais que l'espace vectoriel $\boxed{E \text{ est de dimension finie } n.}$
Premier cas : Si $p > n$. On sait que tout famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ est liée. Le théorème précédent assure que toute forme p-linéaire alternée $f : E^p \to \mathbb{K}$ est nulle sur E^p.

Deuxième cas : Nous allons nous placer dans le cas intéressant où $\boxed{n = p.}$ Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille de vecteurs. En décomposant ces vecteurs dans la base $(x_1, \dots, x_n)$,

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \exists!(a_{i,j}) \in \mathbb{K}^n, \quad x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

Nous allons expliciter $f(x_1, \dots, x_n)$.

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_n) &= f\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n} e_{i_n}\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \dots a_{i_n,n} \, f\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\right) \\
&= \sum_{(i_1,\dots,i_n) \in [\![1,n]\!]^n} a_{i_1,1} \dots a_{i_n,n} \, f\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\right)
\end{aligned}$$

Dans la somme intervenant ci-dessus, $f\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\right) = 0$ dès que deux indices parmi $i_1, \dots, i_n$ sont égaux. Nous pouvons ainsi seulement conserver dans cette somme les termes dont les n-uplets $(i_1, \dots, i_n)$ de $[\![1, n]\!]^n$ constitués d'éléments deux à deux distincts. Il s'agit donc des n-arrangements de $[\![1, n]\!]$.
Dans ce cas particulier, on a exactement $\dfrac{n!}{(n-n)!} = n!$ arrangements de $[\![1, n]\!]$. La donnée d'un n-arrangement $(i_1, \dots, i_n)$ de $[\![1, n]\!]$ est équivalente à la donnée d'une permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ telle que :

$$i_1 = \sigma(1), \quad i_2 = \sigma(2) \dots, i_n = \sigma(n).$$

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_n) \in [\![1,n]\!]^n \\ (i_1,\dots,i_n) \text{ arrangement de } [\![1,\, n]\!]}} a_{i_1,1} \dots a_{i_n,n} \, f\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \, f\left(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}\right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} \, f\left(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}\right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} \varepsilon(\sigma) f\left(e_1, \dots, e_n\right) \\
f(x_1, \dots, x_n) &= \boxed{\left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k}\right] f\left(e_1, \dots, e_n\right)}
\end{aligned}$$

33.2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 8

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

1. Soit $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Soit $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{F} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On appelle déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$, le scalaire noté $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ défini par :

$$\boxed{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k}.}$$

2. L'application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K}$ est une forme n-linéaire alternée sur E^n vérifiant $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Remarques :

1. La matrice A consiste à ranger en colonnes les coordonnées des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ décomposée dans la base $\mathcal{B}$.
2. On a défini le déterminant d'une famille de $\boxed{n}$ issue d'un espace vectoriel de dimension $\boxed{n.}$

Preuve : La multilinéarité de $\det_{\mathcal{B}}$ ne pose pas de problème, il suffit de l'écrire soigneusement.
Montrons que $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Soit $\varphi \in \mathfrak{S}_n$, montrons que :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(n)}) = \varepsilon(\varphi) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Remarquons que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(n)}) = (a_{i,\varphi(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Utilisons la définition :

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(n)}) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),\varphi(k)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(\varphi^{-1}(j)),j} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{(\sigma \circ \varphi^{-1})(j)),j} \\
&= \sum_{\theta \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\theta \circ \varphi) \prod_{k=1}^{n} a_{\theta(j)),j} \\
&= \sum_{\theta \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\theta)\varepsilon(\varphi) \prod_{k=1}^{n} a_{\theta(j)),j} \\
&= \varepsilon(\varphi) \sum_{\theta \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\theta) \prod_{k=1}^{n} a_{\theta(j)),j} \\
&= \varepsilon(\varphi) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

Explication :

On effectue le changement de variable $j = \varphi(k)$, ce qui revient $k = \varphi^{-1}(j)$.
Remarquons que l'application :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \to & \mathfrak{S}_n \\ \sigma & \mapsto & \sigma \circ \varphi^{-1} \end{array} \right.$$

est une bijection.

On effectue le changement de variable $\theta = \sigma \circ \varphi^{-1}$.
Ainsi $\sigma = \theta \circ \varphi$

Propriété de la signature.

$\varepsilon(\varphi)$ ne dépend pas de θ, on peut le sortir de la somme.
La variable θ étant muette, on reconnaît :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

On en déduit que $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire alternée.

Calculons $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$. On remarque que $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = I_n$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma \neq \mathsf{Id}_{[\![1,n]\!]}$. Alors il existe $i \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(i) \neq i$. Ainsi : $a_{\sigma(i),i} = 0$.
Nécessairement $\prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} = 0$. En appliquant la formule du déterminant :

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k}. \\
&= \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \neq \mathsf{Id}_{[\![1,n]\!]}}} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k}}_{=0} + \prod_{k=1}^{n} a_{\mathsf{Id}_{[\![1,n]\!]}(k),k} \\
&= \prod_{k=1}^{n} a_{k,k} = \prod_{k=1}^{n} 1 = 1.
\end{aligned}$$

□

Théorème 9 (Toute forme n-linéaire alternée est proportionnelle au déterminant dans une base donnée)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit f une forme n-linéaire alternée sur E^n. Alors :

$$f = f(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}$$

Ainsi l'espace vectoriel $\mathcal{A}^n(E)$ formes n-linéaires alternées sur E^n est de dimension 1.

$$\mathcal{A}^n(E) = \mathsf{Vect}(\det_{\mathcal{B}}).$$

Preuve : On a prouvé dans le paragraphe "à la recherche des formes p-linéaires alternées" dans le cas où $n = p$ et E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n que si $f \in \mathcal{A}^n(E)$, alors pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k}\right] f(e_1, \dots, e_n)$$

où $A = (a_{i,j}) = \mathsf{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.
On constate que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) f(e_1, \dots, e_n).$$

On a bien : $\boxed{f = \underbrace{f(e_1, \dots, e_n)}_{\in \mathbb{K}} \det_{\mathcal{B}}.}$

Ainsi $f \in \mathsf{Vect}\left(\det_{\mathcal{B}}\right)$. Donc $\mathcal{A}^n(E) \subset \mathsf{Vect}\left(\det_{\mathcal{B}}\right)$. Réciproquement, on a vu que $\det_{\mathcal{B}} \in \mathcal{A}^n(E)$. Donc $\mathsf{Vect}(\det_{\mathcal{B}}) \subset \mathcal{A}^n(E)$. Finalement :

$$\mathcal{A}^n(E) = \mathsf{Vect}\left(\det_{\mathcal{B}}\right).$$

Remarquons que $\det_{\mathcal{B}}$ n'est pas nulle puisque $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$. Donc :

$$\dim(\mathcal{A}^n(E)) = \mathsf{Vect}\left(\det_{\mathcal{B}}\right) = 1.$$

□

33.2.1 Déterminants en dimension 2 et 3

Théorème 10 (Déterminants en dimension 2)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension 2. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $x, y \in E$ tels que

$$\mathsf{Mat}_{\mathcal{B}}(x, y) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

On a alors l'égalité :

$$\det_{\mathcal{B}}(x, y) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

On note cette quantité $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Théorème 11 (Déterminants en dimension 3)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension 3. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $x, y, z \in E$ tels que

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

On a alors l'égalité :

$$\det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

On note cette quantité $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Moyen mnémotechnique : Règle de Sarrus

$$\begin{array}{ccc:cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Remarque : Nous verrons d'autres manières plus pratiques de calculer un déterminant de taille 3 sans utiliser la règle de Sarrus.

33.2.2 Changement de bases et caractérisation des bases

Théorème 12 (Formule de changement de bases)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E. On a alors l'égalité suivante, pour tout famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs de E :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F}).$$

Théorème 13 (Caractérisation des bases)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.
La famille $\mathcal{F}$ est une base de E si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

Dans ce cas : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \dfrac{1}{\det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})}$.

Exercice A2 : Montrer à l'aide d'un calcul de déterminant que la famille $(X^2+1, X+1, 2X^2-X)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice A3 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Donner à l'aide d'un calcul de déterminant, une condition nécessaire et suffisante pour que la famille de $\mathbb{R}^3$ $((1,1,1), (0,\lambda,1), (0,0,4))$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

33.3 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 14 (Déterminant d'une matrice carrée)

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A le déterminant des vecteurs colonnes de A dans la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. On le note $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

Par définition, on a :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k}.$$

Théorème 15 (Lien entre déterminant d'une matrice carrée et déterminant d'une famille de vecteurs)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. On a l'égalité :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})).$$

Remarque : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Notons $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de la matrice A. Soit $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. On a $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_c}(C_1, \dots, C_n) = A$. Ainsi :

$$\det(A) = \det(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_c}(C_1, \dots, C_n)) = \det_{\mathcal{B}_c}(C_1, \dots, C_n).$$

Théorème 16 (Règles de calculs)

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(\lambda A) = \boxed{\lambda^n} \det(A)$.
2. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas :
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$
4. Deux matrices semblables ont même déterminant.
5. $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det({}^tA) = \det(A)$.

Attention

Le déterminant n'est pas linéaire. En général, $\det(\lambda A + \mu B) \neq \lambda \det(A) + \mu \det(B)$.

Exercice A4 : Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\det(A) \in \mathbb{Z}$.

Exercice A5 : Soit A une matrice antisymétrique de taille impaire. Montrer que A est non inversible.

Exercice A6 : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{K})$. Soit $A' = ((-1)^{i+j} a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sigma(k)$.
2. Exprimer $\det(A')$ en fonction de $\det(A)$.

Exercice E7 :

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note $\overline{A}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de A. Montrer que $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.
2. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.
3. En considérant les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que l'hypothèse de commutation est nécessaire.

Exercice C8 : Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathbb{R}$.

33.4 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Théorème 17 (Matrice triangulaire supérieure ou inférieure)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure avec $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & a_{n,n} \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est le produit des éléments diagonaux :

$$\det(A) = a_{11} \dots a_{n,n}.$$

Théorème 18

Soit M une matrice triangulaire par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{M_{n-p,p}(\mathbb{K})} & C \end{pmatrix}$$

où $A \in M_p(\mathbb{K})$, $B \in M_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$. On a alors l'égalité suivante :

$$\det(M) = \det(A)\det(C).$$

Attention

Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où A, B, C, D sont des matrices carrées. On a : $\det(M) \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$.
L'égalité serait trop belle pour être vraie...

Théorème 19 (Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs)

Soit $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{N}^*$. Soit $M = \begin{pmatrix} A_1 & \star & \star \\ & \ddots & \star \\ & & A_r \end{pmatrix}$ avec $A_1 \in M_{p_1}(\mathbb{K}), \dots, A_r \in M_{p_r}(\mathbb{K})$. On a l'égalité :

$$\det(M) = \det(A_1) \dots \det(A_r).$$

Exercice A9 : Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2^1 & \star & \dots & \star \\ 0 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & 2^n \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 7 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 1 & 7 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

Exercice A10 : Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. On considère l'application :

$$\det : \left\{ \begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \det(A) \end{array} \right.$$

Cette application est-elle injective ? Surjective ?

33.5 Règles de calculs des déterminants

33.5.1 Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

Théorème 20

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de la matrice A. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Soit A' la matrice obtenue après avoir effectué sur A l'opération de transvection $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$. On a alors :
$$\det(A') = \det(A).$$
2. Soit A' la matrice obtenue après avoir effectué sur A l'opération de dilatation $C_i \leftarrow \lambda C_i$. On a alors :
$$\det(A') = \lambda \det(A).$$
3. Soit A' la matrice obtenue après avoir effectué sur A l'opération de permutation $C_i \leftrightarrow C_j$. On a alors :
$$\det(A') = -\det(A).$$

Théorème 21

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $L_1, \dots, L_n$ les lignes de la matrices A. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Soit A' la matrice obtenue après avoir effectué sur A l'opération de transvection $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$. On a alors :
$$\det(A') = \det(A).$$
2. Soit A' la matrice obtenue après avoir effectué sur A l'opération de dilatation $L_i \leftarrow \lambda L_i$. On a alors :
$$\det(A') = \lambda \det(A).$$
3. Soit A' la matrice obtenue après avoir effectué sur A l'opération de permutation $L_i \leftrightarrow L_j$. On a alors :
$$\det(A') = -\det(A).$$

Exercice A11 : Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

33.5.2 Développement par rapport à une ligne ou à une colonne

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{K})$. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. Soit $\mathcal{B}_c = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

<u>Explications</u> :

$$\det(A) = \det_{\mathcal{B}_c}(C_1, \dots, C_n) = \det_{\mathcal{B}_c}(\dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots)$$

Par définition d'une matrice carrée.
On s'intéresse à la colonne j.

$$= \det_{\mathcal{B}_c}\left(\dots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} E_i, C_{j+1}, \dots\right)$$

On décompose C_j dans la base canonique.

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \det_{\mathcal{B}_c}(\dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots)$$

Linéarité du déterminant par rapport à la j^e variable.

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

On réécrit le déterminant avec les coefficients

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1) \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & 0 & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & 0 & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & 1 & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & 0 & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & 0 & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

On intervertit C_{j-1} et C_j, d'où l'apparition du signe $-$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 1 & a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

On effectue de proche en proche

$$C_{j-1} \leftrightarrow C_{j-2}, \dots, C_2 \leftrightarrow C_1$$

Ceci fait apparaître $\underbrace{(-1) \times (-1)}_{=(-1)^{j-1}}$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{j-1}(-1) \begin{vmatrix} 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

On fait la même chose avec les lignes afin de remonter le "1". On effectue $L_i \leftrightarrow L_{i-1}$ d'où l'apparition du (-1).

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \underbrace{(-1)^{j-1}(-1)^{i-1}}_{=(-1)^{i+j}} \begin{vmatrix} 1 & a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

On effectue de proche en proche :

$$L_{i-1} \leftrightarrow L_{i-2}, \dots, L_2 \leftrightarrow L_2$$

Ce qui fait apparaître $(-1)^{i-1}$.
On remarque d'autre part que :

$$(-1)^{j-1}(-1)^{i-1} = (-1)^{i+j}(-1)^{-2} = (-1)^{i+j}.$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

On tombe sur un déterminant triangulaire supérieure par bloc.
Les déterminants apparaissant dans la somme sont en fait issues du déterminant d'origine auquel on a supprimé la ligne i et la colonne j.
Des définitions s'imposent.

En partant d'un déterminant de taille n, on l'exprime comme une combinaison linéaire de déterminant de taille $n-1$.

Définition 22

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$.

1. On appelle mineur de A d'indice (i, j) le déterminant de la matrice obtenue à partir de A après y avoir supprimé la ligne i et la colonne j. Nous noterons ce déterminant $\Delta_{i,j}(A)$.
2. On appelle cofacteur de A d'indice (i, j) le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$.
3. On appelle comatrice de A, notée $\mathsf{Com}(A)$, la matrice des cofacteurs de A :

$$\mathsf{Com}(A) = \left((-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

À retenir

Les mineurs et les cofacteurs d'une matrices sont égaux au signe près. Pour se souvenir de la répartition des signes des cofacteurs, il suffit de retenir que cette distribution :

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Exercice A12 : Calculer les comatrices des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 23 (Formule de développement par rapport à une ligne ou à une colonne)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1. On peut développer le déterminant par rapport à l'une de ses lignes :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\Delta_{i,j}(A).$$

2. On peut développer le déterminant par rapport à l'une de ses colonnes :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\Delta_{i,j}(A).$$

Exemples :

1. Calculons le déterminant suivant en développement par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

2. Calculons le déterminant suivant en développement par rapport à la deuxiéme colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(-3) - 9 = -3.$$

Conseil

Il est fortement conseillé de développer un déterminant suivant une ligne (ou une colonne) contenant beaucoup de 0.

Meth 24

Pour développer un déterminant, on peut mélanger :

- les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes pour faire apparaître des zéros sur une ligne ou une colonne de zéros.
- Puis développer par rapport à cette ligne ou colonne.
- On peut essayer de se ramener à un déterminant diagonale par blocs.

On continue ainsi de suite jusqu'à finaliser le calcul ou on peut obtenir une formule de récurrence.

Exercice A13 : Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice E14 : Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Calculer le déterminant : $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$

Exercice E15 : Calculer le déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \ddots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & n & n \end{vmatrix}$

Exercice E16 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les déterminants des matrices :

$$A_n = (\max(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \quad \text{et} \quad B_n = (\min(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

33.5.3 Déterminants tridiagonaux

Exercice C17 : [CCP] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A_n \in M_n(\mathbb{R})$:

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_n(x) = \det(A_n)$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer l'expression de D_n en fonction de n.

Exercice E18 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Exercice C19 : On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ et $D_n(x) = \det(M_n(x))$

1. Pour $|x| < 2$, on pose $x = 2\cos(\theta)$. Trouver une relation de récurrence linéaire permettant de calculer $D_n(x)$ et montrer que $D_n(x) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.
2. Que valent $D_n(2)$ et $D_n(-2)$?

Exercice E20 : Soit $a \in \mathbb{K}^*$. Calculer le déterminant suivant : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ & & a & 2a \end{vmatrix}$

33.5.4 Formule de la comatrice

Théorème 25 (Formule de la comatrice)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a toujours l'égalité :

$$A\,{}^t\mathsf{Com}(A) = {}^t\mathsf{Com}(A)A = \det(A)I_n.$$

Dans le cas où $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on a : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathsf{Com}(A)$.

Remarques :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$. On suppose que $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Alors la matrice A est inversible :
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathsf{Com}(A) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
2. Il est fortement déconseillé d'utiliser la formule de la comatrice pour inverser une matrice trop grande, car cette formule met en jeux beaucoup trop de calculs. On l'utilisera pour répondre à des questions théoriques.

Exercice C21 : Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La matrice A est inversible et $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$.
2. $\det(A) = \pm 1$

Montrer que $GL_n(\mathbb{Z}) = \{A \in M_n(\mathbb{Z}) | A \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ et } A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})\}$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

33.6 Déterminant d'un endomorphisme

Définition 26

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $f \in L(E)$. Le scalaire $\det\left(\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(f)\right)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie. On l'appelle déterminant de f et on le notera $\det(f)$.

Preuve : Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On sait que l'on a l'égalité :

$$\underset{\mathcal{B}'}{\mathsf{Mat}}(f) = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} \underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(f) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

En prenant le déterminant de chaque membre, on en déduit que :

$$\begin{array}{rcl}
\det\left(\underset{\mathcal{B}'}{\mathsf{Mat}}(f)\right) & = & \det\left((P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} \underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(f) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right) \\
\det\left(\underset{\mathcal{B}'}{\mathsf{Mat}}(f)\right) & = & \det\left((P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}\right) \det\left(\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(f)\right) \det\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right) \\
\det\left(\underset{\mathcal{B}'}{\mathsf{Mat}}(f)\right) & = & \dfrac{1}{\det\left((P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})\right)} \det\left(\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(f)\right) \det\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right) \\
\det\left(\underset{\mathcal{B}'}{\mathsf{Mat}}(f)\right) & = & \det\left(\underset{\mathcal{B}}{\mathsf{Mat}}(f)\right)
\end{array}$$

□

Exemple : Considérons $A \in M_n(\mathbb{K})$ l'application canoniquement associée à A :

$$\varphi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} M_{n,1}(\mathbb{K}) & \to & M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$$

Soit $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. Rappelons que $\underset{\mathcal{B}_c}{\mathsf{Mat}}(\varphi_A)$ est en fait égale à A. On en déduit que :

$$\det(\varphi_A) = \det\left(\underset{\mathcal{B}_c}{\mathsf{Mat}}(\varphi_A)\right) = \det(A).$$

Théorème 27

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $f \in L(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. On a l'égalité :
$$\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}).$$
2. Soit $f, g \in L(E)$, on a l'égalité : $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g) = \det(g)\det(f) = \det(g \circ f)$.
3. Soit $f \in L(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $\det(\lambda f) = \boxed{\lambda^n} \det(f)$.
4. Soit $f \in L(E)$. L'endomorphisme f est un automorphisme si, et seulement si, $\det(f) \neq 0$. Dans ce cas :
$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}.$$

Exercice A22 : Déterminer tous les endomorphismes $f \in L(\mathbb{R}^5)$ tels que $f^2 + \mathsf{Id}_{\mathbb{R}^5} = 0_{L(\mathbb{R}^5)}$.

Exercice E23 : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in L(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

1. Montrer que $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E^n & \to & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, f(x_j), \dots, x_n) \end{array} \right.$ est une forme n-linéaire alternée.
2. En déduire que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, f(x_j), \dots, x_n) = \mathsf{Tr}(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Exercice E24 :
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. soit $u \in L(E)$. On suppose que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires stables par u. Calculer $\det(u)$ en fonction de $\det(u_{|F})$ et $\det(u_{|G})$.

33.7 Exemples classiques

33.7.1 Le déterminant de Vandermonde

Théorème 28 (Le déterminant de Vandermonde)

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On considère le déterminant de Vandermonde défini par :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. On a alors l'égalité :
$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

2. En particulier, $V(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ si, et seulement si, les nombres $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts.

Nous allons calculer de plusieurs manières ce déterminant.

<u>*Preuve*</u> : Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Établissons une relation de récurrence entre $V(x_1, \dots, x_n)$ et $V(x_1, \dots, x_{n-1})$.
Considérons le polynôme P défini par $P(X) = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i \leqslant n-1} (X - x_i)$. En développant ce polynôme, on peut écrire :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-2} X^{n-2} + X^{n-1}$$

où $a_0, a_1, \dots, a_{n-2} \in \mathbb{K}$. Effectuons l'opération élémentaire sur les colonnes : $C_n \leftarrow C_n + a_{n-2} C_{n-1} + \cdots + a_1 C_2 + a_0 C_1$. On obtient alors :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & P(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & P(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & P(x_{n-1}) \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & P(x_n) \end{vmatrix}$$

Or remarquons que par construction $P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_{n-1}) = 0$

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & 0 \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & P(x_n) \end{vmatrix} = (-1)^{n+n} P(x_n) V(x_1, \dots, x_{n-1}) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n-1} (x_n - x_i) V(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Nous avons mis en évidence une relation entre $V(x_1, \dots, x_n)$ et $V(x_1, \dots, x_{n-1})$.
Pour achever la preuve, effectuons une récurrence sur $n \in [\![2, +\infty[\![$. Notons pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$,

$$\mathcal{H}_n : \quad V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

<u>Initialisation</u> : On vérifie que $\mathcal{H}_2$ est vraie. En effet

$$V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant 2} (x_i - x_j).$$

<u>Hérédité</u> : Supposons que la propriété $\mathcal{H}_n$ soit vraie pour un entier n de $[\![2, +\infty[\![$ fixe mais quelconque. Montrons alors que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. On sait déjà que :

$$\begin{aligned} V(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &= \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_{n+1} - x_i) V(x_1, \dots, x_n) && \text{D'après la relation que nous avons établie} \\ &= \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_{n+1} - x_i) \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j) && \text{Car } \mathcal{H}_n \text{ est vraie} \\ &= \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n+1} (x_i - x_j). && \text{Il faut s'en convaincre !!!} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. La récurrence est ainsi faite. On en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in [\![2,+\infty[\![, \quad V(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j).}$$

Le second point découle de la formule précédente. Le déterminant $V(x_1,\dots,x_n)$ est nul si, et seulement si, il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ avec $i > j$ tel que $x_i = x_j$.
Ainsi, $V(x_1,\dots,x_n) \neq 0$ si, et seulement si, les nombres $x_1,\dots,x_n$ sont deux à deux distincts.

□

<u>*Preuve*</u> *:* Pour établir une relation de récurrence entre $V(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})$ et $V(x_1,\dots,x_n)$. On peut effectuer d'autres opérations sur les colonnes. Le calcul est un peu plus technique, mais permet de mettre en pratique les propriétés des déterminants. Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. Partons de :

$$V(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Pour i variant de $n+1$ à 2, effectuons les opérations élémentaires sur les colonnes $C_i \leftarrow C_i - x_{n+1}C_{i-1}$, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_{n+1} & x_1^2 - x_{n+1}x_1 & \cdots & x_1^{n-1} - x_{n+1}x_1^{n-2} & x_1^n - x_{n+1}x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 - x_{n+1} & x_2^2 - x_{n+1}x_2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_{n+1}x_2^{n-2} & x_2^n - x_{n+1}x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_{n+1} & x_n^2 - x_{n+1}x_n & \cdots & x_n^{n-1} - x_{n+1}x_n^{n-2} & x_n^n - x_{n+1}x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} - x_{n+1} & x_{n+1}^2 - x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} - x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n - x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

On détaille bien le contenu du déterminant pour ne pas faire de faute de calcul.

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_{n+1} & (x_1 - x_{n+1})x_1 & \cdots & (x_1 - x_{n+1})x_1^{n-2} & (x_1 - x_{n+1})x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 - x_{n+1} & (x_2 - x_{n+1})x_2 & \cdots & (x_2 - x_{n+1})x_2^{n-2} & (x_2 - x_{n+1})x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_{n+1} & (x_n - x_{n+1})x_n & \cdots & (x_n - x_{n+1})x_n^{n-2} & (x_n - x_{n+1})x_n^{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

On factorise dans la première ligne par $(x_1 - x_{n+1})$, dans la deuxième ligne par $(x_2 - x_{n+1})\dots$ dés que l'on peut.

$$= (-1)^{n+1+1} \begin{vmatrix} x_1 - x_{n+1} & (x_1 - x_{n+1})x_1 & \cdots & (x_1 - x_{n+1})x_1^{n-2} & (x_1 - x_{n+1})x_1^{n-1} \\ x_2 - x_{n+1} & (x_2 - x_{n+1})x_2 & \cdots & (x_2 - x_{n+1})x_2^{n-2} & (x_2 - x_{n+1})x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_{n+1} & (x_n - x_{n+1})x_n & \cdots & (x_n - x_{n+1})x_n^{n-2} & (x_n - x_{n+1})x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne. Le "1" se trouve à la ligne $n+1$ et à la colonne 1, ceci explique le $(-1)^{n+1+1}$

$$= (-1)^n (x_1 - x_{n+1})(x_2 - x_{n+1})\dots(x_n - x_{n+1}) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On a $(-1)^{n+2} = (-1)^n(-1)^2 = (-1)^n$

On factorise par $(x_1 - x_{n+1})$ dans la première ligne, par $(x_2 - x_{n+1})$ dans la deuxième ligne...

$$\begin{aligned} &= (-1)^n (x_1 - x_{n+1})(x_2 - x_{n+1})\dots(x_n - x_{n+1}) V(x_1,\dots,x_n) \\ &= (x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2)\dots(x_{n+1} - x_n) V(x_1,\dots,x_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i) V(x_1,\dots,x_n) \end{aligned}$$

Rappelons que $(x_1 - x_{n+1}) = -(x_{n+1} - x_1)$. $(x_2 - x_{n+1}) = -(x_{n+1} - x_2)$...

□

33.7.2 Déterminant de Cauchy

Théorème 29 (Déterminant de Cauchy)

Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ tels que pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_i + b_j \neq 0$. On a alors l'égalité :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \frac{V_n(a_1,\dots,a_n)\,V_n(b_1,\dots,b_n)}{\displaystyle\prod_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}(a_i+b_j)}$$

Exemple : Pour $n = 3$, on obtient :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \frac{1}{a_1+b_3} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \frac{1}{a_2+b_3} \\ \frac{1}{a_3+b_1} & \frac{1}{a_3+b_2} & \frac{1}{a_3+b_3} \end{vmatrix} = \frac{(a_3-a_1)(a_2-a_1)(a_3-a_2)(b_2-b_1)(b_3-b_1)(b_3-b_2)}{(a_1+b_1)(a_2+b_1)(a_3+b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_2)(a_3+b_2)(a_1+b_3)(a_2+b_3)(a_3+b_3)}$$

Preuve : Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$

Nous allons établir pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$ une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n-1}. On considère la fraction rationelle

$$R(X) = \frac{(X-b_1)\dots(X-b_{n-1})}{(X+a_1)\dots(X+a_n)}.$$

Cette fraction rationnelle est de degré -1 et admet pour zéros $b_1, \dots, b_n$. On peut décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$R(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X+a_k}$$

où $\lambda_k = (-1)^{n-1} \dfrac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(a_k+b_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(a_i-a_k)}$. En particulier $\lambda_n = (-1)^{n-1} \dfrac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(a_n+b_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{n}(a_i-a_n)} = \dfrac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(a_n+b_i)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)}$

Grâce à cette décomposition en éléments simples, effectuons l'opération sur les lignes de Δ_n, $L_n \leftarrow \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_n L_n$. Cette opération modifie le déterminant puisqu'on a multiplié la ligne L_n par λ_n, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{n-1} \\ L_n \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda_n} \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{n-1} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_k \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_n} \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{b_1+a_k} & \cdots & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{b_{n-1}+a_k} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{b_n+a_k} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_n} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & \cdots & R(b_{n-1}) & R(b_n) \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda_n} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & \cdots & 0 & R(b_n) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

En développant par rapport à la dernière ligne, on obtient :

$$\Delta_n = (-1)^{n+n} R(b_n) \frac{1}{\lambda_n} \Delta_{n-1} = R(b_n) \frac{1}{\lambda_n} \Delta_{n-1} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)}{\prod_{i=1}^{n} (b_n + a_i) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n + b_i)} \Delta_{n-1}.$$

Pour finir le calcul de Δ_n, effectuons un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{H}_n : \quad \Delta_n = \frac{V_n(a_1, \ldots, a_n) V_n(b_1, \ldots, b_n)}{\prod_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} (a_i + b_j)}.$$

<u>Initialisation</u> : On vérifie que $\mathcal{H}_1$ est vraie. En effet

$$\Delta_1 = \left| \tfrac{1}{a_1+b_1} \right| = \frac{V_1(a_1) V_1(b_1)}{\prod_{i=j=1} (a_i + b_j)}$$

<u>Hérédité</u> : Supposons que la propriété $\mathcal{H}_n$ soit vraie pour un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ fixe mais quelconque. Montrons alors que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. On sait déjà que :

$$\begin{aligned}
\Delta_{n+1} = \quad & = \frac{\prod_{i=1}^{n} (b_{n+1} - b_i) \prod_{i=1}^{n} (a_{n+1} - a_i)}{\prod_{i=1}^{n+1} (b_{n+1} + a_i) \prod_{i=1}^{n} (a_{n+1} + b_i)} \Delta_n \\
& = \frac{\prod_{i=1}^{n} (b_{n+1} - b_i) \prod_{i=1}^{n} (a_{n+1} - a_i)}{\prod_{i=1}^{n+1} (b_{n+1} + a_i) \prod_{i=1}^{n} (a_{n+1} + b_i)} \frac{V_n(a_1, \ldots, a_n) V_n(b_1, \ldots, b_n)}{\prod_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} (a_i + b_j)} && \text{car } \mathcal{H}_n \text{ est vraie} \\
& = \frac{\prod_{i=1}^{n} (b_{n+1} - b_i) \prod_{i=1}^{n} (a_{n+1} - a_i)}{\prod_{i=1}^{n+1} (b_{n+1} + a_i) \prod_{i=1}^{n} (a_{n+1} + b_i)} \frac{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (b_j - b_i)}{\prod_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} (a_i + b_j)} && \text{par définition des déterminants de Vandermonde.} \\
& = \frac{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (a_j - a_i) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (b_j - b_i)}{\prod_{(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2} (a_i + b_j)} && \text{En êtes-vous vraiment convaincu(e) ?} \\
& = \frac{V_{n+1}(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) V_{n+1}(b_1, \ldots, b_n, b_{n+1})}{\prod_{(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2} (a_i + b_j)}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. La récurrence est ainsi faite. □

Donnons une autre technique (plus calculatoire) à l'aide d'opérations sur les lignes et les colonnes pour établir la relation de récurrence entre Δ_{n+1} et Δ_n.

<u>*Preuve :*</u> à partir de

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n+1}} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n+1}+b_1} & \frac{1}{a_{n+1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n+1}+b_{n+1}} \end{vmatrix}$$

effectouns pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, les opérations $C_i \leftarrow C_i - C_{n+1}$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\Delta_{n+1} &= \begin{vmatrix}
\dfrac{b_{n+1}-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_{n+1})} & \dfrac{b_{n+1}-b_2}{(a_1+b_2)(a_1+b_{n+1})} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_{n+1}} \\
\dfrac{b_{n+1}-b_1}{(a_2+b_1)(a_2+b_{n+1})} & \dfrac{b_{n+1}-b_2}{(a_2+b_2)(a_2+b_{n+1})} & \cdots & \dfrac{1}{a_2+b_{n+1}} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \\
\dfrac{b_{n+1}-b_1}{(a_{n+1}+b_1)(a_{n+1}+b_{n+1})} & \dfrac{b_{n+1}-b_2}{(a_{n+1}+b_2)(a_{n+1}+b_{n+1})} & \cdots & \dfrac{1}{a_{n+1}+b_{n+1}}
\end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(a_1+b_{n+1})(a_2+b_{n+1})\dots(a_{n+1}+b_{n+1})} \begin{vmatrix}
\dfrac{b_{n+1}-b_1}{a_1+b_{n+1}} & \dfrac{b_{n+1}-b_2}{a_1+b_{n+1}} & \cdots & 1 \\
\dfrac{b_{n+1}-b_1}{a_2+b_{n+1}} & \dfrac{b_{n+1}-b_2}{a_2+b_{n+1}} & \cdots & 1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \\
\dfrac{b_{n+1}-b_1}{a_{n+1}+b_{n+1}} & \dfrac{b_{n+1}-b_2}{a_{n+1}+b_{n+1}} & \cdots & 1
\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Effectuons des opérations sur les lignes suivantes : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $L_i \leftarrow L_i - L_{n+1}$. On obtient alors :

$$\Delta_{n+1} = \frac{1}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}(b_{n+1}+a_i)} \begin{vmatrix}
\dfrac{(b_{n+1}-b_1)(a_{n+1}-a_1)}{(a_1+b_1)(a_1+b_{n+1})} & \dfrac{(b_{n+1}-b_2)(a_{n+1}-a_1)}{(a_1+b_2)(a_1+b_{n+1})} & \cdots & 0 \\
\dfrac{(b_{n+1}-b_1)(a_{n+1}-a_2)}{(a_2+b_1)(a_2+b_{n+1})} & \dfrac{(b_{n+1}-b_2)(a_{n+1}-a_2)}{(a_2+b_2)(a_2+b_{n+1})} & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \\
\dfrac{b_{n+1}-b_1}{a_{n+1}+b_{n+1}} & \dfrac{b_{n+1}-b_2}{a_{n+1}+b_{n+1}} & \cdots & 1
\end{vmatrix}$$

On a mis les fractions au même déniminateur

$$= \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(b_{n+1}-b_j)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}(b_{n+1}+a_i)\prod_{i=1}^{n}(a_{n+1}+b_i)} \begin{vmatrix}
\dfrac{a_{n+1}-a_1}{a_1+b_1} & \dfrac{a_{n+1}-a_1}{(a_1+b_2)} & \cdots & 0 \\
\dfrac{a_{n+1}-a_2}{a_2+b_1} & \dfrac{a_{n+1}-a_2}{a_2+b_2} & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \\
1 & 1 & \cdots & 1
\end{vmatrix}$$

On factorise dans le déterminant selon les lignes puis les colonnes.

$$= \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(b_{n+1}-b_j)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}(b_{n+1}+a_i)\prod_{i=1}^{n}(a_{n+1}+b_i)} \begin{vmatrix}
\dfrac{a_{n+1}-a_1}{a_1+b_1} & \dfrac{a_{n+1}-a_1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{a_{n+1}-a_1}{a_1+b_n} \\
\dfrac{a_{n+1}-a_2}{a_2+b_1} & \dfrac{a_{n+1}-a_2}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{a_{n+1}-a_2}{a_2+b_n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \\
\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n+b_1} & \dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n+b_2} & \cdots & \dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n+b_n}
\end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière colonne

$$= \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(b_{n+1}-b_j)\prod_{j=1}^{n}(a_{n+1}-a_j)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}(b_{n+1}+a_i)\prod_{i=1}^{n}(a_{n+1}+b_i)} \begin{vmatrix}
\dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_n} \\
\dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2+b_n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \\
\dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_n}
\end{vmatrix}$$

On reconnaît le déterminant de Cauchy d'ordre n.

$$= \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(b_{n+1}-b_j)\prod_{j=1}^{n}(a_{n+1}-a_j)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}(b_{n+1}+a_i)\prod_{i=1}^{n}(a_{n+1}+b_i)}\Delta_n$$

□

33.7.3 Un autre déterminant sympathique

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$, $a, b, c \in \mathbb{K}$ on cherche à calculer le déterminant suivant de taille n :

$$\Delta(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & c & \cdots & c \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

Premier cas : Supposons que $b = c$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

On remarque que si on additionne les nombres de chaque ligne, on obtient $a + (n-1)b$

$$= \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & \cdots & \cdots & b \\ \vdots & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a & b \\ a + (n-1)b & b & \dots & b & a \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

On remplace la colonne 1 par la somme de toutes les colonnes.

$$= (a + (n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & \cdots & b \\ \vdots & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

On factorise la première colonne par $(a + (n-1)b)$

$$= (a + (n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - L_1 \end{array}$$

On élimine tous les 1 de la première colonne sauf le premier en effectuant des opérations sur les lignes.

On obtient une forme triangulaire supérieure. Le déterminant est le produit des éléments diagonaux.

$$= (a-b)^{n-1} (a + (n-1)b)$$

Deuxième cas : Supposons $b \neq c$.

Astuce

Nous allons introduire une variable $x \in \mathbb{K}$ et considérer le déterminant $\Delta(a+x, b+x, c+x)$.

1. Nous allons démontrer à l'aide d'opérations sur les colonnes que $\Delta(a+x, b+x, c+x)$ est une fonction affine (un polynôme de degré inférieur à 1) de la forme $x \mapsto \alpha x + \beta$.
2. Déterminer α et β.
3. Calculer $\Delta(a, b, c)$ en faisant $x = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{K}$, posons $f(x) = \Delta(a+x, b+x, c+x)$, montrons que f est une fonction polynômiale de degré inférieur à 1 :

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c+x & \cdots & c+x \\ b+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ b+x & \cdots & b+x & a+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+x & c-a & c-a & \cdots & c-a \\ b+x & a-b & c-b & & c-b \\ \vdots & 0 & a-b & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & c-b \\ b+x & 0 & 0 & & a-b \end{vmatrix} C_i \leftarrow C_i - C_1 \text{ pour } i \in [\![2,n]\!]$$

En développant suivant la première colonne, on obtient l'égalité :

$$f(x) = (a+x)\lambda_1 + (b+x)\lambda_2 + \cdots + (b+x)\lambda_n,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des scalaires qu'il n'est pas utile de préciser. On remarque que f est bien une fonction polynômiale de degré inférieur à 1. Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = \alpha x + \beta.$$

Utilisons deux valeurs de f pour déterminer complètement la fonction. Évaluons par exemple $f(-b)$ et $f(-c)$:

$$\begin{cases} f(-b) = \begin{vmatrix} a-b & c-b & \cdots & c-b \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c-b \\ 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^n = -\alpha b + \beta \\ \\ f(-c) = (a-c)^n = -\alpha c + \beta \end{cases}$$

Déterminons α et β à l'aide de ces deux équations :

$$\begin{cases} -\alpha b + \beta = (a-b)^n \\ -\alpha c + \beta = (a-c)^n \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{(a-c)^n - (a-b)^n}{b-c} \\ \\ \beta = \dfrac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c} \end{cases}$$

En conclusion : $\Delta(a,b,c) = f(0) = \beta = \dfrac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}$.

Proposition 30

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$, $a, b, c \in \mathbb{K}$, le déterminant suivant de taille n vérifie :

$$\Delta(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & c & \cdots & c \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix} = \begin{cases} \dfrac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c} & \text{si } b \neq c \\ \\ (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b) & \text{si } b = c \end{cases}$$

Remarque : On peut en fait se passer du premier cas où $b = c$ et le retrouver à partir du second cas.
En effet, on sait que l'application $x \mapsto \Delta(a,b,x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, c'est en effet une fonction polynomiale en la variable x (il suffit d'utiliser la grosse formule du déterminant d'une matrice).
Or pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{b\}$, $\Delta(a,b,x) = \dfrac{b(a-x)^n - x(a-b)^n}{b-x} = \dfrac{x(a-b)^n - b(a-x)^n}{x-b}$.

On a par continuité, l'égalité

$$\Delta(a,b,b) = \lim_{x\to b} \Delta(a,b,x).$$

Pour calculer cette limite, on remarque la quantité $\dfrac{x(a-b)^n - b(a-x)^n}{x-b}$ est un taux d'accroissement en b de la fonction $\varphi : x \mapsto x(a-b)^n - b(a-x)^n$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule en b. Or

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = (a-b)^n + nb(a-x)^{n-1}.$$

En conclusion, on retrouve que :

$$\Delta(a,b,b) = \lim_{x\to b} \Delta(a,b,x) = \varphi'(b) = (a-b)^n + nb(a-b)^{n-1} = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b).$$

33.8 Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

La notion d'orientation n'est valable que pour $\boxed{\text{des espaces vectoriels sur } \mathbb{R}.}$

33.8.1 Définition et propriétés

Définition 31 (Orientation d'un espace vectoriel)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E.
On dit que la base $\mathcal{B}'$ a la même orientation que $\mathcal{B}$ si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) > 0$.

Théorème 32

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. La relation binaire "avoir la même orientation" sur l'ensemble des bases de E est une relation d'équivalence.

Définition 33

On appelle orientation d'un espace vectoriel le choix arbitraire d'une base de référence. Dans ce cas, une autre base de E sera dite directe si, et seulement si, elle a la même orientation que la base de référence. Elle sera dite indirecte dans le cas contraire.

33.8.2 Effet d'un automorphisme sur l'orientation

Théorème 34

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in GL(E)$. Rappelons que l'image de toute base de E par f est encore une base de E.

1. Si $\det(f) > 0$ alors l'image de toute base directe (respectivement indirecte) de E par f est encore une base directe (respectivement indirecte) de E. On dit que f préserve l'orientation.
2. Si $\det(f) < 0$ alors l'image de toute base directe (respectivement indirecte) de E par f devient une base indirecte (respectivement directe) de E. On dit que f renverse l'orientation.